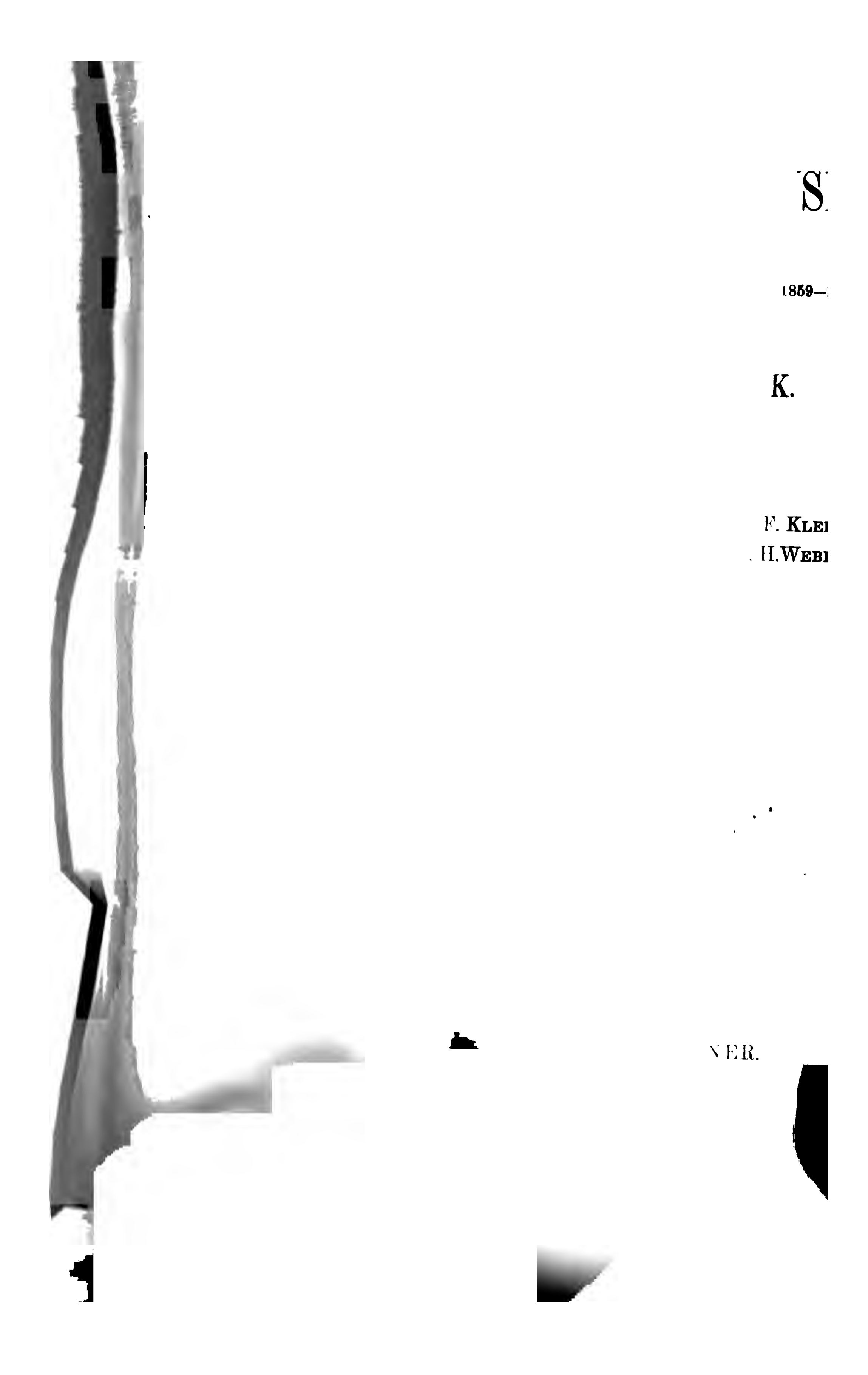



Stanford University Libraries
3 6105 001 363 006





S

1859—

K.

F. KLEI
H.WEBI

NER.

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1854 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

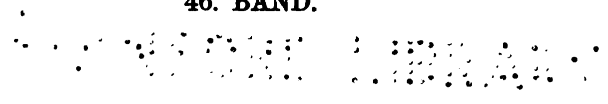
UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, G. HAUCK, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN

VON

R. MEHMKE IN STUTTGART. UND **C. RUNGE** IN HANNOVER.

46. BAND.





LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

An die Herren Mitarbeiter und Leser!

Beim Abschlusse dieses Bandes der Zeitschrift für Mathematik und Physik fühlen wir uns gedrungen, allen unseren Mitarbeitern unseren lebhaften Dank auszusprechen. Ihrer Hilfe ist es zuzuschreiben, dafs der mit diesem Bande unternommene Versuch, die Zeitschrift zu einem Organ für angewandte Mathematik umzugestalten, heute als wohlgelungen bezeichnet werden darf. Das zu Anfang dieses Jahres aufgestellte Programm ist in seinen Grundzügen durchgeführt worden: Eine Reihe bemerkenswerter, namhafte Fortschritte aufweisender Arbeiten über numerische Gleichungen, genäherte Integration von Differentialgleichungen, empirische Funktionen, Rechenapparate, wie auch aus der darstellenden Geometrie, Kinematik, Dynamik, technischen Mechanik und mathematischen Physik, ferner Abhandlungsverzeichnisse von bisher nicht erreichter Vollständigkeit sind in diesem Bande abgedruckt worden; Arbeiten aus der Geodäsie, Photogrammetrie, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung, welche nicht mehr Platz finden konnten, werden im nächsten Heft erscheinen. Nur mit den im Programm vorgesehenen regelmäfsigen Berichten über neue Rechenmaschinen, geometrische Instrumente und Zeichenwerkzeuge, die als Ergänzungen zu den betreffenden Abschnitten der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften gedacht sind und schon für diesen Band in Aussicht genommen waren, haben wir geglaubt, noch nicht beginnen zu sollen, weil seit dem Erscheinen von Band I, Heft 6 der Encyklopädie, worin die Rechenmaschinen und -Apparate bis zur Gegenwart dargestellt sind, erst kurze Zeit verflossen und der Teil der Encyklopädie, in welchem die geometrischen Instrumente und Zeichenwerkzeuge ihre Darstellung finden werden, noch nicht erschienen ist. Jedoch werden wir Anfragen aus diesen Gebieten (vergl. S. 255 und 383 dieses Bandes) jederzeit nach bestem Wissen beantworten, so wie wir überhaupt allen Anfragen auch in der Folge besondere Aufmerksamkeit widmen werden.

Nicht unerwähnt möge die grofse Mühe und Sorgfalt bleiben, welche die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner auf die Tafeln und die ganze Ausstattung der Zeitschrift verwendet hat.

Stuttgart und Hannover, November 1901.

R. Mehmke. C. Runge.

Inhalt.

Kleinere Mitteilungen.

Anfragen.

Auskünfte.

Bücherschau.

Berichtigung.

Von A. Denizot in Charlottenburg.

In meiner Arbeit: *„Über ein Pendelproblem von Euler“*, Band 46 dieser Zeitschrift Seite 471, ist leider in der Rechnung ein unangenehmer Rechenfehler gemacht worden. Der Zähler des mit Hilfe der Substitution

$$\sin^2\psi = z$$

transformierten Integrals muſs lauten:

$$1 + \frac{x^2}{p^2} z.$$

Infolge dessen gestaltet sich das Endresultat:

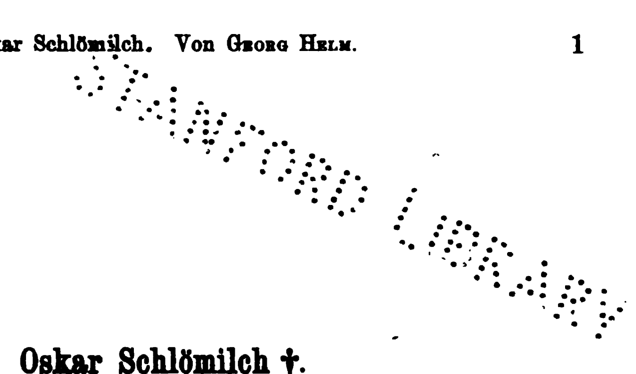
$$\begin{aligned} t - t_0 = M\Bigg\{&\left[1 + \frac{x^2}{p^2} s - \lambda^2 \frac{x^2}{p^2}(s - r)\left(\nu^2 \operatorname{sn}^2\beta + \frac{\nu^2 \operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta}\right)\right] v \\ &- \frac{\lambda}{2} \frac{x^2}{p^2}(s - r) \frac{\nu^2 \operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta} \log \frac{\theta(v - \beta)}{\theta(v + \beta)} \\ &- \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\mu} \frac{x^2}{p^2}(s - r) \operatorname{arc\,tg} \frac{\mu(y - \lambda^2) + \sqrt{(\mu^2 y - \lambda^2)(y - 1)}}{\lambda\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}}\Bigg\}, \end{aligned}$$

wo

$$M = p\sqrt{\frac{c}{g}} \frac{(s - r)}{\sqrt{r(1 - r^2)(1 - r x^2)\left(1 + \frac{r x^2}{p^2}\right)}}.$$



Dr. O. Schlömilch.



Oskar Schlömilch †.

Mit einem Bildnis O. Schlömilchs als Titelbild.

Am Morgen des 7. Februar dieses Jahres ist der Mann aus dem Leben geschieden, unter dessen Namen sich diese Zeitschrift ihren weiten Ruf erworben hat.

Vergleicht man ihre Entwickelung seit ihrer Gründung im Jahre 1856 durch die Jahrzehnte hindurch mit der gleichzeitigen Haltung der anderen mathematischen Zeitschriften Deutschlands, so kann man nicht zweifeln, daſs es ihrem Leiter unausgesetzt als Ziel vorschwebte, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf das weite Gebiet der Anwendungen ihrer Wissenschaft hinzulenken und dadurch die mit dem Aufblühen der exakten Wissenschaften im neunzehnten Jahrhundert und sonderlich mit der Entwickelung der technischen Schulen aufsprieſsenden neuen Keime zu pflegen. Wer sich erinnert, wie in der Mitte des Jahrhunderts und den nächst folgenden Jahrzehnten der Aufschwung der technischen Schulen von den Universitätskreisen so vielfach verkannt wurde, der kann nicht an Schlömilchs Grab treten, ohne dankbar zu empfinden, daſs da einer der Letztüberlebenden dahingegangen ist unter jenen Forschern und Lehrern, die, frühe bereits von einer klareren Einsicht erfüllt, zum innerlichen, geistigen Aufbau der technischen Hochschulen den Grund legen halfen. Und wenn andererseits das Erreichte bereits wieder verwirrt wurde in den Kämpfen des Tages, Mathematiker und Techniker gleichsam von einander abzurücken scheinen, — wie wehmütig muſs da der Blick an dem Wirken dieses Mannes haften, dessen Lebensarbeit heute schon uns Zurückblickenden wie in übersichtlicher Ferne erscheint.

Am 13. April 1823 zu Weimar geboren und auf dem Gymnasium seiner Vaterstadt vorgebildet, besuchte Schlömilch die Universitäten Jena, Berlin und Wien und habilitierte sich 1844 als Privatdozent der Mathematik in Jena. Hier, wo er 1845 zum auſserordentlichen Professor ernannt wurde, sowie in der ersten Zeit seines Aufenthalts in Dresden, wohin er 1849 als Professor der höheren Mathematik und

analytischen Mechanik an der Königl. Sächs. Technischen Bildungsanstalt berufen wurde, entfaltete er eine ungewöhnlich lebhafte literarische Thätigkeit, und die zahlreichen Neuauflagen seiner Lehrbücher bezeugen ebenso das zu jener Zeit in stetem Wachsen begriffene Bedürfnis immer weiterer Kreise nach gründlicherer mathematischer Ausbildung, wie die pädagogische Sicherheit ihres Verfassers.

Im fünften Jahrzehnt des vorigen Jahrhunderts war man noch genötigt durch Übersetzungen französischer Lehrbücher vom Ausland einzuführen, was der wissenschaftliche Aufschwung in Deutschland benötigte. Cauchy, der hervorragende Analytiker, theoretische Physiker wie Fourier und Ampère, vor allem aber die frühere Reife der wissenschaftlichen Technik machten Frankreich zu unserem Lehrmeister auf diesem Gebiete. An diesen Zug unserer Entwickelung schliefsen die Lehrbücher Schlömilchs mit glücklichem Griffe an. Die elegante Darstellung der Franzosen, ihr pädagogischer Takt, die stete Aufmerksamkeit auf die Anwendungen zeichnen auch seine Bücher aus; aber als Schüler Dirichlet's, und unter Jacobi's Nachwirkungen arbeitend, fügt er dem Allen nach Inhalt und Methode Neues hinzu, und gesteigerte Ansprüche an Strenge der mathematischen Gedankenführung veranlassen ihn in jener ersten Zeit seines literarischen Arbeitens zu tiefgreifenden Umarbeitungen von Auflage zu Auflage. So haben seine Bücher in lebendiger Verwendung ein halbes Jahrhundert überdauert, während die meisten der Übersetzungswerke seiner Vorgänger seit Jahrzehnten vom Markt verschwunden sind.

Schon 1845 erschien als erster Teil eines Handbuchs der mathematischen Analysis sein Handbuch der algebraischen Analysis, dem in den Jahren 1847 und 1848 die beiden Teile des Handbuchs der Differential- und Integralrechnung folgten. Aus pädagogischer Praxis sind durchgehends seine weiteren Lehrbücher hervorgewachsen: Die Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung der Geometrie des Mafses, deren beide Teile 1849 und 1854 erschienen, aus dem 1848 übernommenen Auftrag, provisorisch den mathematischen Unterricht an der Eisenacher Realschule zu erteilen, — der 1853 erschienene erste Band des Compendiums der höheren Analysis und die 1855 gedruckte Analytische Geometrie des Raumes aus den Vorlesungen am Dresdener Polytechnikum. Das Erscheinen des zweiten Bandes seines Compendiums schob Schlömilch, nachdem ein grofser Teil des Manuskriptes vollendet war, noch um drei Jahre hinaus, als sich durch die Einführung eines Kursus zur Ausbildung von Lehrern der Mathematik am Dresdener Polytechnikum ihm Gelegenheit bot, die darin behandelten Teile der Analysis vorzutragen, und unterzog dann ein-

gedenk des alten Spruches docendo discimus seinen ersten Entwurf einer ziemlich bedeutenden Umarbeitung, so daſs er erst 1866 erschien.

Das Gebiet der Mathematik, das Schlömilch mit den ersten Auflagen seiner Lehrbücher umschreibt, hat er auch später nicht überschritten und auch im wesentlichen bei seinen eigenen Forschungen eingehalten. So bezeichnen die Geometrie des Maſses, die darstellende Geometrie in ihren Fundamenten und die analytische Geometrie in ihrer älteren Gestalt den Kreis seines geometrischen Arbeitens, und auch in der Analysis folgen seine Veröffentlichungen der tiefgehenden Entwickelung nicht, die über Cauchys Ideenkreis und Dirichlets Anregungen hinausführte. Die bestimmten Integrale sind von seiner Jugendzeit an ein dauernder Gegenstand seines Arbeitens, nicht minder die Reihenentwickelungen, — wird ja doch geradezu eine bekannte Form des Restes der Taylor'schen Reihe unter seinem Namen zitiert. Ferner hat er wiederholt den höheren Differentialquotienten, den Bernoulli-Zahlen und Sekantenkoeffizienten, sowie den Theoremen von Fourier sein Interesse zugewendet, auch der approximativen Quadratur und der Theorie der Differenzen und Summen besondere Darstellungen gewidmet.

In die analytische Mechanik hinüber führen zunächst die Integrationsaufgaben, die Masse und die Anziehung eines Körpers bei ungleichförmiger Dichtigkeit desselben zu ermitteln, weiter gehören vereinzelte Untersuchungen über das Parallelogramm der Kräfte, über Kettenbrückenlinien und über die Bewegung eines schweren Punktes auf einer Kurve hierher, sowie die Übersetzung von Duhamel's Mechanik.

Ich habe die Empfindung, daſs sich in Schlömilchs Festhalten am mathematischen Standpunkt seiner Jugendjahre wieder seine Richtung auf die Verwendbarkeit äuſsert, auf das „was bei der Lösung mechanischer und physikalischer Probleme hauptsächlich zur Anwendung kommt“. Man vergegenwärtige sich doch, daſs das analytische Rüstzeug, mit dem ein Kirchhoff und Helmholtz ihr Lebenswerk begannen und mit dem bis in das letzte Jahrzehnt Geodäsie, technische Mechanik, Elektrotechnik und Thermodynamik arbeiteten, dem Umfange nach durch die Schlömilchschen Lehrbücher der Analysis bezeichnet wird.

Mehr und mehr tritt in Schlömilchs Lebensgange seine pädagogisch gerichtete Natur hervor.

Schon jene Lehrbücher zeigen es ja, wie ihn die Aufgabe seines Berufes, jungen Technikern die Analysis zuzuführen, erfüllte, aber lebendiger als das Denkmal, das er sich durch diese Bücher gesetzt hat, ist der tiefe Eindruck, den er in den Herzen seiner Schüler hinter-

ließ. Wenn bei den sächsischen Technikern später als anderwärts die Bekämpfung des Einflusses mathematischer Ausbildung auf den Unterricht der Techniker Eingang und Verständnis gefunden hat, so dürfte dies zu nicht geringem Teile dem nachhaltigen Einfluß seines Wirkens an der sächsischen Hochschule zuzuschreiben sein. Schon persönlich den Kreisen der sächsischen Techniker nahe stehend, hielt er seine Vorträge bei aller Gediegenheit und Tiefe rein von Belastungen durch der technischen Verwendung fremdartige, nur für den Mathematiker von Fach erhebliche Dinge. Es war in der That auch für einen Techniker keine Last, es war ein Genuß, seinen Vorträgen zu folgen. Krystallklar, in reinster Durchsichtigkeit und unerschütterlicher Festigkeit standen die Lehren der Mathematik vor dem Hörer. Ein Meister der Darstellung, verstand er es wunderbar, auch die schwierigeren Gedankengänge der Analysis auf den Hörer wirken zu lassen wie ein geistvolles Spiel und doch nachdrucksvoll wie ein Kunstwerk voll ästhetischen Ebenmaßes. Dabei hielt er seine Vorträge durchaus frei von der neuerdings uns angepriesenen Methode, die Mathematik in Anwendungen aufgehen zu lassen, — er faßt die Theorie in ihrer Tiefe, aber er weiß auch, wie dem Durchschnittsschüler das Eindringen in diese Tiefe durch die Anwendungen vermittelt wird. Der mathematische Unterricht an den technischen Schulen hat sich nach seiner Überzeugung „von unfruchtbaren philosophischen Redensarten, wie von einer möglichst eiligen praktischen Abrichtung gleichweit entfernt zu halten, ohne deswegen seine fortwährende Verbindung mit der Praxis zu opfern“. „Die strengsten Methoden sind, richtig dargestellt, immer die natürlichsten und kürzesten.“

Selten überschritt er im Vortrag die Grenzen streng sachlicher Darstellung, aber wenn er mit ein paar hingeworfenen Worten die Gedankenfolge würzte, geschah es mit feinem Humor und immer mit schlagendem Erfolge. Einige Wendungen in den Vorreden der ersten Auflagen seiner Hauptwerke geben einigermaßen den Eindruck solcher Äußerungen wieder. So wenn er eine Erörterung über das Wesen der höheren Analysis mit der Bemerkung einleitet, daß wenn man einen Mathematiker gewöhnlichen Schlages danach frage, man in der Regel eine Antwort erhalte, als hätte man einen Freimaurer gefragt, was die Maurerei sei; nach einigen unbestimmten Redensarten werde man nämlich ermahnt, sich in die Geheimnisse dieser Künste einweihen zu lassen, weil vorher das Wozu nur sehr schwer deutlich gemacht werden könne. Oder seine Mahnung, in Lehrbücher nur das unumgänglich Nötige, nicht Delikatessen der Wissenschaft als Zugabe aufzunehmen; denn giebt man sie anderen, als den talentvollen Schülern

zu kosten, „so wiederholt sich die Geschichte von jenem Bauernjungen, der über eine von Friedrich Wilhelm III. ihm gereichte Ananasscheibe bemerkte, sie schmecke wie Wurst“.

Über seine pädagogischen Grundanschauungen hat Schlömilch später nie viel Worte gemacht, ausführlich spricht er sich nur in der Vorrede zur mathematischen Analysis 1845 und zur Geometrie des Mafses 1849 aus, und was er da sagt, ist, wenn sich auch manches Einzelne bei ihm selbst im späteren Wirken abgeändert haben mag, im Fundamente auch heute noch bedeutungsvoll und gewichtig.

Wie ein Programm seiner Behandlung der Analysis klingen folgende Worte: „Dem schöpferischen Genie eines Euler war es nur um Erweiterung des wissenschaftlichen Gebietes zu thun, unbekümmert darum, ob diese Eroberungen gehörig gesichert waren oder nicht. Im Gegensatz hierzu finden wir bei Cauchy die gröfste Strenge bei vieler Kürze in der Entwickelung; dagegen leidet die Schönheit des architektonischen Baues durch sehr gekünstelte Anordnung und das Leben der Erfindung fehlt gänzlich. . . . Zwischen diesen beiden Extremen habe ich einen Mittelweg einzuschlagen gesucht, welcher das Interesse des heuristischen Gedankenganges mit der Strenge des französischen Analytikers vereinen und dem Ganzen ein besseres architektonisches Gefüge verleihen soll, als man bisher an diesem Teile der Mathematik bemerkt hat.“ Eben so energisch betont er in der Vorrede zur Geometrie des Mafses: „Es sind zwei Hauptforderungen, die ich an jeden Unterricht, besonders aber an den geometrischen stelle; die erste, organische Gliederung, betrifft die Anordnung des Stoffes, die zweite, heuristischer Gedankengang, die Darstellung desselben“. Hinsichtlich der Anordnung liefs man sich bisher „von zwei ganz erbärmlichen formalen Capricen leiten. Die erste Caprice (‘Maxime’ wäre schon zu ehrenvoll bezeichnet) besteht darin, keine Konstruktion zu verlangen, deren wirkliche thatsächliche Ausführung nicht vorher gelehrt worden ist. ... Die zweite noch schlimmere Caprice besteht darin, dafs man den geometrischen Stoff nach den Beweismitteln geordnet hat.“ Und ist es nicht bis heute im ganzen erfolglos geblieben, was er bereits 1854 in der Vorrede zum zweiten Teile der Geometrie des Mafses predigt? „Die Bevorzugung der Planimetrie ist ein pädagogischer Mifsgriff, der Accent mufs auf die Stereometrie gelegt werden. Hierzu bietet die deskriptive Geometrie das vortrefflichste — selbst den Gymnasien zu empfehlende — Mittel, was um so leichter anzuwenden ist, als ihre Prinzipien ein wahres Minimum von stereometrischer Theorie erfordern.“

Das war der Geist, den seine Lehrbücher überliefern und in dem

er ein Menschenalter hindurch an der Dresdener Polytechnischen Schule wirkte; die Schüler seiner ersten Lehrjahre stimmen mit denen der letzten überein in der dankbaren Erinnerung an seine Persönlichkeit und seine Anregungen.

Wie sein geistiges Leben über die Grenzen seines Faches hinübergriff, wird schon dadurch bekundet, dafs er in Dresden durch eine Reihe von Jahren öffentliche Vorträge über Geschichte der Philosophie hielt und in feinsinnigen Ausführungen einer Festrede beim 25jährigen Jubiläum des sächsischen Ingenieur- und Architekten-Vereins 1871 die Bedeutung des Stiles im Ingenieurbau betonte, — aber am meisten erschlofs sich doch diese Vielseitigkeit seines Interesses im persönlichen Verkehr.

Mit dem Jahre 1874 wendete sich auch sein Beruf ganz der Pädagogik zu; er verliefs das Dresdener Polytechnikum, einem Rufe ins sächsische Unterrichtsministerium folgend, in dem er die Stellung eines Referenten für das Realschulwesen bis 1885 bekleidete. Diese Berufsänderung macht sich auch in seinen literarischen Arbeiten geltend. Er verzichtet mehr und mehr darauf, selbst die erforderlich werdenden Neuauflagen seiner Lehrbücher zu besorgen und vertraut sie den Händen seiner Schüler Heger und Henke an; das 1881 erschienene Handbuch der Mathematik trägt geradezu nur seinen Namen und ist von Haus aus von anderen (Reidt und Heger) nach seinem Plane verfafst. Seine eigenen Arbeiten nehmen mehr und mehr die Form kleinerer Aperçus, kürzerer Notizen, vor allem aber die Form von Übungsaufgaben an. Schon die letzten Hauptwerke der Zeit seiner Professur, die 1868 und 1870 erschienenen beiden Teile seines Übungsbuches zum Studium der höheren Analysis, gehören dieser Richtung an, vor allem aber zeigt ein Blick in Hoffmanns 1898 erschienenes Aufgaben-Repertorium, das ihn als den eifrigsten Mitarbeiter kennzeichnet, wie fruchtbar und vielseitig Schlömilch auf dem Gebiete der mathematischen Kleinkunst war.

Der Ruhestand, in den er 1885 trat, wurde ihm in den letzten Jahren durch den Tod seiner treuen Lebensgefährtin und durch zunehmendes Leiden verbittert, das seinen Geist oft umnachtete. So gestaltete sich die letzte Zeit seines Lebens trotz aller aufopfernden Pflege der Seinen so getrübt, dafs der Tod als Erlöser erschien.

Von der grofsen Zahl der Verehrer und Freunde, die ein langes Leben voll erfolgreichen Schaffens, die seine geistig anregende, mit liebenswürdigem Humor ausgestattete Persönlichkeit, sein lebhafter Sinn für Kunst und Natur und edles Lebensbehagen einst um ihn gesammelt hatte, war nur ein enger Kreis Näherstehender an seinem

Sarge mit den Seinen versammelt, insbesondere Vertreter der Technischen Hochschule und des Ingenieurvereins.

Über die Grenzen seines persönlichen Wirkens hinaus und über die Grenzen hinaus, die dem Einfluſs von Lehrbüchern gezogen sind, wird aber vor allem diese Zeitschrift die Arbeiten ihres regsten Förderers aufbewahren und kommenden Geschlechtern in treuer Dankbarkeit den Namen ihres Begründers überliefern.

Georg Helm.

Künftige Ziele der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Da mit dem vorliegenden Hefte diese Zeitschrift sich ihren Lesern in veränderter Gestalt zeigt, erscheint es unerläſslich, einige Worte über die Ziele, welche von jetzt an in derselben verfolgt werden sollen, vorauszuschicken.

Durch die Anerkennung ermutigt, welche die im Schluſswort von 1897 angekündigten, in den letzten Bänden getroffenen neuen Einrichtungen und immer mehr zur Geltung gekommenen Bestrebungen seitens namhafter Beurteiler gefunden haben, hat die unterzeichnete Schriftleitung, nachdem eine Reihe hervorragender Ingenieure, Mathematiker, Physiker, Geodäten und Astronomen in dankenswerter Weise ihre Unterstützung zugesichert hatten, sich entschlossen, die Förderung der *angewandten* Mathematik von jetzt an als einzige Aufgabe der Zeitschrift zu betrachten. Diese Einschränkung, mit der wir gröſsere wissenschaftliche Vertiefung zu verbinden wünschen, bedeutet das Fallenlassen einiger Aufgaben, denen die Zeitschrift bisher ebenfalls gerecht zu werden suchte, denen sich aber schon andere Zeitschriften, vor allem das neugestaltete Archiv der Mathematik und Physik, in hinreichendem Maſse widmen, während ein besonderes *Organ für angewandte Mathematik* — durch die rasch zunehmende, auf eine Arbeitsteilung hindrängende Ausdehnung der mathematischen Wissenschaften vollauf gerechtfertigt und seit langem als Bedürfnis anerkannt — bis jetzt noch nicht vorhanden war. Wohl läſst sich darüber streiten, was zur reinen und was zur angewandten Mathematik zu rechnen sei, man wird es aber, hoffen wir, billigen, wenn wir die Grenzen nicht allzu enge ziehen und auſser den in den Bänden IV, V, VI der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" behandelten Gebieten — der *Mechanik*, insbesondere der *technischen Mechanik*, der *theoretischen Physik* einschlieſslich der *mathematischen Chemie* und *Krystallographie*, der *Geophysik*, *Geodäsie*, *Astronomie* — und der auf keinen Fall auszuschlieſsenden *Wahrscheinlichkeitsrechnung* nebst *Ausgleichungsrechnung*, *mathematischen Statistik* und *Versicherungsmathematik* auch das *numerische Rechnen*, die *Näherungsrechnung* („Approximations-Mathematik"), die Lehre von den

empirischen Formeln, die *darstellende Geometrie* samt *Schattenkonstruktionen* und *Perspektive*, das *graphische Rechnen* zu pflegen uns angelegen sein lassen, weil die in diesen Zweigen gelehrten Verfahren erst in den Stand setzen, irgend welche Anwendungen der Mathematik bis zu Ende durchzuführen, und wenn wir zugleich den hierbei gebrauchten technischen Hilfsmitteln, den *numerischen* und *graphischen Tafeln*, den *Rechenapparaten* und *-maschinen*, sowie den *Zeichenwerkzeugen* die nötige Beachtung schenken.

Es wird unser Bestreben sein, nicht nur Mathematikern, denen die Anwendungen ihrer Wissenschaft am Herzen liegen, sondern namentlich auch Lesern aus technischen Berufskreisen Anregung zu bieten und ihnen aufser unmittelbar in ihr Fach einschlagenden Untersuchungen die Kenntnis mathematischer Thatsachen und Verfahren, die für sie nützlich sein können, zu vermitteln. Nicht gering achten möge man ferner, dafs Ingenieure und Mathematiker sich hier in gemeinsamer Arbeit zusammenfinden können, was dazu beitragen wird, eine manchmal zu Tage tretende beklagenswerte Entfremdung zwischen ihnen zu beseitigen.

Im einzelnen sei folgendes bemerkt. Es ist im 42. Bande damit begonnen worden, aus der Praxis stammende *Aufgaben* zu stellen, „nicht blofs, um die Mathematiker überhaupt zur Beschäftigung mit solchen anzuregen, sondern um dieselben der Lösung entgegen zu führen, wenn letztere für die Technik ein wirkliches Bedürfnis ist, aber besondere mathematische Kenntnisse und Gewandtheit in der Handhabung mathematischer Werkzeuge erfordert, also die Mitwirkung der Mathematiker von Fach wünschenswert erscheinen läfst". Bis jetzt hat wegen der Schwierigkeit der gestellten Aufgaben diese Einrichtung wenig Erfolg gehabt, wir werden sie aber trotzdem beibehalten.

Mit fortlaufenden Berichten über neue Rechenmaschinen, geometrische Instrumente und Zeichenwerkzeuge, wie solche früher in Aussicht gestellt wurden, soll noch in diesem Bande ein Anfang gemacht werden.

Wie schon in diesem Hefte, soll künftig immer für *Anfragen* aus dem Leserkreise und *Auskünfte* ein Raum vorgesehen werden; wir hoffen, dafs diese neue Einrichtung, zu deren fleifsiger Benützung wir hiermit einladen, manchen Lesern willkommen sein wird.

Bei der Veröffentlichung des letzten Heftes der Zeitschrift haben der eine der jetzigen Herausgeber und die Verlagsbuchhandlung schon Anlafs genommen, ihrem lebhaften Bedauern über den Rücktritt des Herrn M. Cantor, welcher der Zeitschrift als Leiter der historisch-litterarischen Abteilung einen grofsen Teil seiner Lebensarbeit gewidmet

und sich bleibende Verdienste um dieselbe erworben hat, Ausdruck zu geben. Infolge dieses Rücktrittes kann die fragliche Abteilung nicht in der seitherigen Weise fortgeführt werden. Da jedoch die Geschichte der Mathematik in der „Bibliotheca Mathematica" ihr eigenes Organ besitzt, können wir auf den Abdruck von Arbeiten aus diesem Gebiete verzichten, wenn wir uns auch vorbehalten, gelegentlich kürzere Mitteilungen aus der Geschichte der angewandten Mathematik zu bringen. Ferner halten wir es für gerechtfertigt, uns bei den Bücherbesprechungen und den Verzeichnissen neu erschienener Schriften und Abhandlungen, bei denen wir auf möglichste Vollständigkeit und schnelle Berichterstattung bedacht sein werden, auf die angewandte Mathematik zu beschränken; indem wir auch technische Werke und Zeitschriften berücksichtigen, soweit sie Mathematisches enthalten, werden wir dennoch die Berichte anderer mathematischer Zeitschriften, wie des Archivs der Mathematik und Physik und der „Revue semestrielle" ergänzen können. Insbesondere werden wir nicht unterlassen, die in den letzten drei Bänden gegebenen Verzeichnisse von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, die in technischen Zeitschriften erschienen sind, welche Verzeichnisse bei Ingenieuren und Mathematikern viel Anklang gefunden haben, fortzusetzen und auf weitere technische Zeitschriften auszudehnen. Gelegentlich einer sehr wohlwollenden Besprechung unserer Zeitschrift im Jahrgang 1899 der Deutschen Bauzeitung ist der Wunsch geäufsert worden, auch etwaige in anderen mathematischen Zeitschriften erschienene, für Techniker wertvolle Arbeiten zur Kenntnis der letzteren zu bringen; diesem Wunsche wird Rechnung getragen werden.

Die bisherige Trennung der Zeitschrift in zwei Abteilungen mit besonderer Seitenzählung halten wir nicht mehr für notwendig.

Stuttgart und Hannover, Anfang 1901.

R. MEHMKE. C. RUNGE.

Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen.[1])

Von A. Sommerfeld in Aachen.

Vielfach wird heutzutage (von den Anhängern der Energetik) die Ansicht vertreten, dass jede specielle Vorstellung über die Natur der physikalischen Vorgänge vom Uebel sei, dass der experimentelle Forscher lediglich Beobachtungsthatsachen ohne Voreingenommenheit zu registriren und der Theoretiker dieselben, ohne seinerseits etwas hinzuzuthun, in ein mathematisches System zu bringen habe. Bei diesem Verfahren schützt man sich allerdings davor, gelegentlich einen Schritt zurück thun zu müssen; aber man verzichtet auch des Oefteren darauf, wichtige Schritte vorwärts zu machen, die erfahrungsgemäss durch geeignete Hypothesenbildung erleichtert werden.

Demgegenüber scheint in der theoretischen Physik der fruchtbarste Weg dieser zu sein: so specielle und bestimmte Hypothesen wie möglich zu Grunde zu legen, ihre Folgerungen exact zu entwickeln und diese mit der Erfahrung zu vergleichen: wenn sich kein Widerspruch mit der Erfahrung zeigt, gut, so waren unsere Hypothesen zulässig und können bis auf Weiteres beibehalten werden; wenn aber ein Widerspruch auftritt, so steht es noch besser: dann ist unsere Hypothese endgültig als unzulässig dargethan und wir haben eine definitive, wenn auch negative Erkenntniss gewonnen.

In diesem Sinne werde ich hier folgende von E. Wiechert[2]) und von Sir George Stokes[3]) vertretene Vorstellung über die Natur der Röntgenstrahlen zu Grunde legen: *Röntgenstrahlen bestehen in einer impulsiven (d. h. kurzen und starken) Störung des Gleichgewichts des Aethers, welche sich nach den Maxwell'schen Gleichungen zeitlich und räum-*

1) Zwei vorläufige Mittheilungen dieses Titels erschienen Physikalische Ztschr. 1. Jahrgang, Nr. 10, pag. 105, 1899, 2. Jahrgang, Nr. 4, pag. 55, 1900.

2) Abh. der Phys.-Oekon. Gesellschaft zu Königsberg, 1896, pag. 1 und pag. 45, sowie Wied. Ann. Bd. 59, 1896, vgl. besonders § 6.

3) Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. Bd. 9, pag. 215, 1896 und Proceedings of the Manchester Lit. and Phil. Soc. 1897.

lich fortpflanzt. Diese Vorstellung wird nahe gelegt durch die heutzutage wohl sicher gestellte Anschauung von der Beschaffenheit der Kathodenstrahlen, wonach die letzteren aus *fortgeschleuderten, elektrisch geladenen Theilchen von geringer Trägheit* bestehen. Treffen diese Theilchen auf ein festes Hinderniss, z. B. ein Platinblech oder die Wand einer Entladungsröhre, so werden durch die Hemmung der Ladungen ausserordentlich starke und plötzliche elektrische Kräfte erzeugt und wir haben eine „impulsive Aetherstörung", einen „Aetherstoss", der als Röntgenstrahlung wahrgenommen wird. Die Dauer der Störung hängt dabei von der Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, der Grösse der Kathodenpartikelchen und der Stärke der hemmenden Kräfte ab. Der hiermit dargelegte Zusammenhang bildet den Gegenstand einer wichtigen Arbeit von J. J. Thomson[1]), auf welche wir später zurückkommen.

Zweck der vorliegenden Untersuchung ist es, jene Hypothese an den Beugungserscheinungen der Röntgenstrahlen zu prüfen, die nach allgemeinem Urtheil wohl am ehesten über die Natur des Vorgangs Aufschluss versprechen, und von hier aus entweder zu einer vorläufigen Bestätigung oder zu einer definitiven Widerlegung jener Hypothese zu gelangen.

Mein Freund E. Wiechert hat mich zu wiederholten Malen auf das hier vorliegende Problem hingewiesen und ist mir bei seiner mathematischen Formulirung hülfreich zur Hand gegangen. Auch verdanke ich den Herren J. J. Thomson und C. H. Wind einige gütige Mittheilungen über den Gegenstand.

§ 1.

Allgemeine Bemerkungen über die mathematische Behandlung der Beugungsprobleme.

Was die Methode der mathematischen Durchführung betrifft, so knüpfe ich an eine frühere Arbeit[2]) über die Beugung des Lichtes an. Um mich von den Einwendungen frei zu machen, welche sich gegen die klassische Behandlung der optischen Beugungserscheinungen erheben[3]), habe ich dort ein bestimmtes mathematisches Problem, d. h. Differentialgleichungen und Grenzbedingungen, formulirt, und habe exakte Lösungen dieses Problems angegeben. Allerdings musste ich dabei auf den *Begriff des absolut schwarzen Körpers* von vornherein verzichten, welchen ich nicht in befriedigender Weise mathematisch fassen konnte. Ich bin seitdem zu

1) Philosophical Magazine, Febr. 1898.

2) Mathem. Ann., Bd. 47, pag. 317, 1896.

3) Göttinger Nachr. 1894, Nr. 4.

der Ueberzeugung gekommen, dass sich dieser Begriff in der That weder vom Boden der Maxwell'schen noch irgend einer anderen Lichttheorie durch einfache Grenzbedingungen definiren lässt und dass die übliche Definition in der Optik nicht frei von Widersprüchen in sich ist.

Statt dessen spreche ich[1]) von einem *absolut undurchsichtigen Körper*, welcher so definirt ist, dass die elektrischen Kraftlinien senkrecht auf ihm endigen (Leitfähigkeit unendlich) und dass daher überhaupt keine Lichtbewegung in sein Inneres eindringt. Er bildet insofern das gerade Gegentheil des absolut schwarzen Körpers, als das Licht an seiner Oberfläche vollständig zurückgeworfen wird, so dass man ihn auch *absolut reflectirend* oder *absolut blank* nennen kann. Die von mir gefundenen Lösungen (u) zerlegen sich nun von selbst in zwei deutlich geschiedene Bestandtheile ($u = u_1 \mp u_2$), deren einer dem (durch Beugung modificirten) einfallenden, deren zweiter dem (ebenfalls durch Beugung modificirten) reflectirten Licht entspricht. Jeden einzeln kann man auffassen als *Lichtbewegung auf einer Riemann'schen Fläche* (bez. bei einem dreidimensionalen Probleme als *Lichtbewegung in einem Riemann'schen Raume*), wobei dann nur ein Blatt der Fläche (bez. ein Individuum des Raumes) für die Darstellung des physikalischen Vorgangs in Betracht kommt. In meiner Arbeit ist sogar diese auf der Riemann'schen Fläche (im Riemann'schen Raum) definirte Lösung das Primäre; aus ihr setze ich die Lösung für die schlichte physikalische Ebene (den schlichten Raum) durch „Spiegelung" zusammen.

Diesem Gedankengange hat Herr W. Voigt eine bedeutsame Wendung gegeben. In seinem „Compendium der theoretischen Physik"[2]), wo Herr Voigt meine Lösung in modificirter Form wiedergiebt, betrachtet er den Bestandtheil u_1 meiner Lösung gesondert und bemerkt, dass dieser die Darstellung eines Vorganges liefert, welcher der gewöhnlichen Vorstellung von der *Beugung an einem schwarzen Körper* nahe kommt. Dies führt Herr Voigt an einer anderen Stelle näher aus[3]): Der Beugungsschirm (oder richtiger die Spur desselben in der Fortpflanzungsebene des Lichtes) spielt bei dieser Behandlung die Rolle *eines Verzweigungsschnittes der Riemann'schen Fläche*. Er gleicht einer offenen Thür, durch welche die Energie der Lichtbewegung aus dem „physikalischen Blatte" der Fläche austritt. Da sich hinter dieser Thür ein zweites Blatt (das „fingirte" oder das „Hülfsblatt") ausdehnt, so breitet sich die Lichtbewegung nach dem Passiren der Thür in diesem ungehindert aus und hat keinen Grund, zum physikalischen Blatt zurückzukehren. Die Energie der auffallenden Licht-

1) Mathem. Ann. l. c. Vgl. auch H. Poincaré, Acta Mathem. Bd. 16, 1892, pag. 297 und Bd. 20, 1897, pag. 59.

2) Bd. II, pag. 768, Leipzig 1895.

3) Göttinger Nachrichten 1899, Heft 1.

bewegung wird solchergestalt in einfachster Weise aus der Welt geschafft. Da ferner die Lage des Verzweigungsschnittes für den Charakter der auf der Riemann'schen Fläche definirten stetigen Function u_1 völlig belanglos ist und da beim Uebergange von dem einen zum anderen Blatte der Fläche überhaupt nichts Besonderes passirt, kann von einer Reflexion an der Oberfläche des Beugungsschirmes keine Rede sein. Das Vorhandensein jener offenen Thüre beeinflusst die Lichtbewegung im physikalischen Blatt nur in secundärer Weise. Wir haben damit die wesentlichen Merkmale des Begriffes des schwarzen Körpers vor uns: die Vernichtung der auffallenden Energie, das Fehlen jeder Reflexion an der Oberfläche und die ungestörte oder nur wenig gestörte Ausbreitung des Lichtes in der Umgebung des schwarzen Körpers.

Herr Voigt vertieft diese Auffassung des schwarzen Körpers weiter durch Betrachtung des *Poynting'schen Energieflusses*. Der Vector des Energieflusses muss offenbar auf der Oberfläche eines schwarzen Körpers allemal nach dem Innern des Körpers gerichtet sein. Herr Voigt zeigt, dass bei dem von ihm behandelten Problem dies wenigstens im Mittel der Zeit der Fall ist.

Trotzdem ist diese Definition des schwarzen Körpers, wie Herr Voigt selbst ausführt, weit entfernt, eine mathematisch befriedigende und eindeutige zu sein: Statt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche, auf welcher u_1 im einfachsten Falle definirt ist, kann man eine mehrblättrige oder eine unendlich vielblättrige zu Grunde legen; letzteres empfiehlt sich vielleicht durch die Ueberlegung, dass die Lichtbewegung um so weniger Grund haben wird, zum physikalischen Blatte zurückzukehren, je mehr Raum zur Ausbreitung ihr ausserhalb des physikalischen Blattes dargeboten wird. Auch wäre man an sich nicht genöthigt, den Zustand auf den fingirten Blättern ebenfalls den Maxwell'schen Gleichungen zu unterwerfen, insoweit als durch eine andersartige Fortsetzung des Zustandes keine Reflexionsvorgänge erzeugt werden. Wie man sieht, ist auf diese Weise ein erheblicher Spielraum für willkürliche Festsetzungen geschaffen.

Diese Willkür liegt aber in der Natur der Sache. Man muss sich vorstellen, dass es verschiedene Arten von schwarzen Körpern giebt, welche die verlangte Vernichtung der auffallenden Energie in mehr oder minder vollständiger Weise realisiren und dass es einen absolut schwarzen Körper vielleicht überhaupt nicht giebt. Bei einem seiner Natur nach unbestimmten Problem kann man aber keine eindeutig bestimmte mathematische Lösung verlangen.

Sehr bemerkenswerth scheint mir dabei, dass die beste experimentelle Realisirung des schwarzen Körpers, wie sie von W. Wien angegeben ist, der hier empfohlenen Auffassung nahe kommt. Sie besteht aus dem

inneren Hohlraume einer Kugel, in welchen das Licht durch eine kleine Oeffnung hineingelangt und aus dem es wegen fortgesetzter Reflexion an der Innenseite der Kugel nicht wieder heraus kann. Dieser Kugelhohlraum spielt ersichtlich im Experiment dieselbe Rolle, wie die fingirten Blätter der Riemann'schen Fläche in der theoretischen Behandlung. Dass er seinerseits dem physikalischen Raume angehört, ist im Experimente unvermeidlich, aber an sich nicht wünschenswerth. In der theoretischen Behandlung, wo wir den Hohlraum aus dem physikalischen Raume heraus verlegen, erreichen wir dieselben Vortheile, wie bei der experimentellen Anordnung und bewirken überdies, dass die Lichtbewegung im physikalischen Raum durch die Anwesenheit des schwarzen Körpers so wenig wie möglich direct beeinflusst wird, was nach Obigem dem Begriff des schwarzen Körpers am besten entspricht.

Alle diese Ueberlegungen, welche ja zunächst die Optik betreffen, finden auch in der Theorie der Röntgenstrahlen ihren Platz, wenn man unter Röntgenstrahlung den in der Einleitung bezeichneten Vorgang versteht. Ich lasse es dahingestellt, ob man nicht in der *Optik* mit dem absolut reflectirenden Körper ebenso gut arbeiten kann, wie mit dem absolut schwarzen. Jedenfalls aber können wir in der *Theorie der Röntgenstrahlen* den absolut reflectirenden Körper nicht brauchen. Denn man beobachtet bei Röntgenstrahlen nur eine eigenartige diffuse Reflexion, welche für die Beobachtung (d. h. für die Wirkung auf die photographische Platte) nicht in Betracht kommen dürfte; man wird also annehmen müssen, dass die reguläre Reflexion durch die atomistische Constitution der Electricität im Innern des Körpers vernichtet wird. *Den Röntgenstrahlen gegenüber*, kann man sagen, *verhält sich jedes undurchlässige Mittel wie ein absolut schwarzer Körper*. Im Folgenden werde ich daher, nachdem ich zunächst die (eindeutig bestimmte) Lösung für den „undurchsichtigen" Körper im Sinne meiner früheren Arbeit aufgestellt habe, zu dem schwarzen Körper im Sinne des Herrn Voigt übergehen.

Die Herstellung der für die Beugung in Betracht kommenden mehrdeutigen (auf Riemann'schen Flächen eindeutigen) Lösungen habe ich in der cit. Arbeit auf einem etwas umständlichen Wege bewirkt, indem ich von mehrdeutigen Lösungen der Potentialgleichung in zwei Dimensionen ausging und diese durch einen unendlichen Differentiationsprocess in Lösungen der Schwingungsgleichung verwandelte. Ich habe später[1]) zur Herstellung verzweigter räumlicher Potentiale einen kürzeren heuristischen Weg eingeschlagen, welcher überdies den Vortheil grösserer Allgemeinheit hat; er führt nämlich ebenso leicht zur Lösung drei- wie zweidimensionaler

1) Proceedings London Math. Soc. Vol. 28, 1897.

Probleme; auch liefert er, wie ich bereits am Schlusse der zuletzt genannten Arbeit angegeben habe, eine exakte Behandlung optischer und akustischer Beugungsprobleme sowie gewisser Wärmeleitungsprobleme. Dies wurde inzwischen von Herrn H. S. Carslaw[1]) ausgeführt. Dabei ist man, was für den vorliegenden Zweck wichtig ist, keineswegs auf die rein periodischen optischen oder akustischen Vorgänge beschränkt. Im Folgenden (§ 2 bis 5) werde ich mich daher dieser Methode bedienen, die ohne erhebliche Rechnung zum Ziele führt und die eleganten Hülfsmittel der Functionentheorie (Integrationen auf complexem Wege etc.) benutzt. Auch die geometrische Deutung und die numerische Discussion der gefundenen Lösung (§ 6 und 7) machen keine rechnerischen Schwierigkeiten. Diese treten erst auf, wenn man, was im Hinblick auf das Experiment erforderlich ist, von der Erregung selbst zur mittleren Energie der Erregung übergeht (§ 8).

Es liegt mir fern, die übliche Methode der Beugungstheorie, die von dem *Huygens'schen Principe* in seiner modernen Formulirung ausgeht, herabsetzen zu wollen. Jene Methode hat in der Optik kleiner Wellenlänge durch die Uebereinstimmung mit der Erfahrung längst ihre Brauchbarkeit bewiesen und wird, da sie auf alle noch so complicirten Fälle anwendbar ist, stets ihren grossen Werth behalten. Demgegenüber kann ich mein Verfahren bisher nur in dem einfachsten Falle der *Beugung an einer Halbebene* völlig durchführen. Schon das nächst einfache *Problem des Spaltes* konnte ich so nicht erledigen. Und doch ist gerade die Behandlung des letzteren auch für Röntgenstrahlen besonders wünschenswerth, da sich die einzigen heutzutage vorliegenden Beobachtungen auf den Spalt beziehen.

Theils um diesen Beobachtungen gerecht zu werden, theils um die Methode des Huygens'schen Principes auch hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf Aetherstösse zu prüfen und zu stützen, habe ich das Halbebenenproblem auch vom Standpunkte des Huygens'schen Principes behandelt (§ 9 und 10). *Es zeigte sich eine völlig befriedigende Uebereinstimmung beider Lösungen für den Fall, dass die Dauer des Aetherstosses genügend kurz ist.* Diese Bedingung ist aber bei den Röntgenstrahlen erfüllt, da sich (vgl. § 13 dieser Arbeit) die Dauer des Stosses kleiner als 10^{-18} sec. ergeben wird. Eine entsprechende Bedingung ist ja auch für die Anwendbarkeit des Huygens'schen Principes auf die periodischen Aethervorgänge erforderlich; sie besagt hier, dass die Periode der Lichtschwingung hinreichend kurz sein muss, was im Falle des sichtbaren Lichtes in der That zutrifft. Ueberhaupt verhält sich der Grenzfall eines unendlich kurzen Aetherstosses in vieler Hinsicht analog wie der Grenzfall der unendlich kurzen Lichtschwingungen: Hier wie dort haben wir eine geradlinige Ausbreitung der

1) Proceedings London Math. Soc. Vol. 30, 1899.

Erregung, eine absolut scharfe Schattengrenze etc. Nicht brauchbar dagegen würde das Huygens'sche Princip bei verhältnissmässig lang andauernden Impulsen oder bei den verhältnissmässig langsamen, unsichtbaren Lichtschwingungen, den Hertz'schen Wellen, sein.

Der Nachtheil der Methode des Huygens'schen Principes besteht hiernach in ihrer auf hinreichend jähe Impulse beschränkten Gültigkeit. Dazu kommt der weitere Nachtheil, dass die Rechnungen erheblich umständlicher und die Schlussformeln weniger einfach und übersichtlich werden, wie bei unserer Methode der verzweigten Lösungen. Der unschätzbare Vortheil des Huygens'schen Principes aber besteht darin, dass dieses sich ohne Weiteres auf complicirtere Probleme ausdehnt. Hiervon ziehe ich, durch die günstigen Erfahrungen beim Halbebenenproblem sicher gemacht, für die Behandlung des Spaltes Nutzen (§ 11 und 12) und komme schliesslich (§ 13) zur theoretischen Verwerthung der fundamentalen Beobachtungen von Haga und Wind.

Falls unsere Auffassung der Röntgenstrahlen sich als unhaltbar erweisen sollte, was nicht wahrscheinlich aber auch nicht unmöglich ist, so würden die zu entwickelnden Formeln deshalb doch nicht jeder physikalischen Bedeutung entbehren. Sie würden dann noch ein gewisses Interesse für *akustische Fragen* haben. So gut nämlich wie sich ein *musikalischer Ton* ähnlich verhält wie gewöhnliches periodisches Licht, so wird ein *kurzes impulsives Geräusch* (ein Paukenschlag oder ein Pistolenknall) in vieler Hinsicht durch dieselben Formeln beschrieben, die wir hier für Aetherstösse ableiten werden. Die folgenden Entwickelungen zeigen speciell, wie ein solches Geräusch an einer scharfen Kante gebeugt wird. Es ist gut, sich diese akustische Deutung als eine Art mechanischer Analogie für das Folgende gegenwärtig zu halten, da sie unserer Anschauung näher liegt, wie die weniger anschaulichen Aethervorgänge.

§ 2.

Problemstellung für den einfachsten Fall.

Der Schirm, um dessen Beugungseffect es sich handelt, sei eine einfache Halbebene, seine Kante sei die z-Axe; unsere Betrachtungen werden sich vornehmlich in einer zu dieser Kante senkrechten Ebene, der xy-Ebene, bewegen. Die Lage der x-Axe in dieser Ebene werden wir sogleich passend bestimmen.

Wir setzen den Schirm als *undurchsichtig* voraus; damit meinen wir, dass die in den Schirm fallenden Componenten der elektrischen Kraft dauernd in allen Punkten des Schirms Null sind. Bezeichnen wir die

elektrischen Componenten mit X, Y, Z, so haben wir also zunächst: $Z=0$. Die Componenten der magnetischen Kraft seien L, M, N.

Wir wollen ferner voraussetzen, dass der Zustand von der z-Coordinate unabhängig sei, dass also längs jeder zur z-Axe parallelen Geraden die elektrische und die magnetische Kraft überall dieselbe Grösse und Richtung habe. Aus den Maxwell'schen Gleichungen folgt dann für Z sowohl wie für N die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

wo V die Lichtgeschwindigkeit und v eine der beiden Componenten Z oder N bedeutet; längs der Ebene des Schirmes gilt ferner die *Grenzbedingung:*

$$v = 0 \quad \text{bez.} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \tag{2}$$

je nachdem v die elektrische oder die magnetische z-Componente darstellt. Aus Z und N berechnen sich die übrigen Kraftcomponenten durch einfache Differentiation und Integration nach dem folgenden, unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen fliessenden Schema:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = V\frac{\partial N}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = -V\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial t} = -V\frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = V\frac{\partial Z}{\partial x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Es kommt also wesentlich darauf an, eine Function v von x, y und t zu finden, welche den Gleichungen (1) und (2) genügt. Um diese Function vollständig zu definiren, müssen wir zunächst noch eine Festsetzung über den Anfangszustand hinzufügen; in diesem beruht erst die Eigenart der Röntgenstrahlen (nach unserer Hypothese), während die bisher entwickelten Gleichungen ebensowohl für den Fall des gewöhnlichen Lichtes Gültigkeit haben.

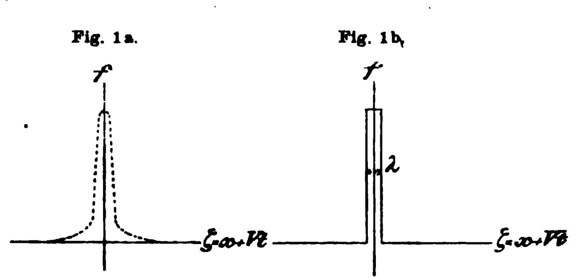
Wir wollen den Anfangszustand so einfach wie möglich wählen. Hierzu diene Folgendes als Vorbereitung:

Sehen wir zunächst von (2) ab, so genügen wir der Gleichung (1) am einfachsten, indem wir setzen:

$$v = u_0 = f(x + Vt); \tag{3}$$

hier bedeutet f irgend eine (natürlich differentiirbare) Function. Nehmen wir z. B. f gleich der Sinusfunction, so haben wir die einfachste Schwingung der gewöhnlichen Optik vor uns, nämlich eine *ebene Welle*, welche aus der Richtung der positiven x-Axe einfällt; für einen bestimmten Zeitpunkt wird v alsdann durch die bekannte Schlangenlinie dargestellt. Bei dem als Röntgenstrahlung angesprochenen Vorgang muss dagegen f für einen

bestimmten Zeitpunkt etwa durch die folgende Figur (1a) gegeben sein. *f darf nur für ein kurzes Werthegebiet des Argumentes*, z. B. in der Nähe des Werthes $x + Vt = 0$, *merklich von Null verschieden sein*. Bei einer derartigen Definition von f sprechen wir, im Anschluss an die optische Terminologie, von einem *ebenen Impuls*, weil hier wie dort die Flächen gleicher Erregung Ebenen (senkrecht zur x-Axe) sind.



Die einfachste analytische Function, welche der angegebenen Gestalt entspricht, ist

$$f(\xi) = e^{-k^2\xi^2}, \quad (\xi = x + Vt), \tag{4}$$

unter k eine hinreichend grosse Zahl verstanden. Diese Form von f werden wir in der That immer dann benutzen, wenn es uns darauf ankommt, die Erklärung der Function f auf complexe Werthe des Argumentes auszudehnen. Sonst genügt es auch, f durch irgend einen zackenartigen Curvenzug zu definiren. Für die spätere numerische Discussion ist es am bequemsten, f durch die Rechtecksform aus Fig. 1b zu geben. Die Breite des Rechtecks bezeichnen wir mit λ (sie wird eine ähnliche Rolle spielen, wie die Wellenlänge λ der Optik); seine Höhe sei 1. Im Allgemeinen geht f als eine willkürliche Function in unsere Formeln ein.

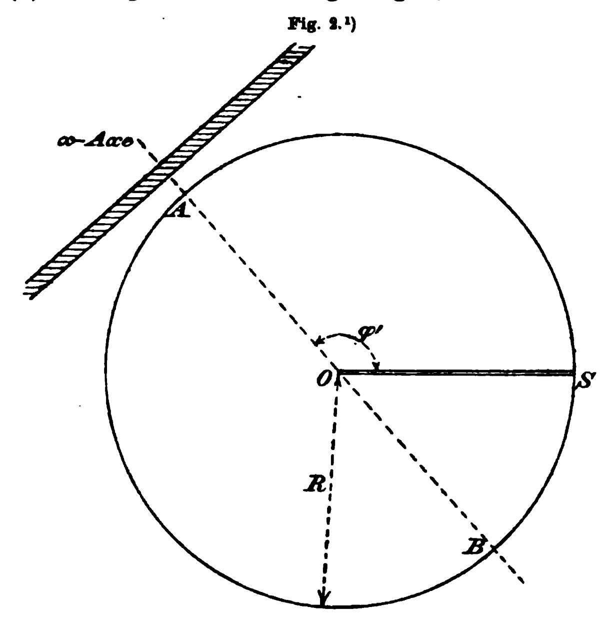
In der xy-Ebene bedeutet unser Zustand (3) eine Störung, welche (bei Zugrundelegung der vorstehenden Rechtecksform) auf einen schmalen, geradlinig begrenzten Streifen von der Breite λ senkrecht zur x-Axe beschränkt ist und welche sich mit Lichtgeschwindigkeit in der x-Richtung fortschiebt.

Bei Anwesenheit des Schirmes ist dieser „ebene Impuls" natürlich unmöglich; es handelt sich für uns gerade darum, die durch den Schirm bewirkte Modification desselben (die Beugung) zu berechnen. Den Anfangszustand aber können und wollen wir gerade so wählen, wie bei unserm ebenen Impuls. Seine Festlegung erfordert, dass wir v und $\frac{\partial v}{\partial t}$ für irgend einen Zeitpunkt, sagen wir für die weit zurückliegende Zeit $t = -T$, in dem von uns zu betrachtenden Theile der xy-Ebene (nämlich im Innern eines sogleich zu definirenden Kreises vom Radius R) geben. Dies soll nun so geschehn, dass wir verlangen:

$$\begin{cases} v = u_0 = f(x + Vt), \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} = Vf'(x + Vt), \end{cases} \quad \text{für} \quad t = -T. \tag{5}$$

Als Anfangszustand haben wir dann eine Störung, welche sich in der grossen Entfernung $x = VT$ von der Schirmkante befindet und welche auf einen schmalen Streifen senkrecht zur x-Axe beschränkt ist. Die positive x-Axe spielt bei dieser Festsetzung des Anfangszustandes die Rolle der „Einfallsrichtung" unseres ebenen Impulses, d. h. derjenigen Richtung, aus welcher die Störung herkommt, die negative x-Axe giebt diejenige Richtung an, in welcher sie sich ohne Formänderung fortpflanzen würde, wenn der Schirm nicht vorhanden wäre. Die Neigung der Einfallsrichtung gegen die Schirmebene OS kann an sich jede beliebige sein. Es ist aber bequem, dieselbe zwischen die Winkel $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ einzuschränken; sonst würde die Störung schon im Anfangszustande mit der Schirmebene collidiren und es würde die Bedingung (5) der früheren Bedingung (2) widersprechen. Man vgl. Fig. 2, wo dieses vermieden ist.

Fig. 2.[1])



Endlich haben wir noch eine Bedingung über das Verhalten von v in grosser Entfernung von der Schirmkante (auf einem Kreise von hinreichend grossem Radius $R > VT$) hinzuzufügen. Hier soll v von $-T$ bis $+T$ gegeben sein und zwar in folgender Weise: Man bezeichne mit A und B die Schnittpunkte der Einfallsrichtung (x-Axe) mit dem Kreise R. Dann sei

(6) $\quad v = u_0 = f(x + Vt)$ auf dem Bogen SAB, $\quad v = 0$ auf BS.

Mehr anschaulich ausgedrückt besagt unsere letzte Bedingung: Es soll während der Zeit zwischen $-T$ und $+T$ von dem Aeusseren des genannten

1) Der Streifen sollte eigentlich den Kreis schneiden, wegen $R > VT$.

Kreises her keine andere Störung in das Innere desselben eindringen, als diejenige, welche von Anfang an da war; der Radius des Kreises ist dabei so gross zu wählen, dass gewisse aus dem Innern (vom Schirmrande bez. von der Schirmoberfläche her) sich ausbreitende Störungen, welche wir später kennen lernen werden, in der Zeit $-T < t < +T$ noch nicht bis zur Kreisperipherie gelangt sind.

Es ist nun leicht aus den Bedingungen (1), (2), (5) und (6) auf die eindeutige Bestimmtheit unseres Problemes zu schliessen. Wir können dabei eine Gleichung benutzen, welche Kirchhoff[1]) nach den üblichen Green'schen Methoden beweist:

$$(7)\qquad \frac{d}{dt}\int\int\left(\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy=-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,ds.$$

Das Doppelintegral links erstreckt sich in unserem Falle auf das Innere des Kreises R, das Integral rechts auf die Peripherie desselben und auf beide Seiten der Schirmspur, soweit sie in's Innere des Kreises hineinreicht. φ soll, unter der Voraussetzung, dass es zwei Lösungen unseres Problems v_1 und v_2 gebe, gleich der Differenz derselben genommen werden. Nun verschwinden nach (2) entweder v_1, v_2 also auch φ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ auf beiden Seiten des Schirmes, oder es verschwindet daselbst $\frac{\partial v_1}{\partial n}$ und $\frac{\partial v_2}{\partial n}$ also auch $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$. Auf dem Kreise R ferner wird $v_1 = v_2 = f(x+Vt)$ bez. $v_1 = v_2 = 0$ und daher $\varphi = 0$ für $-T < t < +T$; mithin ist auf diesem Kreise $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$. Die rechte Seite von (7) verschwindet also; wir können daher integriren und erhalten:

$$\int\int\left(\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right)dx\,dy=C,$$

Die Constante C kann aus dem Anfangszustande ($t=-T$) berechnet werden; für diesen ist aber nach (5) $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ sowohl wie φ und also auch $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ im Innern des Kreises R überall gleich Null. Somit ergiebt sich $C=0$ und des Weiteren für alle t zwischen $-T$ und $+T$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \quad \text{d. h.} \quad \varphi=0.$$

---

1) Mechanik, 23te Vorlesung, § 1. Die Gleichung ist im Text für 2 statt für 3 Dimensionen hingeschrieben. [Zusatz bei der Correctur: Inzwischen hat Herr H. Weber einen sehr allgemeinen und einfachen Beweis für die eindeutige Bestimmtheit der Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen gegeben, durch den die obigen Ausführungen abgekürzt werden können. Vgl. Partielle Diffgl. der Physik § 156, p. 390. Braunschweig 1900].

Es giebt also sicher *nur eine* Lösung unseres Problems. Dass es *überhaupt eine* Lösung giebt, wird sich im § 4 zeigen, wo wir eine den sämmtlichen Bedingungen (1), (2), (5) und (6) genügende Function angeben werden.

§ 3.

Uebergang zu den verzweigten Lösungen der Differentialgleichung.

Die Function des „ebenen Impulses“ (Gl. (3)) genügt bereits den Bedingungen (1) und (5). Um auch die Grenzbedingungen (2) und (6) zu befriedigen, werden wir zunächst eine verzweigte Lösung der Differentialgleichung (1) aufstellen, mit deren Hülfe sich das ursprüngliche Problem durch ein einfaches Spiegelungsverfahren erledigen lässt.

Wir betrachten statt der schlichten Ebene von Fig. 2 eine *zweiblättrige Riemann'sche Fläche*, welche im Punkte $x = y = 0$ und nur in diesem einen *einfachen Verzweigungspunkt* hat. Von der Spur des Schirmes aus rechnen wir einen Winkel φ, welcher zusammen mit der vom Verzweigungspunkte aus gerechneten Entfernung r die Punkte der Fläche unterscheidet. φ variirt dabei zwischen -2π und $+2\pi$; die eine Seite des Schirmes ist durch $\varphi = 0$, die andere durch $\varphi = \pm 2\pi$ gegeben. Der vorher definirten Einfallsrichtung (positive x-Axe) komme der Winkel φ' zu. Die Halbstrahlen $\varphi = \varphi' + \pi$ und $\varphi = \varphi' - \pi$ mögen die *Schattengrenzen* heissen. Offenbar haben auf unserer Fläche zwei Halbstrahlen als verschieden zu gelten, wenn sich die zugehörigen Winkel φ um 2π, als gleich, wenn sie sich um 4π unterscheiden.

Der kürzeren Ausdrucksweise wegen ist es gut, die Fläche in zwei Blätter zerlegt zu denken. Die Grenzen beider sollen die Schattengrenzen $\varphi - \varphi' = \pm\pi$ sein. Wir bezeichnen als *oberes Blatt* denjenigen Theil der Riemann'schen Fläche, für welchen $|\varphi - \varphi'| < \pi$, als *unteres* denjenigen, für den $|\varphi - \varphi'| > \pi$ ist.

Wir wollen nun auf unserer Riemann'schen Fläche in der Richtung φ' des oberen Blattes einen „ebenen Impuls“ einfallen lassen und wollen zusehn, wie sich dieser auf der Fläche zeitlich ausbreitet. Indem wir dieses Problem, welches sogleich näher präcisirt werden soll, an die Stelle des im vorigen Paragraphen gestellten Problems substituiren, gehen wir von der *durch die Schirmspur begrenzten einfachen Ebene*, in welcher wegen der Begrenzung die Bedingungen (2) zu erfüllen waren, zu der *unbegrenzten Doppelebene* (unserer Riemann'schen Fläche) über, bei welcher derartige Grenzbedingungen in Fortfall kommen; wir erzielen damit eine bedeutende mathematische Vereinfachung.

Genauer formulirt soll unser Problem dieses sein: *Wir suchen eine Function u von r und φ, welche*

(I) *auf der Riemann'schen Fläche*

(d. h. für $0 < r < \infty$ und $-2\pi < \varphi < +2\pi$)

endlich, stetig und eindeutig ist, welche also speciell in der Variabeln φ die Periode 4π besitzt, welche

(II) *auf der ganzen Riemann'schen Fläche* (mit Ausnahme des Windungspunktes selbst) *die Differentialgleichung* (1) *erfüllt, welche*

(III) *für $t = -T$ und $r < R$ den Anfangsbedingungen*

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} \text{ im oberen Blatte,}$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{„ unteren „}$$

genügt, und welche endlich

(IV) *für $r = R$ und $-T < t < +T$ die Gleichungen befriedigt:*

$$u = u_0 \text{ im oberen Blatte,}$$

$$u = 0 \quad \text{„ unteren „ ,}$$

wobei R eine Länge bedeutet, die grösser als VT zu wählen ist.

Die Bedingungen (III) und (IV) entsprechen genau den früheren Bedingungen (5) und (6), soweit sie sich auf das obere Blatt beziehen. Sie besagen, dass nur in diesem Blatt eine anfängliche Störung u_0 vorhanden sein soll und dass weder in diesem noch in dem unteren Blatte während der Folgezeit $-T < t < +T$ vom Unendlichen her eine neue Störung erscheint. (Würden wir dieselben Bedingungen wie für das obere auch für das untere Blatt stellen, so würden wir auf die Function u_0 des ebenen Impulses zurückfallen, welche dann allen Bedingungen (I) bis (IV) genüge leistete).

Die so definirte Function u spielt für unsere Riemann'sche Fläche dieselbe Rolle wie die Function u_0 für die schlichte Ebene. Wir können sie daher etwa die *„Function des verzweigten ebenen Impulses“* nennen. Es handelt sich nun darum, dieselbe, ausgehend von der Function u_0, aufzubauen.

Bemerken wir zunächst, dass der Ausdruck von u_0 in Polarcoordinaten (vgl. Fig. 2) dieser ist:

$$u_0 = f(r \cos(\varphi - \varphi') + Vt).$$

Offenbar wird wegen der Willkürlichkeit der Einfallsrichtung φ' ebenso wie diese Function, auch jeder Ausdruck von der Form

$$(8) \qquad \int f(r \cos(\varphi - \alpha) + Vt)\, F(\alpha)\, d\alpha$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1). Dabei kann die Integrationsvariable α auch auf complexem Wege in einer „α-Ebene“ geführt werden, falls, was wir voraussetzen wollen, f und F für complexe Werthe des Argumentes definirt sind. Insbesondere erhalten wir nach dem Cauchy'schen Satze direct unsere frühere Lösung u_0 wieder, wenn wir als

Integrationsweg eine die Stelle $\alpha = \varphi'$ umschliessende Curve wählen und $F(\alpha)$ gleich

$$\frac{1}{2\pi i} F_1(\alpha, \varphi')$$

nehmen, wo $F_1(\alpha, \varphi')$ für $\alpha = \varphi'$ mit dem Residuum 1 unendlich wird. Wir können z. B. setzen, indem wir F_1 hinsichtlich der Variabeln α und φ' mit der Periode 2π ausstatten:

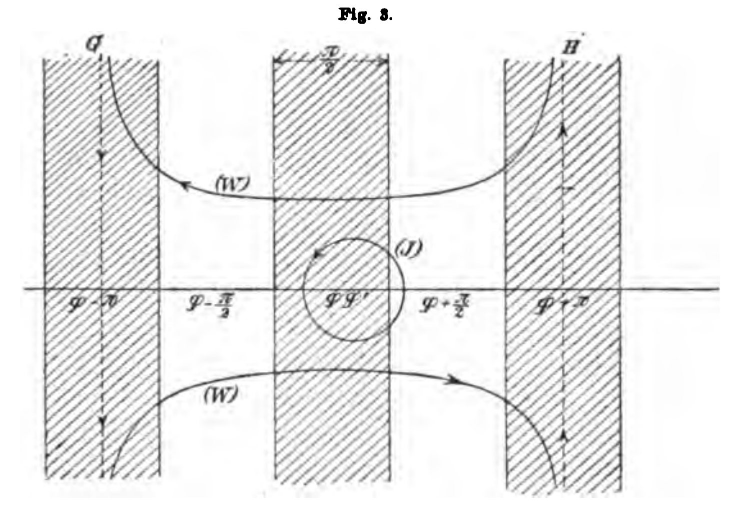
$$F_1(\alpha, \varphi') = \frac{i e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}},$$

dann erhalten wir:

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(r\cos(\varphi - \alpha) + Vt) \frac{e^{i\alpha}\, d\alpha}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi'}}. \tag{9}$$

Der Integrationsweg ist aus der nebenstehenden Figur ersichtlich (Weg J).

Fig. 3.



Derselbe kann beliebig verzerrt werden, nur muss man darauf achten, dass er über keinen singulären Punkt des Integranden herübergezogen wird und dass, falls er in's Unendliche auslaufen soll, die Function f daselbst in einer für die Convergenz des Integrals hinreichenden Weise verschwindet. Hier kommt es also auf die besondere analytische Beschaffenheit von f an; wir wollen uns daher f zunächst durch die Gleichung (4) gegeben denken und haben dabei den Vortheil, dass f im Endlichen der α-Ebene nirgends singulär wird.

Wir setzen $\alpha = a + ib$ und lassen b positiv unendlich werden. Dann ist, wenn wir nur die wesentlichen Terme hinschreiben (bei endlichem r und t):

$$r\cos(\varphi - \alpha) + Vt = e^b \left(\frac{1}{2} r e^{i(\varphi - a)} + \cdots\right)$$

und

$$f(r\cos(\varphi - \alpha) + Vt) = e^{-k^2 e^{2b}\left(\frac{r^2}{4}\cos 2(\varphi - a) + \frac{ir^2}{4}\sin 2(\varphi - a) + \cdots\right)}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $b = +\infty$, wenn $\cos 2(\varphi - a) > 0$ ist, d. h. wenn $\varphi - a$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ oder zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und $\frac{5\pi}{4}$ oder zwischen $-\frac{3\pi}{4}$ und $-\frac{5\pi}{4}$ etc. liegt. Dieselbe Bedingung für $\varphi - a$ finden wir, wenn wir b negativ unendlich werden lassen. Markiren wir uns also auf der reellen Axe der α-Ebene die Stellen $\varphi - \alpha = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}$ etc. und ziehen durch sie Parallelen zur imaginären Axe, so zerlegt sich die α-Ebene in ein System von Streifen von der Breite $\frac{\pi}{2}$, die wir abwechselnd schraffiren und frei lassen wollen. Die schraffirten Streifen sind dadurch ausgezeichnet, dass im Unendlichen derselben $f(r\cos(\varphi - \alpha) + Vt)$ verschwindet, die nicht-schraffirten dadurch, dass f hier in unendlicher Entfernung unendlich wird. Der Integrationsweg muss nun, wo er sich in's Unendliche erstreckt, auf *schraffirtem* Gebiete verlaufen.

Der Weg J ist offenbar äquivalent mit den beiden beiderseitig in's Unendliche auslaufenden Schlingen W; denn er kann deformirt werden in die beiden Schlingen W und die beiden Verbindungslinien G und H, jede derselben in dem aus Fig. 3 ersichtlichen Sinne durchlaufen. Die Integrale über G und H zerstören sich aber gegenseitig, weil der Integrand in α die Periode 2π hat und weil G und H so gezogen werden können, dass sie durch eine Verschiebung um $\pm 2\pi$ in einander übergehen, mithin (bei Berücksichtigung des entgegengesetzten Durchlaufungssinnes) entgegengesetzt gleiche Integralwerthe liefern. Wir können also in (9) statt über J über die beiden Theile von W integriren.

Alles Bisherige war nur eine identische Umformung des uns wohlbekannten Ausdrucks u_0, welche wir lediglich zu dem Zwecke vorgenommen haben, um nun mit Leichtigkeit von der in der schlichten xy-Ebene eindeutigen Lösung u_0 zu einer auf unserer Riemann'schen Fläche eindeutigen, in der Ebene zweideutigen Lösung u übergehen zu können. Wir wollen nämlich die vorher mit $F_1(\alpha, \varphi')$ bezeichnete Function jetzt so definiren, dass sie in α und φ' die Periode 4π hat und dass sie abermals für $\alpha = \varphi'$ von der ersten Ordnung mit dem Residuum 1 unendlich wird. Wir können dann setzen

$$F_1(\alpha, \varphi) = \frac{i}{2} \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\varphi'}{2}}};$$

dementsprechend betrachten wir statt (9) die neue Function

$$(10) \qquad u = \frac{1}{4\pi} \int f(r\cos(\varphi - \alpha) + Vt) \frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{e^{\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\varphi'}{2}}} d\alpha,$$

indem wir die Integration wie vorher über den Weg W erstrecken. Wir behaupten, dass diese Function u die im Anfang dieses Paragraphen gesuchte Lösung ist, und gehen zum Beweise die dort gestellten Forderungen der Reihe nach durch.

Zunächst genügt u der Differentialgleichung (1) (Bedingung II), da ja die rechte Seite von (10) unter den allgemeinen Ausdruck (8) fällt.

Sodann ist u auf unserer Riemann'schen Fläche eindeutig; denn wenn man φ successive in $\varphi + 4\pi$ übergehen lässt, wenn man also auf der Riemann'schen Fläche einen vollen Umlauf um den Verzweigungspunkt macht, verschiebt sich der Weg W in der α-Ebene continuirlich um 4π nach rechts. Der Werth des Integranden auf dem so verschobenen Wege ist aber derselbe, wie auf dem ursprünglichen Wege, weil der Integrand in α die Periode 4π, in φ sogar die Periode 2π hat. Dass u für alle Werthe von r und φ (auch für den Verzweigungspunkt $r = 0$) endlich und stetig ist, ist leicht einzusehen. Somit ist auch die Bedingung (I) erfüllt und es bleiben nur noch die Bedingungen (III) und (IV) zu betrachten.

Wir sprechen zunächst von dem „unteren Blatte" $|\varphi - \varphi'| > \pi$ unserer Riemann'schen Fläche, und bemerken, dass, wenn φ zu einem Halbstrahl des unteren Blattes gehört, die Unendlichkeitsstelle $\alpha = \varphi'$ in der α-Ebene ausserhalb des von den Geraden G und H abgeschnittenen Stückes der reellen Axe liegt (s. Fig. 3). Die Geraden G und H schneiden nämlich die reelle Axe, wie aus der obigen Construction der schraffirten und nichtschraffirten Streifen hervorgeht, in den Punkten $\alpha = \varphi \mp \pi$; läge also der Punkt $\alpha = \varphi'$ innerhalb der durch diese Punkte begrenzten Strecke, so wäre

$$\varphi - \pi < \varphi' < \varphi + \pi$$

oder $|\varphi - \varphi'| < \pi$, was nur im oberen Blatte der Fall ist. Der ganze Raum zwischen den Geraden G und H und den beiden Schlingen W ist also frei von Singularitäten.

Dementsprechend können wir die Schlingen W längs der reellen Axe mit einander verschmelzen. Dabei heben sich die in entgegengesetztem Sinne geführten Integrationen längs der reellen Axe auf und es bleiben als Integrationsweg nur die Geraden G und H übrig, welche entgegen den in Fig. 3 beigesetzten Pfeilen zu durchlaufen sind.

Es ist aber längs G und H

$$\alpha = \varphi \mp \pi + ib \quad \text{oder} \quad \varphi - \alpha = \pm \pi - ib$$

also

$$\cos(\varphi - \alpha) = -\cos ib;$$

b ist dabei unsere nunmehrige Integrationsvariable; sie läuft auf G von

$-\infty$ bis $+\infty$, auf H von $+\infty$ bis $-\infty$. Fassen wir die beiden Integrale G und H in Eins zusammen, so können wir nach einer kleinen Rechnung schreiben:

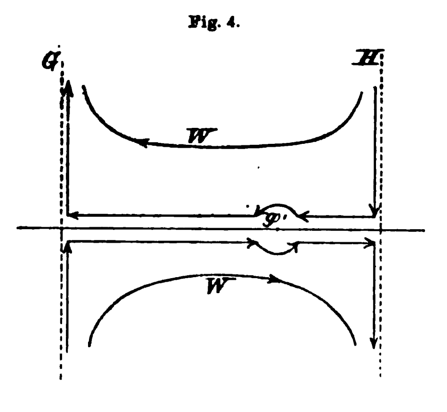
$$(11)\qquad u = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-r\cos ib + Vt)\frac{db}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'+ib)}.$$

Wir sind somit von dem ursprünglichen complexen zu einem reellen Integrationsweg übergegangen. Um die Realität des Ausdrucks besser hervortreten zu lassen, können wir statt (11) auch schreiben:

$$(12)\quad u = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'+ib)}+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'-ib)}\right\}db.$$

Die entsprechende Umformung machen wir jetzt für das obere Blatt, indem wir annehmen, dass $|\varphi-\varphi'|<\pi$ sei. Wir sahen bereits, dass bei einem solchen Werthe von φ der singuläre Punkt $\alpha=\varphi'$ zwischen den Geraden G und H liegt. Wollen wir also die beiden Schlingen W in die Geraden G und H überführen, so bleibt ausser diesen als Integrationsweg eine Umlaufung des Punktes $\alpha=\varphi'$ übrig (vgl. Fig. 4). Die Integration über die diesen letzteren Punkt umgebende Curve ist aber nach dem Cauchy'schen Satze sofort auszuführen; sie liefert als Integralwerth das Residuum des Integranden für $\alpha=\varphi'$, nämlich

Fig. 4.



$$f(r\cos(\varphi-\varphi') + Vt) = f(x+Vt) = u_0.$$

Fassen wir ferner die Integrale über G und H, wie oben beschrieben, zusammen, so erhalten wir *für Punkte des oberen Blattes:*

$$(11')\qquad u = u_0 - \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(-r\cos ib + Vt)\frac{db}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'+ib)}$$

oder auch

$$(12')\quad u = u_0 - \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'+ib)}+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\varphi-\varphi'-ib)}\right\}db.$$

Für die Uebergangslinien vom einen zum anderen Blatt, d. h. für die Schattengrenzen $\varphi-\varphi'=\pm\pi$ werden diese Umformungen offenbar

illusorisch, weil dann (aber auch nur dann) der Nenner des Integranden verschwinden kann; es wird nämlich für $\varphi - \varphi' = \pm \pi$ und $b = 0$:

$$\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi' \pm ib) = \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

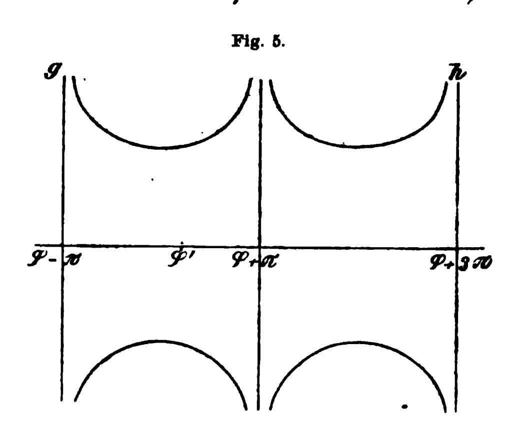
Für diese Linien lässt sich aber ein besonders einfacher Ausdruck von u folgendermassen ermitteln.

Man betrachte die Summe $u(r, \varphi) + u(r, \varphi + 2\pi)$, d. h. die Summe der Werthe von u in irgend zwei übereinander liegenden Punkten der Riemann'schen Fläche. Da für den einen dieser Punkte Gl. (11), für den anderen Gl. (11') gültig ist, und da $\cos \frac{1}{2} (\varphi - \varphi' + ib)$ bei Vermehrung von φ um 2π das Vorzeichen wechselt, so ergiebt sich:

(13) $$u(r, \varphi) + u(r, \varphi + 2\pi) = u_0.$$

Dieselbe Beziehung kann man aus der allgemeingültigen Darstellung (10) auch so ableiten: Da sich der Integrationsweg W in der α-Ebene mit wachsendem φ seitlich verschiebt, so schliessen sich die beiden Wege für $u(r, \varphi)$ und $u(r, \varphi + 2\pi)$ gerade aneinander an. Die Summe $u(r, \varphi) + u(r, \varphi + 2\pi)$ wird also durch Integration über die beiden Schlingenpaare W der nebenstehenden Figur erhalten. Man kann diesen Weg durch Hinzufügung der beiden Geraden g und h zu einem geschlossenen ergänzen; die letzteren liefern nämlich keinen Beitrag zum Integral, da sie um 4π von einander abstehen und die Function unter dem Integral die Periode 4π hat. Der nunmehrige geschlossene Weg kann aber auf die einzige Singularität in seinem Innern, auf den Punkt $\alpha = \varphi'$ zusammengezogen werden. Er liefert dann nach dem Cauchy'schen Satz den Integralwerth u_0[1]), was mit der vorigen Gleichung (13) übereinstimmt.

Fig. 5.



Ferner geht sowohl aus der Problemstellung wie aus unsern Formeln hervor, dass unsere Function rechts und links von der Einfallsrichtung in symmetrisch gelegenen Punkten dieselben Werthe aufweisen muss, dass sie also nur von $|\varphi - \varphi'|$ abhängen kann. Es muss also im Besondern sein:

$$u(r, \varphi' + \pi) = u(r, \varphi' - \pi).$$

1) Diese Ueberlegung habe ich der oben cit. Arbeit von Herrn Carslaw entnommen.

Setzen wir andrerseits in Gleichung (13) $\varphi = \varphi' - \pi$, so ergiebt sich

$$u(r, \varphi' - \pi) + u(r, \varphi' + \pi) = u_0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen aber folgt:

$$(14) \qquad u(r, \varphi' - \pi) = u(r, \varphi' + \pi) = \frac{1}{2} u_0;$$

oder in Worten:

Auf den beiden Schattengrenzen ist der Werth von u gleich der Hälfte desjenigen Werthes, den der einfallende Impuls an der betr. Stelle zu der betr. Zeit haben würde, wenn keine Verzweigung stattfände.

Wir zeigen nun auf Grund der Gleichungen (12) und (12'), dass die Bedingungen (III) und (IV) in der That erfüllt sind.

Setzen wir nämlich in (12) $t = -T$, so tritt der (absolut genommen) kleinste Werth, den das Argument von f annehmen kann, für $b = 0$ ein. Er ist $r + VT$, d. h. eine Zahl, die durch Hinausschieben der Anfangszeit T beliebig gross gemacht werden kann. Wir setzen aber voraus, dass f nur für ganz wenig von Null verschiedene Argumentwerthe merklich von Null verschieden ist (s. Fig. 1 oder Gl. (4)); also hat f während der Integration nach b fortgesetzt den Werth Null. Somit wird für $t = -T$ das Integral in (12) gleich Null. Dasselbe gilt von dem in (12') vorkommenden Integral, sowie von den Ableitungen dieser Integrale nach t. Die rechte Seite von Gleichung (12') reducirt sich daher für $t = -T$ auf das erste Glied und liefert

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t},$$

während Gleichung (12), wie soeben bemerkt wurde, für $t = -T$ besagt:

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Dies sind aber die für das obere bez. untere Blatt vorgeschriebenen Bedingungen (III).

Setzen wir andrerseits $r = R$, so liegen die Verhältnisse ganz ähnlich. Der absolut kleinste Werth, den das Argument von f in (12) während der Dauer der Integration annimmt, tritt wieder für $b = 0$ ein und ist gleich $-R + Vt$. Dies ist, da wir R als erheblich grösser wie VT voraussetzten, eine grosse negative Zahl, solange t zwischen $-T$ und $+T$ enthalten ist. Also verschwindet f sowie die Integrale in (12) und (12') und wir haben für $r = R$ und $-T < t < +T$

$$u = u_0 \text{ im oberen, } u = 0 \text{ im unteren Blatte,}$$

wie es die Bedingung (IV) verlangt.

In unserer Function u haben wir also wirklich die gesuchte Function des „verzweigten ebenen Impulses“ vor uns. Die Darstellung (10) derselben ist für die Kenntniss der allgemeinen Eigenschaften (Continuität etc.)

besonders bequem. Die Darstellungen (12) und (12'), zu denen wir der Vollständigkeit halber noch Gleichung (14) hinzunehmen können, eignen sich mehr für die geometrische Deutung und numerische Discussion, weshalb wir in der Folge an diese anknüpfen werden.

Die letzteren Formeln empfehlen sich noch aus einem anderen Grunde. Bei der Ableitung der Function u und bei ihrer Darstellung durch (10) benutzten wir die Werthe von f mit complexem Argument, weshalb wir f in der speciellen Form (4) voraussetzen mussten. In den Schlussresultaten kommen nur reelle Argumentwerthe von f vor. Diese Resultate sowie der Nachweis, dass den Bedingungen von pag. 23 genügt wird, sind von jener speciellen Annahme über f unabhängig. Wir können daher f jetzt wieder als willkürliche, etwa durch die Figur 1 gegebene Function ansehen, ohne ihr Verhalten im complexen Gebiete in Betracht zu ziehen.

§ 4.

Erledigung des ursprünglichen Problems Vereinfachung der Lösung beim schwarzen Körper.

Gehen wir nun auf das Problem des § 2 zurück.

Man wird geneigt sein, die einfache Grenzbedingung (2) durch das bekannte *Spiegelungs*verfahren zu erfüllen. Indem man zu dem einfallenden Impuls den in Bezug auf die Schirmebene spiegelbildlichen Impuls, sei es mit negativem, sei es mit positivem Vorzeichen, hinzufügt, erhält man eine Function v, welche bei dem Uebergange von der rechten zur linken Seite des Schirmes nur ihr Vorzeichen verändert oder überhaupt ungeändert bleibt. Im ersteren Fall muss dann offenbar v selbst, im anderen $\frac{\partial v}{\partial n}$ auf dem Schirm verschwinden.

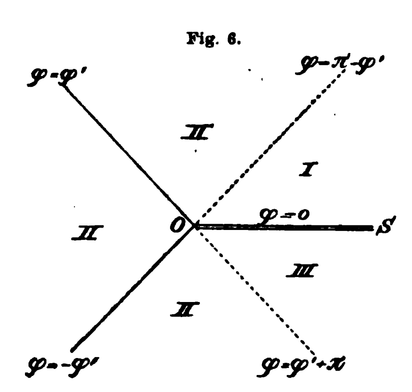
Wollte man nun bei diesem Spiegelungsverfahren den unverzweigten Impuls u_0 zu Grunde legen, indem man setzt:

$$v = u_0(\varphi') - u_0(-\varphi') \quad \text{bez.} \quad v = u_0(\varphi') + u_0(-\varphi')$$

(wobei in der Schreibweise von u_0 nur die Abhängigkeit von dem Einfallswinkel φ', nicht die von r und φ in Evidenz gesetzt ist), so würde man die Schwierigkeit haben, dass man ausser dem aus der Richtung φ' kommenden Impuls, welcher den Bedingungen unseres Problems entspricht, einen zweiten aus der Richtung $-\varphi'$ oder, was bei dem unverzweigten Impuls auf dasselbe hinauskommt, aus der Richtung $2\pi - \varphi'$ kommenden Impuls schafft, welcher unsern früheren Bedingungen, speciell den Anfangsbedingungen, widerspricht. Gleichzeitig würde man dabei übrigens nicht nur längs des Schirmes sondern auch in der Verlängerung

desselben die Erregung v bez. ihren normalen Differentialquotienten zum Verschwinden bringen.

Diese Schwierigkeit überwinden wir nun, wenn wir bei unserem Spiegelungsverfahren den verzweigten ebenen Impuls u benutzen, also setzen, je nachdem v die elektrische oder die magnetische Kraftcomponente parallel der Schirmkante bedeuten soll:



$$(15)\qquad \begin{array}{c} v = u(\varphi') - u(-\varphi') \\ \text{bez.} \\ v = u(\varphi') + u(-\varphi'). \end{array}$$

Um diese Formeln etwas näher zu discutiren, wollen wir zunächst die Riemann'sche Fläche in anderer Weise in zwei Blätter zerlegen, wie im vorigen Paragraphen. Das eine Blatt soll alle Halbstrahlen $0 < \varphi < 2\pi$, das andere die Halbstrahlen $-2\pi < \varphi < 0$ enthalten. Das erstere heisse das „physikalische", das zweite das „Hülfsblatt". Die Grenzen, in denen beide zusammenstossen, sind die beiden Seiten des Schirmes. Für das in Rede stehende Problem interessirt uns nur das Verhalten von v im physikalischen Blatt; das andere Blatt ist, wie schon der Name besagt, eine mathematische Fiction.

Nun liegt die Richtung $-\varphi'$ im Hülfsblatte; im physikalischen Blatte haben wir für $t = -T$ nur die aus der Richtung $+\varphi'$ kommende „einfallende" Störung; die aus der Richtung $-\varphi'$ kommende „reflectirte" Störung ist durch Verlegung in's zweite Blatt sozusagen unschädlich gemacht. Der Anfangszustand ist also der durch (5) vorgeschriebene; dass auch die anderen Bedingungen (1), (2) und (6) erfüllt sind, ist klar. Das Problem des § 2 ist also gelöst.

Bei der Berechnung von $u(\varphi')$ und $u(-\varphi')$ wird man die Formeln (12) und (12') zu Grunde legen. Wir wollen überlegen, wann die eine und wann die andere gilt. Zu dem Zwecke ziehen wir die Verlängerungen der Halbstrahlen φ' und $-\varphi'$, d. h. die Halbstrahlen $\pi + \varphi'$ und $\pi - \varphi'$, welche wir nach Früherem als Schattengrenzen bezeichnen und zwar die erstere als Schattengrenze des einfallenden, die letztere als Schattengrenze des reflectirten Impulses. Dieselben zerlegen das physikalische Blatt in die folgenden drei Gebiete:

$$\begin{array}{lrl} \text{Gebiet} & \text{I:} & 0 < \varphi < \pi - \varphi', \\ \text{„} & \text{II:} & \pi - \varphi' < \varphi < \pi + \varphi', \\ \text{„} & \text{III:} & \pi + \varphi' < \varphi < 2\pi. \end{array}$$

Denken wir an die frühere Zerlegung der Riemann'schen Fläche in ein oberes und ein unteres Blatt, so erkennen wir leicht, dass das Gebiet I auf dem oberen Blatte sowohl der zu $u(\varphi')$ wie der zu $u(-\varphi')$ hinzuzuconstruirenden Riemann'schen Fläche liegt, dass das Gebiet III zu dem unteren Blatte dieser beiden Flächen gehört und dass das Gebiet II hinsichtlich $u(\varphi')$ auf dem oberen, hinsichtlich $u(-\varphi')$ auf dem unteren Blatte gelegen ist. In der That gilt z. B. im Gebiete II nach der obigen Definition desselben

$$\begin{aligned}&\varphi-\varphi'<\pi \text{ (oberes Blatt der Fläche von } u(\varphi'),\\&\varphi+\varphi'>\pi \text{ (unteres } \;,,\; \;,,\; \;,,\; \;,,\; u(-\varphi').\end{aligned}$$

Da nun im unteren Blatte die Formel (12), im oberen die Formel (12') zu benutzen ist, so erhalten wir folgendes Schema der für unsere drei Gebiete in Betracht kommenden Darstellungen:

	$u(\varphi')$	$u(-\varphi')$
I	(12')	(12')
II	(12')	(12)
III	(12)	(12) .

Führen wir noch die Abkürzung ein

$$(16)\qquad U(\pm\varphi') = -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty f(-r\cos ib+Vt)\left\{\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\varphi\mp\varphi'+ib)}+\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(\varphi\mp\varphi'-ib)}\right\}db,$$

so können wir die Gleichungen (15) für unsere drei Gebiete zusammenfassend so schreiben:

$$(17)\qquad\begin{cases}\text{In I:} & v=u_0(\varphi')+U(\varphi')\mp(u_0(-\varphi')+U(-\varphi')),\\ \;,,\;\text{II:} & v=u_0(\varphi')+U(\varphi')\mp U(-\varphi'),\\ \;,,\;\text{III:} & v=U(\varphi')\mp U(-\varphi').\end{cases}$$

Die Ausdrücke $U(\varphi')$ und $U(-\varphi')$ bedeuten die durch den Schirm hervorgebrachten Modificationen des ursprünglichen einfallenden und des reflectirten Impulses $u(\varphi')$ und $u(-\varphi')$: sie mögen daher als gebeugte Impulse bezeichnet werden. Daraufhin werden wir die Gleichungen (17) folgendermassen umschreiben dürfen: *Im Gebiete I haben wir einen einfallenden, einen reflectirten und gebeugte Impulse, im Gebiete II ausser den gebeugten den einfallenden Impuls, im Gebiete III lediglich gebeugte Impulse.*

Während der reflectirte Impuls eine Erregung von genau derselben Grösse wie der einfallende Impuls darstellt, sind die gebeugten Impulse

$U(\varphi')$ und $U(-\varphi')$, wie wir sehen werden, im Allgemeinen ausserordentlich klein gegen den einfallenden. Im Gebiete III kommen also nur sehr kleine Störungen des Gleichgewichtes vor; dieses Gebiet kann daher als *Schattengebiet* bezeichnet werden. Das Gebiet II, in welches von der reflectirten Störung nur der gebeugte Theil hineingelangt, könnte etwa *Halbschattengebiet* oder *halbbestrahltes Gebiet* heissen, während das Gebiet I als *vollbestrahltes* d. h. sowohl von dem einfallenden wie von dem reflectirten Impuls getroffenes Gebiet bezeichnet werden kann.

Die durch (17) dargestellte Lösung weicht nun aber in einem wesentlichen Punkte von der Wirklichkeit ab, nämlich in dem Vorhandensein der reflectirten Störung. Wie in § 1 angegeben, verhält sich den Röntgenstrahlen gegenüber jedes undurchlässige Mittel wie ein schwarzer Körper. Wir werden daher jetzt den dort besprochenen Uebergang von dem bisher vorausgesetzten absolut reflectirenden zu dem absolut schwarzen Körper machen. Dies geschieht einfach, indem wir in den Gleichungen (15) den reflectirten Term $u(-\varphi')$ streichen und jene Formel durch die folgende, gleichmässig für die elektrische und magnetische Kraftcomponente, giltige ersetzen:

$$v = u(\varphi'). \tag{18}$$

Nehmen wir dieselbe Aenderung in den ausführlicheren Gleichungen (17) vor, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \text{In I + II:} & v = u_0(\varphi') + U(\varphi'), \\ \;\;\text{,,} \quad \text{III:} & v = U(\varphi'). \end{cases} \tag{19}$$

Wir haben also jetzt nur noch zwei Gebiete zu unterscheiden, das „Schattengebiet“ III und das „bestrahlte“ I + II. Im ersteren haben wir nur gebeugte, im letzteren einfallende und gebeugte Strahlung. Für die Grenze beider, d. h. für die Schattengrenze $\varphi = \varphi' + \pi$ gilt nach (14) die einfachere Formel

$$v = \frac{1}{2} u_0(\varphi'). \tag{20}$$

Unsere nunmehrige Lösung genügt zwar den Bedingungen (1), (5) und (6) des ursprünglichen Problems, aber nicht den Gleichungen (2). Statt der letzteren Bedingung, welche eine vollständige Reflexion an der Schirmoberfläche zur Folge hatte, wird von unserer nunmehrigen Lösung die Bedingung erfüllt, dass die Strahlung zwar in das Innere des Schirmes eindringt, aber dass keine Strahlungsenergie von dort austritt. Die Strahlung tritt eben an der Schirmoberfläche aus dem physikalischen Blatte in das Hülfsblatt über und geht so für das physikalische Blatt verloren.

Natürlich kommt für unser physikalisches Problem nur ein Ausschnitt aus dem gesammten Werthevorrath der verzweigten Function $u(\varphi')$ in

Frage, nämlich nur das physikalische Blatt derselben. Wie dieser Ausschnitt vorzunehmen ist, d. h. wie die Abgrenzung zwischen dem physikalischen und dem Hülfsblatt zu erfolgen hat, hängt von der Lage des Schirmes gegen die Einfallsrichtung ab. Bei alleiniger Betrachtung des physikalischen Blattes erleidet unsere Lösung beim Durchgange durch den Schirm offenbar eine Discontinuität, die aber physikalisch belanglos ist, da die Aethererregung auf der einen Seite des Schirmes mit der auf der anderen Seite nichts direct zu thun hat. Die analytische Fortsetzung der Werthe von $u(\varphi')$ treffen wir ja beim Durchgange durch den Schirm nicht auf der andern Seite im physikalischen sondern im Hülfsblatte an.

Man kann noch bemerken, dass bei einer Drehung des Schirmes um seine Kante unsere jetzige Lösung vollständig ungeändert bleibt, ausser in denjenigen Partien der Ebene, welche dabei aus dem beschatteten in das bestrahlte Gebiet oder umgekehrt übertreten. Dies trifft für unsere frühere Lösung (15) nicht zu, entspricht aber vollständig der physikalischen Vorstellung, die wir uns von der Wirkung eines schwarzen Körpers machen. Bei einer Drehung des Schirms wird eben nur die Abgrenzung zwischen den physikalisch in Betracht kommenden und den mathematisch fingirten Werthen unserer Lösung, nicht aber diese Lösung selbst abgeändert.

§ 5.

Verallgemeinerung für mehrblättrige Riemann'sche Flächen.

Wenn es nur darauf ankommt, die Strahlung aus dem physikalischen Blatt längs des Schirmes verschwinden zu lassen, können wir ersichtlich statt *eines* Hülfsblattes auch *einen ganzen Cyklus* solcher Blätter an das physikalische Blatt anhängen. Wir werden sogar vermuthen dürfen, dass wir der Vorstellung eines schwarzen Körpers um so mehr entsprechen, je mehr solcher Hülfsblätter wir benutzen. Denn die aus dem physikalischen Blatt austretende Strahlung wird um so vollständiger für dieses verloren gehn und sich um so schwerer in dasselbe zurückfinden, je mehr Raum wir ihr zur Ausbreitung ausserhalb desselben darbieten. Die hiermit gegebenen verschiedenen Möglichkeiten kennzeichnen deutlich die Unbestimmtheit, welche in unser Problem durch den Begriff des schwarzen Körpers hereingebracht wird (vgl. § 1).

Um diese Möglichkeiten analytisch zu beleuchten, verallgemeinern wir die im dritten Paragraphen gelöste Aufgabe, wie folgt:

Wir betrachten statt der zweiblättrigen eine *n-blättrige Riemann'sche Fläche*, welche im Anfangspunkte $r = 0$ und nur in diesem einen Windungspunkt von der n^{ten} Ordnung besitzt. Auf derselben unterscheiden

wir ein oberes und $n-1$ untere Blätter. Ersteres enthalte die Einfallsrichtung $\varphi = \varphi'$ und sei durch die Bedingung abgegrenzt $|\varphi - \varphi'| < \pi$. Die übrigen Blätter, welche von $\varphi = \varphi' + \pi$ bis $\varphi = \varphi' + 3\pi$, von $\varphi = \varphi' - \pi$ bis $\varphi = \varphi' - 3\pi$ etc. reichen mögen, sind durch die Bedingung $|\varphi - \varphi'| > \pi$ charakterisirt.

Wir suchen nun eine Function u zu construiren, *welche auf dieser Fläche endlich, stetig und eindeutig ist* (in φ also die Periode $2\pi n$ besitzt), *welche der Differentialgleichung* (2) *genügt, welche ferner für eine hinreichend weit zurückliegende Zeit* $t = -T$ *die Bedingungen*

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial t} \text{ (im oberen Blatte)},$$

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ (in den } n-1 \text{ unteren Blättern)},$$

und auf einem Kreise von hinreichend grossem Radius R *für alle Zeiten zwischen* $-T$ *und* $+T$ *die Bedingungen*

$$u = u_0 \text{ (im oberen Blatte)},$$
$$u = 0 \text{ (in den unteren Blättern)}$$

befriedigt.

Hierbei verfahren wir im engsten Anschlusse an § 3. Ausgehend von der Darstellung (9) für u_0 wählen wir die dort vorkommende willkürliche Function $F_1(\alpha, \varphi')$ jetzt so, dass sie in α und φ' die Periode $2\pi n$ besitzt und wiederum für $\alpha = \varphi'$ mit dem Residuum 1 unendlich wird, d. h. wir setzen

$$F_1(\alpha, \varphi') = \frac{i}{n} \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\varphi'}{n}}}.$$

So ergiebt sich

$$(21) \qquad u = \frac{1}{2\pi n} \int f(r\cos(\varphi - \alpha) + Vt) \frac{e^{\frac{i\alpha}{n}}}{e^{\frac{i\alpha}{n}} - e^{\frac{i\varphi'}{n}}} d\alpha;$$

die Integration erstreckt sich über die beiden Schlingen des Weges W in der α-Ebene (vgl. Fig. 3). Wollen wir auch hier zu einer reellen Darstellung übergehen, so deformiren wir den Weg wie in Fig. 4 angegeben. Dabei haben wir zu unterscheiden, ob φ ein Winkel des oberen oder eines der unteren Blätter ist. Im ersteren Fall liegt die Unendlichkeitsstelle $\alpha = \varphi'$ zwischen den beiden Schlingen des Weges W, im letzteren ausserhalb derselben. Im letzteren Falle gewinnen wir gerade so wie im dritten Paragraphen die Darstellung

$$(22)\quad u = -\frac{1}{2\pi n}\int_0^\infty f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'+ib}{n}-\cos\frac{\pi}{n}} + \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'-ib}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}\right\}db,$$

welche für $n = 2$ direct in Gleichung (12) übergeht; im ersteren Falle ergiebt sich

$$(22')\quad u = u_0 - \frac{1}{2\pi n}\int_0^\infty f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'+ib}{n}-\cos\frac{\pi}{n}} + \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi-\varphi'-ib}{n}-\cos\frac{\pi}{n}}\right\}db,$$

was mit Gleichung (12') übereinstimmt.

Aus der Darstellung (21) wird man nun wieder leicht erkennen, dass die so bestimmte Function eine Lösung unserer Differentialgleichung ist, welche sich auf der n-blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig und stetig verhält. Aus den Darstellungen (22) und (22') folgt überdies, dass sie den für $t = -T$ und $r = R$ gestellten Bedingungen genügt.

Es steht, wie gesagt, nichts im Wege, diese n-werthige Function an Stelle der früheren zweiwerthigen zur Beschreibung der Beugung an einem schwarzen Schirm zu benutzen. Der physikalisch in Betracht kommende Theil der Function u (das physikalische Blatt der Riemann'schen Fläche) wird dabei aus einem Theile des oberen und einem Theile eines der anstossenden unteren Blätter bestehen.

Theils um uns möglichst enge der Vorstellung des schwarzen Körpers anzupassen, theils um die Formeln zu vereinfachen, machen wir schliesslich den Grenzübergang $n = \infty$. Wir haben dann eine *unendliche Windungsfläche* mit einem oberen und unendlich vielen unteren Blättern. Aus (21) bekommen wir so die allgemeingültige Darstellung:

$$(23)\qquad u = \frac{1}{2\pi i}\int f(r\cos(\varphi-\alpha) + Vt)\frac{d\alpha}{\alpha-\varphi'}$$

(Integrationsweg W), aus (22) und (22') die folgenden reellen Darstellungen:

$$(24)\quad u = -\int_0^\infty f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{1}{\pi^2-(\varphi-\varphi'+ib)^2} + \frac{1}{\pi^2-(\varphi-\varphi'-ib)^2}\right\}db$$

(für die unteren Blätter) und

$$(24') \quad u = u_0 - \int_0^\infty f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{1}{\pi^2-(\varphi-\varphi'+ib)^2} + \frac{1}{\pi^2-(\varphi-\varphi'-ib)^2}\right\} db$$

(für das obere, die Einfallsrichtung $\varphi = \varphi'$ enthaltende Blatt).

Es wird sich später zeigen, dass es bei der Beantwortung aller Fragen von physikalischem Interesse nur äusserst wenig ausmacht, ob wir die zweiwerthige, die n-werthige oder die unendlich-viel-werthige Function zur Beschreibung der Beugungserscheinungen benutzen. Dies ist insofern erfreulich, als auf diese Weise die durch den schwarzen Körper verschuldete Unbestimmtheit wenigstens praktisch bedeutungslos wird. Wir werden aus demselben Grunde später zwischen den Formeln (12), (22) und (24) nach Bequemlichkeit auswählen dürfen.

Es giebt aber auch Fälle, wo unsere Functionen der n-blättrigen bez. unendlich-vielblättrigen Riemann'schen Fläche unentbehrlich sind, worauf hier noch kurz hingewiesen werden soll.

Wir wollen das in § 2 aufgestellte Problem dadurch verallgemeinern, dass wir an die Stelle des unendlich dünnen einen keilförmigen Schirm treten lassen, dessen Winkel irgendwie mit π commensurabel sei und wollen an den beiden den Keil begrenzenden Halbebenen die Grenzbedingung $v = 0$ oder $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ vorschreiben. Die übrigen Bedingungen mögen den früheren entsprechend gewählt werden. Z. B. können wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, an die Akustik anknüpfen: Ein impulsives Geräusch von der hier behandelten ebenen Beschaffenheit falle auf einen starren Keil. Auf der Oberfläche desselben kann (wegen der Starrheit) keine zur Oberfläche senkrechte Geschwindigkeitscomponente vorhanden sein. Bedeutet also v das Geschwindigkeitspotential der umgebenden Luft, so ist auf der Keiloberfläche $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$. Das somit sich darbietende Problem wird nun mit Hülfe unserer n-werthigen Function u lösbar.

Man lege die zur Kante des Keils senkrechte Ebene. Der ausserhalb des Keils verlaufende Theil derselben stellt das „physikalische Gebiet G" dar, in welchem unser akustischer Vorgang studirt werden soll. Dies Gebiet ist ein unendlicher Sektor; seine Winkelöffnung möge, da sie mit π commensurabel sein sollte, gleich $\frac{n\pi}{m}$ gesetzt werden, so dass die Oeffnung des Keils $\frac{2m-n}{m}\pi$ beträgt. Nun spiegeln wir G an der Keiloberfläche und erhalten so zunächst ein Doppelgebiet $G + G_1$ von der Winkelöffnung $\frac{2n\pi}{m}$. Indem wir dieses Doppelgebiet m-mal aneinandersetzen, ergiebt sich ein Gebiet von der Winkelöffnung $2n\pi$, d. h. eine

n-blättrige Windungsfläche. Sie zerfällt nach ihrer Herstellung in $2m$ Gebiete $G, G_1, G_2, \cdots G_{2m-1}$ von der Winkelöffnung $\frac{n\pi}{m}$, von denen jedes aus dem vorhergehenden oder folgenden durch Spiegelung an dessen Begrenzungsgeraden abgeleitet werden kann. Die Lösung der gestellten Aufgabe kommt nun darauf hinaus, in jedem dieser $2m$ Gebiete einen ebenen Impuls einfallen zu lassen, dessen Einfallsrichtung aus der des vorhergehenden und folgenden Impulses in derselben Weise durch Spiegelung hervorgeht, wie dies für die betr. Gebiete beschrieben wurde. Die Lösung lautet nämlich, wenn $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{n\pi}{m}$ die Grenzen des physikalischen Gebietes G sind, und wenn $u(\varphi')$ wie vorher den n-werthigen ebenen Impuls von der Einfallsrichtung φ' bedeutet:

$$v = u(\varphi') + u(-\varphi') + u\left(\frac{2n\pi}{m} + \varphi'\right) + u\left(\frac{2n\pi}{m} - \varphi'\right)$$
$$+ u\left(\frac{4n\pi}{m} + \varphi'\right) + u\left(\frac{4n\pi}{m} - \varphi'\right) + \cdots$$
$$+ u\left(\frac{2(m-1)n\pi}{m} + \varphi'\right) + u\left(\frac{2(m-1)n\pi}{m} - \varphi'\right).$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{n\pi}{m}$ entspricht sie, wie verlangt, der Bedingung $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$. Lautet die auf den Grenzen zu erfüllende Bedingung dagegen $v = 0$, so sind die $2m$ Terme unserer Lösung statt mit dem $+$ Zeichen, abwechselnd mit dem Zeichen $+$ und $-$ zu verbinden. In ähnlicher Weise kommt unsere Function u der unendlich-vielblättrigen Windungsfläche in's Spiel, wenn der Winkel des Keils mit π incommensurabel ist.

Die zuletzt gestreiften Probleme sind wieder wie das Problem des § 2 völlig bestimmt und mathematisch befriedigend definirt.

§ 6.

Discussion und numerische Berechnung der gefundenen Lösungen.

Die Aufstellung des allgemeinen analytischen Ausdrucks bildet nur den ersten Schritt zur Lösung einer mathematisch-physikalischen Aufgabe. Der zweite ebenso wichtige besteht in der numerischen Auswerthung. „Solange diese fehlt, bleibt die Lösung unvollständig oder unnütz; denn die Wahrheit, die wir aufdecken wollen, liegt in den analytischen Formeln nicht weniger tief verborgen, wie in dem physikalischen Probleme selbst".[1])

Die numerische Auswerthung ist nun in unserem Falle sehr leicht,

1) Fourier, Théorie de la Chaleur, Einleitung, art. 13.

wenn wir die bis zu einem gewissen Grade willkürliche Function f durch die Rechtecksform von Fig. 1 definiren.[1]) Analytisch besagt diese Definition, wenn ζ wie früher das Argument von f bezeichnet und wenn die Breite des Rechtecks gleich λ, die Höhe gleich 1 gesetzt wird:

$$(25)\qquad \begin{cases} f(\zeta) = 0 & \text{wenn} \quad |\zeta| > \frac{\lambda}{2}, \\ f(\zeta) = 1 & \quad\text{„} \quad |\zeta| < \frac{\lambda}{2}. \end{cases}$$

Zur Abkürzung wollen wir noch den sog. Beugungswinkel

$$\psi = \varphi - \varphi' - \pi$$

einführen. Derselbe ist auf der Schattengrenze gleich Null. Das obere Blatt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche (vgl. § 3), von der wir zunächst sprechen werden, ist dann durch die Bedingung $-2\pi < \psi < 0$, das untere durch $0 < \psi < 2\pi$ charakterisirt.

Wir beginnen mit der Betrachtung des *unteren Blattes.* Gleichung (12), welche hier gilt, schreibt sich jetzt so:

$$(26)\qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\psi} f(-r\cos ib + Vt)\left\{\frac{1}{\sin\frac{\psi+ib}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\psi-ib}{2}}\right\} db.$$

Wir führen als neue Integrationsvariable das Argument von f

$$z = -r\cos ib + Vt$$

ein; dann wird

$$\cos\frac{1}{2}ib = \sqrt{\frac{r+Vt-z}{2r}}, \quad \sin\frac{1}{2}ib = \sqrt{\frac{r-Vt+z}{2r}}.$$

Setzen wir ferner vorübergehend

$$\sin\frac{\psi \pm ib}{2} = A \pm iB, \text{ d. h. } A = \sin\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{r+Vt-z}{2r}}, \; B = \cos\frac{\psi}{2}\sqrt{\frac{-r+Vt-z}{2r}},$$

so haben wir

$$\frac{1}{\sin\frac{\psi+ib}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\psi-ib}{2}} = \frac{2A}{A^2+B^2} = \frac{2\sqrt{2r}\sqrt{r+Vt-z}\sin\frac{\psi}{2}}{(r+Vt-z)\sin^2\frac{\psi}{2} + (-r+Vt-z)\cos^2\frac{\psi}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2r}\sqrt{r+Vt-z}\sin\frac{\psi}{2}}{Vt - r\cos\psi - z}.$$

---

1) Hätten wir dies von vornherein gethan, so würde die Diffgl. (1) in den durch jene Form bedingten Unstetigkeitslinien ihren Sinn verlieren und durch die von Christoffel angegebenen Bedingungen (vgl. Ann. di Matem. [2] Bd. 8 [1877] p. 81 u. 193) zu ersetzen sein, was unsere Darstellung erheblich complicirt hätte. Der nunmehrige Uebergang zur Rechtecksform macht keine Weiterungen.

Unser Integral (26) lautet also

$$(27)\qquad u = \frac{-1}{2\pi}\sqrt{r(1-\cos\psi)}\int\limits_{Vt-r}^{-\infty}\frac{f(z)}{Vt-r\cos\psi-z}\,\frac{dz}{\sqrt{Vt-r-z}}.$$

Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden, je nach der Lage des Integrationsintervalles $(Vt-r>z>-\infty)$ gegen dasjenige Intervall, in dem f von Null verschieden ist $\left(+\frac{\lambda}{2}>z>-\frac{\lambda}{2}\right)$. Diese beiden Intervalle können sich entweder *ausschliessen*, oder das erste kann das zweite *einschliessen*, oder sie können sich *theilweise überdecken*. Die drei Fälle sind also diese:

1) $\qquad Vt-r<-\frac{\lambda}{2}\quad$ oder $\quad r>Vt+\frac{\lambda}{2}$,

2) $\qquad Vt-r>+\frac{\lambda}{2}\quad$ oder $\quad r<Vt-\frac{\lambda}{2}$,

3) $\qquad -\frac{\lambda}{2}<Vt-r<+\frac{\lambda}{2}\quad$ oder $\quad Vt-\frac{\lambda}{2}<r<Vt+\frac{\lambda}{2}$.

Wir unterscheiden somit auf dem unteren Blatte unserer Riemann'schen Fläche drei Gebiete: 1) das *Aeussere* des Kreises $r=Vt+\frac{\lambda}{2}$, 2) das *Innere* des Kreises $r=Vt-\frac{\lambda}{2}$, 3) den zwischen den Kreisen $r=Vt\pm\frac{\lambda}{2}$ enthaltenen *Kreisring*. Für diese Gebiete des Blattes gestaltet sich die Auswerthung von (27) verschieden.

1) Im Gebiete 1) ist $f(z)$ für alle bei der Integration vorkommenden Werthe von z gleich Null. Wir haben daher einfach:

$$(28)_1\qquad u=0.$$

Das heisst: *Zur Zeit t ist die Störung noch nicht bis zur Entfernung $r=Vt+\frac{\lambda}{2}$ vom Verzweigungspunkte vorgedrungen.*

Die Grösse des Gebietes (1) hängt von der Zeit ab. Wenn $Vt\leqq-\frac{\lambda}{2}$, so nimmt dieses Gebiet das ganze untere Blatt ein. *So lange also $Vt\leqq-\frac{\lambda}{2}$, herrscht im unteren Blatt vollkommene Ruhe.* Mit wachsendem t wird das Gebiet 1) vom Verzweigungspunkte mehr und mehr abgedrängt. Die Erregung breitet sich dann im unteren Blatte vom Verzweigungspunkte her mit Lichtgeschwindigkeit aus.

2) Handelt es sich um einen Punkt des Gebietes 2), so erstreckt sich die Integration über alle diejenigen Werthe von z, für welche f von Null verschieden ist. Integral (27) ist in diesem Falle identisch mit dem folgenden:

$$u=\frac{1}{2\pi}\sqrt{r(1-\cos\psi)}\int\limits_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}}\frac{1}{Vt-r\cos\psi-z}\,\frac{dz}{\sqrt{Vt-r-z}}\cdot$$

Wegen der Kürze des Integrationsintervalles λ genügt es, angenähert zu verfahren. Wir setzen unter dem Integralzeichen für z seinen mittleren Werth $z=0$ und multipliciren den so vereinfachten Werth des Integranden mit der Länge des Integrationsintervalles λ. Der so erhaltene Werth unterscheidet sich von dem genauen, übrigens auch leicht angebbaren Werthe nur durch Wegwerfung der höheren Potenzen von λ, auf die es uns nicht ankommt, und lautet:

$$(28)_2 \qquad u=\frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{r(1-\cos\psi)}{Vt-r}}\,\frac{1}{Vt-r\cos\psi}\cdot$$

Diese Formel zeigt: *Im Gebiete* 2) *ist die Erregung im Allgemeinen sehr klein* (wegen des kleinen Factors λ), *auf der Schattengrenze selbst sogar direct gleich Null* (wegen des Factors $\sqrt{1-\cos\psi}$, welcher für $\psi=0$ verschwindet). Nach den Rändern des Gebietes hin, d. h. nach der Peripherie des Kreises $r=Vt-\frac{\lambda}{2}$ nimmt sie etwas zu (wegen des Factors $\sqrt{Vt-r}$ im Nenner, dessen kleinster Werth im Gebiet 2) gleich $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$ wird). Mit wachsendem t breitet sich das Gebiet 2) über immer grössere Theile des unteren Blattes aus, gleichzeitig nimmt die Stärke der Erregung mit wachsendem t ab.

3) In Punkten des Gebietes 3) ist die untere Grenze des Integrals (27) $Vt-r<\frac{\lambda}{2}\cdot$ Die Integration in (27) erstreckt sich daher nicht über alle diejenigen Werthe von z, für die $f(z)$ von Null verschieden ist, sondern nur von $Vt-r$ bis $-\frac{\lambda}{2}\cdot$ Wir bekommen auf diese Weise zunächst

$$u=\frac{1}{2\pi}\sqrt{r(1-\cos\psi)}\int\limits_{-\frac{\lambda}{2}}^{Vt-r}\frac{1}{Vt-r\cos\psi-z}\,\frac{dz}{\sqrt{Vt-r-z}}\cdot$$

Hier ist es nöthig, die Integration genau auszuführen. Wir substituiren zu diesem Ende $y^2=Vt-r-z$ und finden:

$$u=\frac{1}{\pi}\sqrt{r(1-\cos\psi)}\int\limits_0^{\sqrt{Vt-r+\frac{\lambda}{2}}}\frac{dy}{y^2+r(1-\cos\psi)}=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{\sqrt{r(1-\cos\psi)}}\right]_0^{\sqrt{Vt-r+\frac{\lambda}{2}}}$$

d. h.

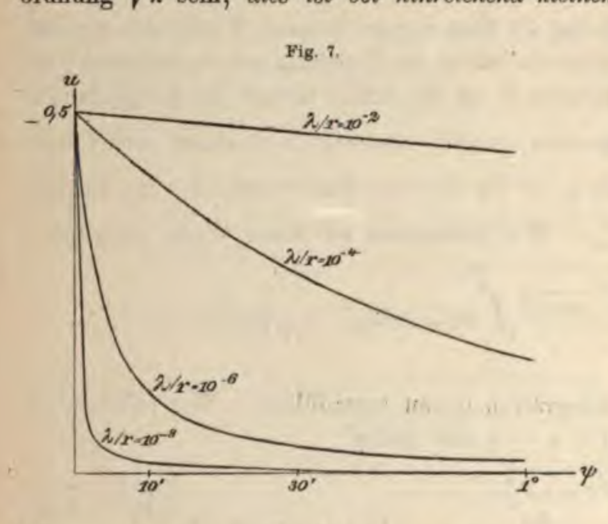
$$(28)_3 \qquad u=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{Vt-r+\frac{\lambda}{2}}{r(1-\cos\psi)}}\,.$$

Das Gebiet 3) reicht von dem Kreise $r = Vt - \frac{\lambda}{2}$ bis zum Kreise $r = Vt + \frac{\lambda}{2}$. Lage und Grösse desselben hängt also von der Zeit ab. Bei wachsendem t eilt der Kreisring mit Lichtgeschwindigkeit vom Verzweigungspunkte radial nach allen Seiten hin fort. Dasselbe gilt von der durch $(28)_3$ dargestellten Störung.

Bekanntlich spricht man in der Optik ausser von *ebenen* von *Kugel-* und *Cylinder-Wellen.* Die letzteren bezeichnen Wellenbewegungen, die sich von einem Punkte aus radial mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen (Kugelwellen im dreidimensionalen, Cylinderwellen in einem zweidimensionalen Gebiete). In gleichem Sinne sprachen wir von *ebenen* und werden wir von *Cylinderimpulsen* sprechen. Während die ursprüngliche Erregung ein ebener Impuls war, stellt $(28)_3$ einen Cylinderimpuls dar, welcher sich vom Verzweigungspunkte (oder räumlich gesprochen, von der Schirmkante aus) nach allen Seiten mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Der Grösse nach ist unser Cylinderimpuls im Allgemeinen klein gegen den einfallenden Impuls, gross gegen die durch $(28)_2$ gegebene Erregung. Der Zähler im Argument des Arcus-Tangens ist nämlich in den Punkten unseres Kreisringes $\leqq \sqrt{\lambda}$; wenn also der Nenner nicht gerade verschwindet, wird das Argument des Arcus-Tangens von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$ sein; *dies ist bei hinreichend kleinem λ zugleich die Grössenordnung des Cylinderimpulses, während die des einfallenden Impulses* 1, *die der Erregung* $(28)_2$ *aber λ ist.*

Fig. 7.



Wenn dagegen der Nenner im Argument des Arcus-Tangens verschwindet, was nur für $\psi = 0$ oder für $\psi = 2\pi$ d. h. bei Annäherung an die eine oder andere Schattengrenze der Fall ist, so wird das Argument des Arcus unendlich, dieser selbst gleich $\frac{\pi}{2}$ und die rechte Seite von $(28)_3$ gleich $\frac{1}{2}$, was in voller Uebereinstimmung mit der für die Schattengrenzen gültigen Gleichung (14) steht.

Entfernt man sich im Gebiete 3) von der Schattengrenze, so muss

die Grösse des Cylinderimpulses von dem Werthe $\frac{1}{2}$ bis zu den Werthen von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$ abnehmen. Betrachten wir z. B. die mittelste Faser des Kreisringes $r = Vt$. Hier hängt die Schnelligkeit der Abnahme lediglich von dem Verhältniss $\frac{\lambda}{r}$ ab. *Die Abnahme ist um so rapider, je kleiner dies Verhältniss ist.* Dies wird durch die Figur der vorigen Seite veranschaulicht, in der die Abscissen den Winkel ψ zwischen 0 und 1°, die Ordinaten die Grösse u bedeuten und die vier Curven bez. den Werthen $\frac{\lambda}{r} = 10^{-2}, = 10^{-4}, = 10^{-6}, = 10^{-8}$ entsprechen. Die letzte Curve, die im Hinblick auf Späteres am wichtigsten ist, zeigt, dass schon bei einem Beugungswinkel von $^1/_2{}^0$ die Grösse von u unmerklich klein geworden ist. Die Grenze dieser Curven bei verschwindendem λ ist offenbar ein absolut steiler Abfall von dem Werthe $u = \frac{1}{2}$ nach dem Werthe $u = 0$.

Die Werthevertheilung von u im *oberen Blatte* ist nun mit wenigen Worten zu erledigen. Wie der Vergleich von (12) und (12') oder auch wie Gleichung (13) lehrt, ist der Werth von u in einem Punkte des oberen Blattes gleich dem Werthe von u_0 in diesem Punkte vermindert um den Werth von u in dem entsprechenden Punkte des unteren Blattes. Wir werden daher auch im oberen Blatt die drei Gebiete 1), 2) und 3) zu unterscheiden haben und erhalten für sie die folgenden Formeln:

$$(29)_1 \quad r > Vt + \frac{\lambda}{2}, \qquad u = u_0;$$

$$(29)_2 \quad r < Vt - \frac{\lambda}{2}, \qquad u = u_0 - \frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{\frac{r(1-\cos\psi)}{Vt-r}}\,\frac{1}{Vt - r\cos\psi};$$

$$(29)_3 \quad Vt - \frac{\lambda}{2} < r < Vt + \frac{\lambda}{2}, \quad u = u_0 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{Vt - r + \frac{\lambda}{2}}{r(1-\cos\psi)}}.$$

Bevor wir den physikalischen Sinn dieser Formeln weiter entwickeln, wollen wir die entsprechenden Formeln für die verallgemeinerten mehrwerthigen Lösungen des § 5 angeben. Dabei genüge es, den Grenzfall $n = \infty$ zu betrachten. Da es sich nämlich zeigen wird, dass schon dieser nur unwesentlich von dem Fall $n = 2$ abweicht, werden wir das Gleiche für die Fälle $2 < n < \infty$ umsomehr vermuthen dürfen.

Wir formen zunächst den für die unendliche Windungsfläche gefundenen Ausdruck (24) ähnlich wie oben um, indem wir als neue Integrationsvariable $s = Vt - r\cos ib$ einführen und abkürzend

$$\zeta = \log\left(\frac{Vt-s}{r} + \sqrt{\left(\frac{Vt-s}{r}\right)^2 - 1}\right)$$

setzen. Dann erhalten wir für eines der unteren Blätter unserer Windungsfläche:

$$u = \int_{Vt-r}^{-\infty} f(s) \left\{ \frac{1}{\pi^2 - (\varphi - \varphi' + i\zeta)^2} + \frac{1}{\pi^2 - (\varphi - \varphi' - i\zeta)^2} \right\} \frac{ds}{\sqrt{(Vt-s)^2 - r^2}}.$$

Wiederum sind drei Gebiete zu unterscheiden:

1) Ist $r > Vt + \frac{\lambda}{2}$, so ergiebt sich sofort

$$(30)_1 \qquad u = 0.$$

2) Ist $r < Vt - \frac{\lambda}{2}$, so finden wir näherungsweise

$$(30)_2 \qquad u = \left\{ \frac{1}{\pi^2 - (\varphi - \varphi' + i\varrho)^2} + \frac{1}{\pi^2 - (\varphi - \varphi' - i\varrho)^2} \right\} \frac{\lambda}{\sqrt{V^2 t^2 - r^2}}$$

mit der Abkürzung

$$\varrho = \log \frac{Vt + \sqrt{V^2 t^2 - r^2}}{r}.$$

3) Ist endlich $Vt - \frac{\lambda}{2} < r < Vt + \frac{\lambda}{2}$, so liefert die wirkliche Ausführung der Integration

$$(30)_3 \qquad u = \frac{1}{\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\varphi - \varphi' - \pi} + \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\varphi - \varphi' + \pi} \right\}$$

mit der Abkürzung

$$\sigma = \log \frac{Vt + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r^2}}{r}.$$

Diese Ausdrücke stimmen aber in allen wesentlichen Punkten mit den Ausdrücken (28) überein. Gleichung $(30)_1$ zeigt wieder, dass die Störung zur Zeit t noch nicht in das Aeussere des Kreises $r = Vt + \frac{\lambda}{2}$ gelangt ist. Gleichung $(30)_2$ zeigt ferner, dass im Innern des Kreises $r = Vt - \frac{\lambda}{2}$ die Erregung sehr schwach, nämlich von der Grössenordnung λ ist und dass sie vom Innern nach der Peripherie hin etwas zunimmt. Die durch $(30)_3$ dargestellte Erregung kann man abermals als Cylinderimpuls bezeichnen. Auch dieser ist im Allgemeinen schwach, nämlich von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$, da Vt im Gebiete 3) sich nur wenig von r, das Argument des log in der Formel für σ also nur wenig von 1, σ selbst sowie die Arcus-Tangens-Functionen nur wenig von Null unterscheiden. Eine Ausnahme tritt nur ein in der Nähe einer der Schattengrenzen $\varphi - \varphi' = \pm \pi$, wo u nahezu gleich $\frac{1}{2}$ wird. Von hieraus nimmt die Grösse des Cylinderimpulses schnell ab und nähert sich asymptotisch dem Werthe Null (für $\varphi - \varphi' = \pm \infty$).

Um die Schnelligkeit dieser Abnahme beurtheilen und um sie mit der Abnahme im Falle $n = 2$ vergleichen zu können, begeben wir uns in die Nähe der einen Schattengrenze z. B. in die Nähe von $\varphi - \varphi' = \pi$ und setzen $\varphi - \varphi' - \pi = \psi$. In $(30)_3$ können wir dann mit grosser Annäherung den zweiten Arcus-Tangens vernachlässigen, da dieser von der Grössenordnung $\sqrt{\lambda}$, der erste von der Ordnung 1 ist. Beschränken wir uns gleichzeitig auf die mittelste Faser des Kreisringes, wo $Vt = r$ ist, so ergiebt sich

$$\sigma = \log\left(1 + \frac{\lambda}{2r} + \sqrt{\frac{\lambda}{r} + \frac{\lambda^2}{4r^2}}\right) = \log\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{r}} + \cdots\right) = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} + \cdots$$

und wir erhalten

$$(31) \qquad u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cdot \frac{1}{\psi}\right\} \quad \text{oder} \quad \psi = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \operatorname{ctg} u\pi.$$

Damit vergleichen wir den aus $(28)_3$ für $Vt = r$ folgenden Werth:

$$(31') \qquad u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{1}{2 \sin \frac{\psi}{2}}\right\} \quad \text{oder} \quad 2 \sin \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \operatorname{ctg} u\pi.$$

Wie wir sehen, stimmen beide Formeln in der Nähe der Schattengrenze bis auf höhere (dritte etc.) Potenzen von ψ überein. Fragen wir z. B. nach demjenigen Winkelabstande ψ von der Schattengrenze, in dem u auf den 10ten Theil seines in der Schattengrenze gültigen Werthes $\frac{1}{2}$ herabgesunken ist.

Nach (31) bestimmt sich dieser Winkel durch die Gleichung

$$\psi = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \operatorname{ctg} 9^0 = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cdot 6{,}31,$$

nach (31') durch

$$2 \sin \frac{\psi}{2} = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \operatorname{ctg} 9^0 = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \cdot 6{,}31.$$

Je nachdem wir für $\frac{\lambda}{r}$ die in Fig. 7 zu Grunde gelegten Werthe $\frac{\lambda}{r} = 10^{-2}$, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8} benutzen, erhalten wir im ersten Falle (unendliche Windungsfläche)

$$\psi = 36^0 10', \quad 3^0 37', \quad 21' 40'', \quad 2' 10'',$$

im zweiten Falle (zweiblättrige Fläche)

$$\psi = 36^0 48', \quad 3^0 38', \quad 21' 42'', \quad 2' 10''.$$

Die Abnahme ist also auf der unendlich-vielblättrigen Fläche, was wegen der freieren Ausbreitungsmöglichkeit verständlich ist, etwas jäher, wie auf der zweiblättrigen. Der ganze Unterschied ist aber so gering, dass die Curven von Fig. 7 wenigstens bei $\frac{\lambda}{r} = 10^{-6}$ und 10^{-8} direct

auch als Illustration des Vorganges auf der unendlichblättrigen Fläche gelten können.

Es macht also in der Nähe der Schattengrenze nichts aus, ob wir die Function der zweiblättrigen durch die der unendlichblättrigen Fläche ersetzen. In grösserer Entfernung von der Schattengrenze ferner ist die Erregung in beiden Fällen so gering, dass auch hier nichts Wesentliches bei jener Vertauschung geändert wird. Hiermit ist die schon pag. 37 gemachte Angabe bewiesen, dass wir nach Belieben zwischen der zwei-, n- bez. unendlich-viel-werthigen Lösung auswählen können, dass also die durch den Begriff des schwarzen Körpers herbeigeführte Unbestimmtheit unserer Lösung praktisch nicht in's Gewicht fällt.

§ 7.
Chronologische Schilderung des Vorganges auf der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche.

Die Einzelergebnisse des vorigen Paragraphen werden ihrer physikalischen Bedeutung nach klarer werden, wenn wir jetzt in zeitlicher Reihenfolge und im Zusammenhange die Schicksale des auf unserer zweiblättrigen Fläche einfallenden ebenen Impulses zu schildern unternehmen.

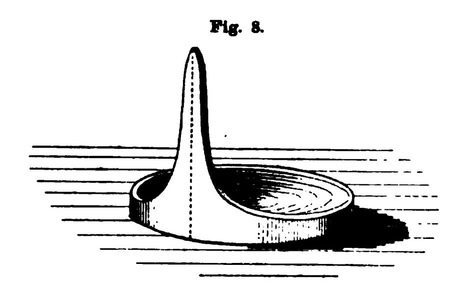
Beginnend mit der weit zurückliegenden Zeit $t = -T$ haben wir, unsern Anfangsbedingungen entsprechend, auf dem unteren Blatte Ruhe, auf dem oberen eine streifenförmige Erregung in der grossen Entfernung $r = VT$ vom Anfangspunkte. Denken wir uns die Grösse der Erregung senkrecht zur Ebene des oberen Blattes durch eine Strecke versinnlicht, so lässt sich die Anfangserregung *als ein Wall von der geringen Breite* λ *und der Höhe* 1 *mit vertical abfallenden Rändern beschreiben*, welcher senkrecht zur Einfallsrichtung in der genannten Entfernung VT vom Verzweigungspunkte errichtet ist. Dieser Wall schiebt sich nun mit Lichtgeschwindigkeit nach dem Verzweigungspunkte hin vorwärts, ohne dass in den übrigen Partien des oberen oder im unteren Blatte der anfängliche Ruhezustand gestört wird: denn nach $(28)_1$ und $(29)_1$ ist bei negativem t (genauer, solange $Vt < -\frac{\lambda}{2}$ ist) $u = 0$ im unteren, bez. $u = u_0$ im oberen Blatte.

In dem Momente $Vt = -\frac{\lambda}{2}$ erreicht der Wall mit seiner Front den Verzweigungspunkt, in dem Momente $Vt = +\frac{\lambda}{2}$ ist er gerade über ihn hinweggegangen. Der Wall wird nun von der Schattengrenze $\varphi - \varphi' = \pi$ bez. $\psi = 0$ in zwei Theile zerschnitten. Der eine Theil wandert zur Rechten, der andere zur Linken der Schattengrenze im oberen Blatte fort, beide schneiden mit der Schattengrenze ab. (Vgl. den ersten Term der rechten Seite von $(29)_2$ und $(29)_3$).

Gleichzeitig beginnt sich aber im Momente $Vt = -\frac{\lambda}{2}$ ein anderer Impuls, unser Cylinderimpuls, vom Verzweigungspunkte her auszubreiten. Er schreitet mit Lichtgeschwindigkeit radial nach allen Seiten vor. Im unteren Blatte ist die ihm entsprechende Erregung positiv, im oberen negativ. Nach aussen hin ist er durch den Kreis $r = Vt + \frac{\lambda}{2}$, nach innen durch den Kreis $r = Vt - \frac{\lambda}{2}$ begrenzt. In's Aeussere des Kreises $r = Vt + \frac{\lambda}{2}$ ist zur Zeit t im unteren Blatt noch keine Erregung gelangt, im oberen Blatte befindet sich im Aeusseren jenes Kreises nur die durch den einfallenden Impuls gegebene Störung (s. Gl. $(28)_1$ und $(29)_1$). Im Inneren seines anderen Begrenzungskreises $r = Vt - \frac{\lambda}{2}$ dagegen hat unser Cylinderimpuls ein gewisses *Residuum* zurückgelassen. Dasselbe ist im unteren Blatte positiv, im oberen negativ und wird durch die Gleichungen $(28)_2$ und $(29)_2$ näher bestimmt. Zugleich mit dem Fortschreiten des Cylinderimpulses dehnt sich das Residuum über weitere Partien des oberen und unteren Blattes aus.

Die Grösse des Cylinderimpulses in dem Kreisringe zwischen $r = Vt - \frac{\lambda}{2}$ und $r = Vt + \frac{\lambda}{2}$ ist durch die Gleichungen $(28)_3$ und $(29)_3$ bestimmt. Auf der Schattengrenze erreicht dieser Impuls sein numerisches Maximum $\left(-\frac{1}{2}\text{ im oberen, } +\frac{1}{2}\text{ im unteren Blatte}\right)$, von da aus flacht er sich nach den Seiten hin schnell ab. Wollen wir auch den Cylinderimpuls durch senkrechtes Auftragen seiner Grösse auf der Ebene des oberen oder unteren Blattes räumlich veranschaulichen, so erhalten wir für das untere Blatt das Bild von Fig. 8. Wir können dasselbe als einen *Krater* beschreiben, dessen Umwallung ungleiche Höhe hat, in der Schattengrenze eine zackenartige Erhebung, auf der entgegengesetzten Seite nur geringe Höhe. Nach aussen hin (d. h. nach dem Gebiete 1), das von der Erregung noch nicht erreicht ist) fallen die Wände des Kraters ziemlich unvermittelt bis zum Nullniveau herab; nach innen hin (nach dem Gebiete 2) senken sie sich sanfter und gehen in das das Innere des Kraters muldenförmig ausfüllende Residuum über.

Fig. 8.



Im oberen Blatte haben wir dasselbe Bild nur nicht als kraterförmige Erhebung sondern als ebensolche Einsenkung. Dazu kommt im oberen

Blatte noch der geradlinige Wall des einfallenden Impulses, welcher sich jener Einsenkung superponirt. Es ist interessant, zu bemerken, dass sich beim Ueberschreiten der Schattengrenze, d. h. beim Uebergange vom oberen zum unteren Blatt diese Ueberlagerung von ebenem und Cylinderimpuls *stetig verhält*, während jeder der beiden Impulse für sich genommen *einen Sprung erleidet*. Da beide Impulse mit der gleichen Geschwindigkeit V an der Schattengrenze hinwandern, befindet sich der Wall des ebenen und die zackenartige Einsenkung des Cylinderimpulses stets an der gleichen Stelle. Der ebene Impuls schneidet, wie früher hervorgehoben, mit der Schattengrenze ab; beim Ueberschreiten der Schattengrenze *sinkt seine Grösse plötzlich von* 1 *auf Null*. Der Cylinderimpuls hat in der Nähe der Schattengrenze im oberen Blatt die Grösse $-\frac{1}{2}$, im unteren die Grösse $+\frac{1}{2}$ (Gl. $(28)_3$); beim Ueberschreiten der Schattengrenze *wächst* also die vom Cylinderimpuls herrührende Erregung *plötzlich um* 1. Die beiden Sprünge heben sich, wie man sieht, gegenseitig auf und wir haben einen stetigen Uebergang vom oberen zum unteren Blatt. Auf der Schattengrenze selbst ist die Erregung durch den Cylinderimpuls gerade auf die Hälfte desjenigen Wertes reducirt, den sie unter der alleinigen Wirkung des einfallenden ebenen Impulses haben würde (s. Gl. (14)).

Der Cylinderimpuls im unteren Blatte stellt somit die natürliche stetige Fortsetzung des auf das obere Blatt beschränkten ebenen Impulses dar. Beide Impulse schliessen sich zu einer schleifenförmigen wallartigen Erhebung zusammen, welche den Verzweigungspunkt im unteren Blatt auf einem Kreise umzieht, und deren unendlich lange geradlinige Enden sich in's obere Blatt erstrecken. Die Höhe der Erhebung beträgt an den geradlinigen Partien der Schleifen (im oberen Blatte) 1, auf der Rundung (im unteren Blatte) ist sie zwar gering, nämlich von der Ordnung $\sqrt{\lambda}$, aber immer noch gross gegen die Breite der ganzen Erhebung, welche λ beträgt. Der Uebergang von der Höhe 1 zu der geringen Höhe im unteren Blatt findet ziemlich plötzlich in der Nähe der Schattengrenze statt.

Mit wachsendem t entfernen sich die geradlinigen Enden der Schleife, sich selbst parallel bleibend, mit Lichtgeschwindigkeit vom Verzweigungspunkte, während sich die Rundung der Schleife und damit zugleich der vorher beschriebene Krater mit Lichtgeschwindigkeit erweitert. Der Krater zieht in seinem Innern das Residuum hinter sich her, welches immer weitere Flächen einnimmt und dabei an Grösse abnimmt. Für $t = \infty$ verlieren sich der ebene wie der Cylinderimpuls (die Enden sowie die Rundung der Schleife) in's Unendliche; gleichzeitig hat sich das Residuum zu Null abgeflacht.

§ 8.

Physikalische Folgerungen der Theorie.

Auf Grund der nunmehr gewonnenen Kenntnis unseres verzweigten Impulses wollen wir den Charakter der bei Röntgenstrahlen zu erwartenden Beugungserscheinungen schildern und aus unserer Theorie einige Fingerzeige für die günstigste Anordnung der betr. Beobachtungen entnehmen.

Wie schon pag. 31 auseinandergesetzt, kommt für die Physik nur ein Ausschnitt aus der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche in Betracht, das „physikalische Blatt“. Dasselbe wird durch die Schattengrenze in das *bestrahlte Gebiet* $0 < \varphi < \varphi' + \pi$ und das *Schattengebiet* $\varphi' + \pi < \varphi < 2\pi$ zerlegt.

Bezeichnen wir als Beugungserscheinung wie üblich jede Abweichung von der ursprünglich erzeugten Erregung, also hier jede Abweichung von dem ebenen unverzweigten Impuls, so müssen wir sagen: Beugungserscheinungen giebt es sowohl im bestrahlten wie im Schattengebiete, sowohl vor wie hinter dem Schirm. Sie sind aber im Allgemeinen sehr schwach und werden nur in der beiderseitigen Nähe der Schattengrenze an Stärke dem einfallenden Impuls vergleichbar. Dabei wird sich für die Beobachtung die zum Schattengebiet gehörige Umgebung der Schattengrenze viel besser eignen wie die zum bestrahlten Gebiet gehörige, weil dort die Beugungserscheinung rein zur Geltung kommt, während sie hier durch den einfallenden Impuls verdeckt und zurückgedrängt wird. Wir beschäftigen uns also lediglich mit dem Schattengebiet.

Die augenfälligste Folgerung unserer Theorie ist die, *dass die Breite des durch Beugung erhellten Theiles des Schattengebietes mit der Breite des Impulses, d. h. mit der Grösse λ, abnimmt.* Dies lehrt ein Blick auf Fig. 7. Bei gleichem r nimmt der Cylinderimpuls mit der Entfernung von der Schattengrenze um so jäher ab, je kleiner λ wird. Desgleichen ist das von dem Cylinderimpuls zurückgelassene Residuum, welches ja ebenfalls einen Bestandtheil der Beugung ausmacht, um so schwächer, je kleiner λ ist (s. Gl. $(28)_2$). Dieselbe Thatsache wenden wir umgekehrt, wenn wir sagen: *Je weniger jäh der Impuls ist, desto weiter breitet sich die Störung in das Schattengebiet aus.*

Speciell haben wir in der Grenze bei *unendlich kurzem Impulse* eine *absolut scharfe Schattengrenze.* Die Impulsbreite λ tritt also in völligen Parallelismus mit der Wellenlänge λ der Optik. Der Standpunkt der scharfen Schattengrenze und der genau-geradlinigen Fortpflanzung der Strahlen, auf den man sich in der geometrischen Optik sowie in der Beurtheilung der optischen Erscheinungen des gewöhnlichen Lebens stellt, entspricht der Annahme $\lambda = 0$. Bei nicht verschwindendem λ dagegen

ist sowohl in der Optik wie in der Theorie unserer Impulse die Schattengrenze je nach der Grösse von λ stets mehr oder minder verwaschen. Ein leicht verständlicher Unterschied zwischen den periodischen optischen und unseren unperiodischen Erregungen tritt dabei in der folgenden Richtung zu Tage: *In der Optik haben wir in der Nähe der Schattengrenze Maxima und Minima der Intensität, bei unseren impulsiven Störungen dagegen einen mehr oder minder steilen ununterbrochenen Abfall.* Man erkennt dies wiederum aus dem Anblick der Fig. 7 oder besser noch der später zu erläuternden Fig. 10.

Der experimentelle Nachweis der Beugung wird jedenfalls bei grösserer Impulsbreite der Strahlen leichter sein, wie bei sehr geringer, und es entsteht die Frage, ob man im Stande ist, die Breite der bei der Röntgenstrahlung auftretenden Impulse a priori zu beeinflussen.

Zunächst ist klar, dass die kürzeren Impulse absorbirenden Medien gegenüber eine grössere Durchschlagskraft haben werden wie die längeren. Für die Hauptanwendung der Röntgenstrahlen, die medicinische, muss man daher bemüht sein, die Impulsbreite zu verringern, dagegen ist es für die Beugungsbeobachtungen nützlich, sie zu vergrössern. *Es sind also gerade diejenigen Röntgenstrahlen, die sich für die Radiographie am meisten eignen, für die Beugungsbeobachtungen am ungeeignetsten.*

Die Breite des Impulses lässt sich nun wenigstens qualitativ aus den Umständen bei der Erzeugung der Röntgenstrahlen vorhersagen. Wir verweisen in der Hinsicht auf die in der Einleitung citirte Theorie von J. J. Thomson über den Zusammenhang zwischen Kathoden- und Röntgenstrahlen. Aus ihr geht hervor, dass die ganz kurzen Impulse nur zu erwarten sind, wenn die dieselben erzeugenden Kathodenstrahlen nahezu Lichtgeschwindigkeit haben und dass die Dauer des Impulses zunimmt, wenn sich jene Geschwindigkeit von der Lichtgeschwindigkeit entfernt. Letzteres erreicht man bekanntlich unter Anderem durch geringere Verdünnung des Kathodenraums. Indem man also der Reihe nach verschiedene Verdünnungsgrade herstellt, erhält man *verschiedene Sorten von Röntgenstrahlen; von diesen müssen die den höchsten Verdünnungsgraden entsprechenden fast gar nicht, die den niedrigsten entsprechenden am meisten gebeugt werden.* Besonders aussichtsreich dürfte gerade dieser Vergleich der bei *verschiedenen* Strahlensorten erhaltenen Beugungsbilder sein, sowohl für die Constatirung eines Beugungseffektes überhaupt, wie für die nähere quantitative Prüfung unserer Hypothese von der Natur der Röntgenstrahlen.

Wir müssen nun etwas eingehender das Beugungsbild prüfen, das eine hinter dem Schirm aufgestellte photographische Platte liefert. Dasselbe hängt ausser von dem Abstande r_0 von Platte und Schirmkante wesentlich von der Impulsbreite λ (oder richtiger von dem Verhältniss der beiden

Längen $\lambda : r_0$) ab. *Unsere Absicht ist dabei, durch den Vergleich von Theorie und Beobachtung die Breite der bei der betr. Beobachtung zur Verwendung gekommenen Impulse zu bestimmen.*

Unsere bisherigen Entwickelungen bedürfen zu dem Zwecke noch der Vervollständigung; denn es ist nicht die bisher berechnete (elektrische oder magnetische) *Kraft* v, welche die Wirkung auf der photographischen Platte bestimmt, sondern — vermuthlich — die elektrische *Energie*, und zwar der Gesammtbetrag derselben, welcher in der Zeit von $-\infty$ bis $+\infty$ auf die betr. Stelle der Platte fällt. Wir wollen annehmen, dass die elektrische Erregung parallel der Schirmkante polarisirt ist. (Im anderen Falle würde die Rechnung etwas umständlicher, das Resultat aber nicht wesentlich geändert werden). Ferner wollen wir annehmen, dass die photographische Platte das Feld ihrerseits nicht stört.

Die in irgend einem Punkte (r, ψ) wirksame Energie ist auf Grund dieser Annahmen durch

$$\frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2\,dt$$

gegeben, wo v die elektrische Kraft parallel der Schirmkante bedeutet und bei einem absolut schwarzen Schirm (vgl. § 4) unserm verzweigten Impuls u gleichgesetzt werden kann.

Tragen wir hier für v statt des verzweigten die Function des unverzweigten Impulses u_0 ein, so wird der Werth der Energie, bei Zugrundelegung der Rechtecksform aus Fig. 1, gleich

$$\frac{\tau}{8\pi};$$

τ bedeutet dabei die zeitliche Dauer des Impulses und hängt mit der Impulsbreite λ folgendermassen zusammen:

$$\frac{\lambda}{\tau} = V.$$

So wie λ zu der Wellenlänge, tritt τ also zu der Schwingungsdauer der Optik in Parallelismus.

Wir wollen nun als *relative Intensität J* das Verhältniss der Energie des verzweigten zu der des unverzweigten Impulses, oder anders ausgedrückt, das Verhältniss der Energie der durch Beugung modificirten Strahlung zu der Energie der ursprünglichen, einfallenden Strahlung bezeichnen. Wir haben dann:

$$J = \frac{V}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dt.$$

In dem bestrahlten Gebiete wird offenbar J nahezu gleich 1 sein, da hier der einfallende Impuls u_0 den gebeugten erheblich überwiegt. Auf der Schattengrenze haben wir genau J gleich $\frac{1}{4}$, da hier dauernd $u = \frac{1}{2} u_0$ ist. Um J im Schattengebiete zu berechnen haben wir für u die Ausdrücke aus $(28)_1$, $(28)_2$ und $(28)_3$ einzusetzen, je nach dem Werthe der Integrationsvariabeln t:

$$-\infty < Vt < r - \frac{\lambda}{2}, \quad r + \frac{\lambda}{2} < Vt < +\infty, \quad r - \frac{\lambda}{2} < t < r + \frac{\lambda}{2}.$$

Das Integral zerlegt sich so in drei Theilintegrale J_1, J_2 und J_3, von denen J_1 verschwindet (s. Gl. $(28)_1$). Die beiden andern Integrale lauten:

$$J_2 = \frac{V\lambda}{4\pi^2} r (1 - \cos\psi) \int\limits_{Vt = r + \frac{\lambda}{2}}^{Vt = \infty} \frac{dt}{(Vt - r)(Vt - r\cos\psi)^2}$$

und

$$J_3 = \frac{V}{\lambda \pi^2} \int\limits_{Vt = r - \frac{\lambda}{2}}^{Vt = r + \frac{\lambda}{2}} \left\{ \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt - r + \frac{\lambda}{2}}{r(1 - \cos\psi)}} \right\}^2 dt.$$

Das erste Integral ist leicht auszuführen, wenn man eine Partialbruchzerlegung vornimmt. Benutzt man die Abkürzung:

$$(32) \qquad s = \frac{\lambda}{r(1 - \cos\psi)},$$

so erhält man

$$J_2 = \frac{s}{4\pi^2} \left(\log \frac{s + 2}{s} - \frac{2}{s + 2} \right).$$

Auch das Integral J_3 lässt sich zufällig genau ausführen. Substituirt man nämlich

$$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt - r + \frac{\lambda}{2}}{r(1 - \cos\psi)}} = \alpha,$$

so wird

$$Vt = \frac{\lambda}{s} \operatorname{tg}^2 \alpha + r - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{s} \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\lambda}{s} + r - \frac{\lambda}{2};$$

die Integrationsgrenzen lauten $\operatorname{tg}\alpha = 0$ und $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{s}$ und man erhält

$$J_3 = \frac{1}{s\pi^2} \int\limits_{\operatorname{tg}\alpha = 0}^{\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{s}} \alpha^2 \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\cos^2 \alpha} \, d\alpha = \frac{1}{\pi^2} \frac{1 + s}{s} (\operatorname{arc\,tg} \sqrt{s})^2 - J_4,$$

$$J_4 = \frac{2}{s\pi^2}\int\limits_{\operatorname{tg}\alpha=0}^{\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{s}} \alpha\,\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{s}\pi^2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{s} - J_5,$$

$$J_5 = \frac{2}{s\pi^2}\int\limits_{\operatorname{tg}\alpha=0}^{\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{s}} \operatorname{tg}\alpha\,d\alpha = \frac{1}{s\pi^2}\log(1+s).$$

Somit wird, wenn wir zusammenfassen,

$$J_3 = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{1+s}{s}(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{s})^2 - \frac{2}{\sqrt{s}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{s} + \frac{\log(1+s)}{s}\right\}$$

und schliesslich

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} J = \frac{1}{\pi^2}\Big\{&\frac{1+s}{s}(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{s})^2 - \frac{2}{\sqrt{s}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{s} + \\ &\frac{\log(1+s)}{s} + \frac{s}{4}\log\frac{s+2}{s} - \frac{s}{2(s+2)}\Big\}. \end{aligned}\right.$$

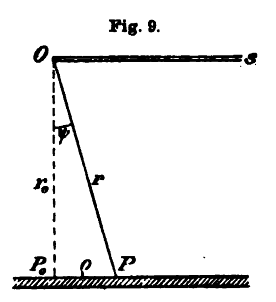
Diese etwas umständliche Formel lässt sich, je nachdem man s sehr gross oder sehr klein voraussetzt, durch die folgenden einfacheren ersetzen:

$$(33')\qquad \left\{\begin{aligned} &s \text{ sehr gross (nächste Nähe der Schattengrenze):} \\ &\qquad J = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{\pi^2}{4} - \frac{2\pi}{\sqrt{s}} + \frac{\log s}{s} + \frac{14+\pi^2}{4s} + \cdots\right\}, \\ &s \text{ sehr klein (einige Entfernung von der Schattengrenze):} \\ &\qquad J = \frac{s}{4\pi^2}\left\{1 + \log 2 - \log s + \cdots\right\}. \end{aligned}\right.$$

Aus (33) resp. (33') kann man leicht zusammengehörige Werthe von J und s berechnen. Einige mögen hier aufgeführt werden:

$$(34)\qquad \left\{\begin{matrix} s = & \infty, & 25, & 16, & 10, & 4, & 2, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{25}, \\ J = & 0{,}25, & 0{,}16, & 0{,}14, & 0{,}12, & 0{,}09, & 0{,}07, & 0{,}05, & 0{,}03, & 0{,}02, & 0{,}01. \end{matrix}\right.$$

Die Bedeutung von s kann an der Hand von Fig. 9 erläutert werden. Es bezeichne r_0 den Abstand der photographischen Platte von der Schirmkante; die Platte möge senkrecht zur Schattengrenze stehen. Ist P ein beliebiger Punkt (r, ψ) der Platte, so ist



$$OP = r, \qquad OP_0 = r_0 = r\cos\psi.$$

Ferner werde

$$PP_0 = \varrho$$

gesetzt, so dass ϱ den Abstand des betrachteten Punktes der Platte von der Schattengrenze bedeutet. Dann haben wir (s. Gl. (32)):

$$s = \frac{\lambda}{r - r_0}, \quad r = \sqrt{r_0^2 + \varrho^2} = r_0\left(1 + \frac{\varrho^2}{2 r_0^2} + \cdots\right)$$

also

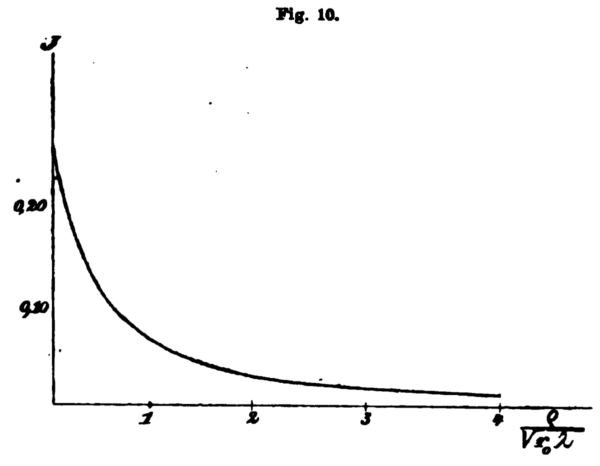
(35) $$s = \frac{2 r_0 \lambda}{\varrho^2} \quad \text{oder umgekehrt} \quad \varrho = \sqrt{\frac{2 r_0 \lambda}{s}}.$$

Für die Deutung der Beobachtungen ist offenbar die Grösse ϱ bequemer wie s. Wir schreiben daher die vorige kleine Tabelle so um, dass sie die Abhängigkeit der relativen Intensität J von ϱ erkennen lässt:

(34') $$\begin{cases} \frac{\varrho}{\sqrt{r_0 \lambda}} = 0{,}00,\ 0{,}28,\ 0{,}35,\ 0{,}45,\ 0{,}71,\ 1{,}00,\ 1{,}41,\ 2{,}00,\ 2{,}82,\ 7{,}07, \\ J = 0{,}25,\ 0{,}16,\ 0{,}14,\ 0{,}12,\ 0{,}09,\ 0{,}07,\ 0{,}05,\ 0{,}03,\ 0{,}02,\ 0{,}01. \end{cases}$$

In Fig. 10 haben wir ϱ in Einheiten von $\sqrt{r_0 \lambda}$ auf einer Abscissenaxe, J als Ordinate aufgetragen. Wie man sieht, spielt sich der Abfall der Intensität in nächster Nähe der Schattengrenze ab und findet gleichförmig (ohne Maxima und Minima) statt.

Fig. 10.



Wir kommen nun auf die oben gestellte Aufgabe zurück: *Die Impulsbreite λ durch den Vergleich von Theorie und Beobachtung zu bestimmen.* Die Lösung dieser Aufgabe denken wir uns etwa folgendermassen:

Man bestimme auf der photographischen Platte, welche das Beugungsbild trägt, diejenige Stelle, an der die photographische Wirkung beispielsweise die Hälfte oder $\frac{1}{5}$ der auf der Schattengrenze vorhandenen Wirkung ausmacht, und messe die Abstände (ϱ_1 oder ϱ_2) dieser Stellen von der Schattengrenze. Nach unserer Tabelle gehören zu

$$J = \frac{1}{2}\, 0{,}25 \quad \text{bez.} \quad J = \frac{1}{5}\, 0{,}25$$

die ungefähren Werthe

$$\varrho_1 = 0{,}45 \sqrt{r_0 \lambda} \quad \text{bez.} \quad \varrho_2 = 1{,}41 \sqrt{r_0 \lambda}.$$

Somit ergiebt sich

$$\lambda = \frac{5 \varrho_1^2}{r_0} = \frac{\varrho_2^2}{2 r_0}.$$

Ist also ϱ_1, ϱ_2 und r_0 gemessen, so kann λ durch diese oder ähnliche Beziehungen berechnet werden.

Dabei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die photographische Wirkung der auffallenden Strahlungsintensität proportional ist, was bekanntlich in der Regel nicht der Fall ist. Genau genommen müsste daher der oben gemeinten Messung der Intensitäten ein Studium der Platte, d. h. des Abhängigkeitsgesetzes zwischen photographischer Wirkung und Strahlungsintensität vorhergehen. Auf Grund dieses Gesetzes hätte man dann von der beobachteten Intensität der photographischen Wirkung erst auf die Intensität der Strahlung und von dieser in der eben angegebenen Weise auf die Impulsbreite λ zu schliessen.

Es lässt sich nicht verkennen, dass sowohl die Grössenbestimmung der photographischen Wirkung wie ihre Abhängigkeit von der Strahlungsintensität wie endlich die Messung der zu einer gewissen photographischen Wirkung gehörigen Abstände ϱ nur sehr ungenau möglich ist. Trotzdem dürfte die beschriebene Methode zu einer ungefähren Abschätzung der Impulsbreite vielleicht genügen. Eine sehr viel zuverlässigere Methode zur Bestimmung von λ wird in § 13 entwickelt werden.

§ 9.

Behandlung des Halbebenenproblems nach dem Huygens'schen Princip. Vorbereitung.

Es hat sicher ein hohes methodisches Interesse, zu wissen, wie weit man die *Beugung der Impulse* durch die gewöhnliche Methode des Huygens-schen Principes beherrscht. Indem ich mich dazu wende, beantworte ich eine Frage, die an mich gelegentlich von Hrn. W. Voigt gestellt wurde.

Bekanntlich kann man vom Huygens'schen Principe aus die *Beugung der periodischen Wellen* bewundernswürdig gut vorhersagen, trotz der Bedenken (vgl. die Anm. auf pag. 2), die sich gegen diese Methode erheben. Die Uebereinstimmung zwischen den auf diesem und den auf einwandfreierem Wege gefundenen Lösungen geht sogar noch wesentlich weiter, als man zunächst denken möchte: sie beschränkt sich nicht auf die nächste Nähe der Schattengrenze, sondern reicht bis tief in das Gebiet des geometrischen Schattens hinein. Dies ergiebt sich aus dem Vergleich einer Arbeit von Hrn. E. Maey[1]) mit meiner das gleiche Thema, (die Beugung an einer Halbebene,) behandelnden[2]), sowie einer Poincaré-schen[3]) Abhandlung. Herr Maey findet nämlich, vom Boden des Huygens'schen Principes aus, indem er die Kirchhoff'schen Rechnungen einige Schritte weiterführt und solche Terme beibehält, die bei der ge-

1) Diss., Königsberg, 1892, Annalen der Physik u. Chemie (Wied. Ann.) Bd. 49, 1893.

2) l. c. Math. Ann. Bd. 47.

3) l. c. Acta Math. Bd 16 und 20.

wöhnlichen Beschränkung auf die nächste Nähe der Schattengrenze vernachlässigt werden dürfen, fast genau diejenigen Ausdrücke, die aus den Poincaré'schen, sowie aus meinen Formeln bei Weglassung des an der Schirmoberfläche reflectirten Lichtes, also bei dem oben besprochenen Uebergange von dem absolut reflectirenden zu dem schwarzen Körper entsteht, falls nur die Wellenlänge als hinlänglich klein vorausgesetzt wird. Dasselbe wird sich hier zeigen: Wenn wir die *Beugung eines Impulses an der Halbebene* auf Grund des Huygens'schen Principes berechnen, so finden wir fast genau dieselben Formeln und genau dasselbe qualitative Verhalten des gebeugten Impulses, wie auf dem früheren Wege, wenn nur die Impulsbreite hinlänglich klein ist.

Natürlich ist es eine historisch ungerechtfertigte Verallgemeinerung, wenn wir auch bei diesen nicht-periodischen Zuständen von dem Huygens-schen Principe sprechen. Wir meinen damit ersichtlich die *Kirchhoff'sche Formulirung dieses Principes*, welche von der Periodicität des Zustandes absieht und auf unsere impulsiven Vorgänge ebenso gut wie auf die optischen angewandt werden kann.

Die Kirchhoff'sche Fassung bezieht sich bekanntlich auf Vorgänge in einem dreidimensionalen Gebiet. Auf die eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche sich der Uebertragung auf zwei Dimensionen entgegenstellen, hat Herr V. Volterra[1]) hingewiesen. Derselbe giebt dem Huygens'schen Principe bei zwei Dimensionen die folgende sehr bequeme Form:

$$(36)\quad \begin{cases} 2\pi u(x,y,t) = \int ds \left\{ \dfrac{\delta}{\delta n} \displaystyle\int_R^\infty u\left(\xi, \eta, t - \frac{z}{V}\right) \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{\partial}{\partial n} \displaystyle\int_R^\infty u\left(\xi, \eta, t - \frac{z}{V}\right) \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} \right\}. \end{cases}$$

Hier bedeutet u irgend eine (gewissen Stetigkeitsbedingungen genügende und für $t = -\infty$ in dem betrachteten Gebiet sammt ihren ersten Ableitungen hinreichend stark verschwindende) Lösung der Gleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$; das äussere Integral ist über die Randcurve des zweidimensionalen Gebietes zu erstrecken; R ist der Abstand des festen Punktes x, y und des bei der Integration variabeln Punktes ξ, η; das Zeichen $\frac{\delta}{\delta n}$ und $\frac{\partial}{\partial n}$ meint die folgende Operation:

$$\frac{\delta}{\delta n} = \frac{\partial R}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial R}, \qquad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial n};$$

---

1) Acc. dei Lincei, Rendiconti, (ser 5), Bd. 1, 2. Semester (1892) pag. 161 und Acta Math. Bd 18 (1894), Art. 10 und 11.

und zwar sind bei der Differentiation nach R die Variabeln ξ und η, bei den Differentiationen nach ξ und η die Grösse R wo sie explicit auftritt, als constant anzusehen; n ist die nach dem Innern des Gebietes genommene Normale.

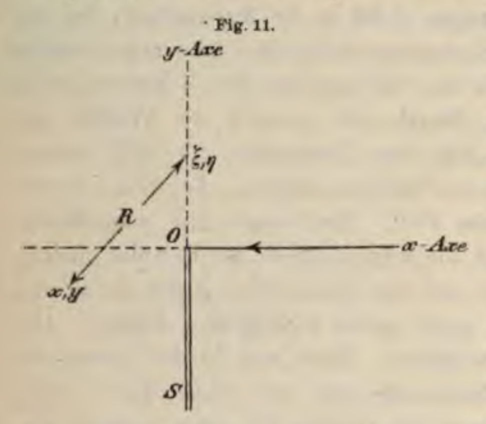
Diese Formel ist durchaus strenge; nicht so die Anwendung, die wir davon auf die Berechnung der Beugungserscheinungen zu machen haben werden. Um nach jener Formel u für eine gewisse Zeit t berechnen zu können, müsste man nämlich den Werth von u sowie die Werthe der partiellen Ableitungen von u für jede dem Zeitpunkte $t - R/V$ vorangehende Zeit längs der Begrenzung des Gebietes kennen. *Letzteres ist aber bei den Beugungsaufgaben nicht der Fall.* Man kann nur angenäherte Werthe dieser Grössen angeben (vgl. die folgende Seite als Beispiel hierzu), die sich nicht theoretisch sondern nur mit Hinzuziehung der Erfahrung rechtfertigen lassen und die sicher nicht genau richtig sein können. Die Methode lässt sich daher etwa so schildern: *Man setzt in die Formel des Huygens'schen Principes falsche Randwerthe ein und findet durch dieses Princip richtige Werthe für das Innere des Gebietes (!)*, oder genauer ausgedrückt: *Man setzt angenäherte Randwerthe ein und findet eine angenäherte Darstellung der gesuchten Lösung im Innern des Gebietes.*

Würde man aus der nach Formel (36) ermittelten angenäherten Lösung rückwärts ihre Werthe auf der Begrenzung des Gebietes ableiten, so würde man zu Werthen (u_1) kommen, welche keineswegs mit den ursprünglich benutzten Randwerthen (u_0) übereinstimmen. (Dies wird sich in dem folgenden Beispiel pag. 64 in der That zeigen.) Es bietet sich daher hier die interessante Möglichkeit dar, diese neuen Randwerthe (u_1) in die Formel (36) abermals einzutragen, dadurch eine neue Function für das Innere des Gebietes abzuleiten, welche zu neuen Randwerthen (u_2) Anlass geben würde. Man wird vermuthen, dass man so durch fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens die Lösung fortgesetzt verbessern wird, dass das Verfahren convergirt und dass *die Grenze, der die successiven Näherungen u_i zustreben, die wahre Lösung der betr. Beugungsaufgabe vorstellt.* Jedoch stehen der Ausführung des Verfahrens, ja schon dem Beweise seiner Convergenz, scheinbar unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen. Wir begnügen uns daher im Folgenden, so wie es in der Optik üblich ist, mit dem ersten Schritte.

Als Gebiet „G“ haben wir bei der Beugung an der Halbebene denjenigen Theil der xy-Ebene anzusehen, welcher hinter der Spur des Beugungsschirmes und seiner geradlinigen Verlängerung liegt. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der ebene Impuls senkrecht zum Schirm einfällt und machen wir, wie früher, die Einfallsrichtung zur positiven x-Axe, so ist die Begrenzung von G durch $x = 0$ und G selbst durch $x < 0$ gegeben. Die Schattengrenze ist die negative

x-Axe; die Integration nach ds erstreckt sich über die negative und positive y-Axe (Schirmspur und Verlängerung derselben).

Welche Werthe von u werden wir nun bei der Integration längs der y-Axe zu Grunde legen? Wir nehmen an, dass sich hinter dem Schirm ein Schatten ausbilden wird, welcher um so tiefer ist, je näher wir an die hintere Seite des Schirmes herangehen. *Wir setzen also längs der negativen y-Axe*



$$u = 0,$$

sowie

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Wir nehmen ferner an, dass auf der Verlängerung des Schirmes der Zustand durch die Anwesenheit des letzteren nicht gestört wird. *Wir setzen also längs der positiven y-Axe u gleich dem einfallenden ebenen Impuls*

$$u = u_0 = f(x + Vt),$$

wo f eine Function von der pag. 19 beschriebenen Beschaffenheit bedeutet. Beide Annahmen sind natürlich nicht genau zutreffend und enthalten überdies eine Vorwegnahme des zu Beweisenden.

Wir führen nun zunächst das nach z genommene Integral in Gleichung (36) aus. Dasselbe lautet auf Grund unserer Annahmen

$$(37) \qquad J = \int_R^\infty f(\xi + Vt - z)\frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}} = \int_{-\infty}^{\xi + Vt - R} f(\varrho)\frac{d\varrho}{\sqrt{(\xi + Vt - \varrho)^2 - R^2}},$$

während die Integration nach ds zu ersetzen ist durch

$$(37') \qquad \int ds\{\ \} = \int_0^\infty d\eta\{\ \}.$$

In (37) benutzen wir für f wieder die Rechtecksform, indem wir setzen:

$$f(\varrho) = 0, \text{ wenn } |\varrho| > \frac{\lambda}{2}; \quad f(\varrho) = 1, \text{ wenn } |\varrho| < \frac{\lambda}{2}.$$

Wir haben nun (ähnlich wie pag. 40) drei Fälle zu unterscheiden, je nach der gegenseitigen Lage des Integrationsgebietes (ϱ) und des Gebietes, in dem f von Null verschieden ist. *Beide Gebiete können sich ausschliessen, Fall α; sie können sich theilweise decken, Fall β; oder das erste kann das zweite vollständig enthalten, Fall γ.* Die Bedingungen für diese drei Fälle sind:

$$\alpha)\quad \xi + Vt - R < -\frac{\lambda}{2},$$
$$\beta)\quad -\frac{\lambda}{2} < \xi + Vt - R < +\frac{\lambda}{2},$$
$$\gamma)\quad \frac{\lambda}{2} < \xi + Vt - R.$$

Hier können wir noch $\xi = 0$ setzen, da es sich ja um die Werthe von J längs der y-Axe ($\xi = 0$) handelt; wir mussten in (37) nur deshalb die Abhängigkeit des Integrales von ξ zum Ausdruck bringen, weil später nach ξ differentiirt werden wird. Bei der Abgrenzung unserer drei Fälle α), β), γ) aber ist dies nicht nöthig, so dass wir die vorstehenden Ungleichungen auch so schreiben können:

$$\alpha)\quad R > Vt + \frac{\lambda}{2},$$
$$\beta)\quad Vt + \frac{\lambda}{2} > R > Vt - \frac{\lambda}{2},$$
$$\gamma)\quad Vt - \frac{\lambda}{2} > R.$$

Im Falle α) verschwindet nun f für alle Werthe, welche der Integrationsvariabeln ϱ in (37) beizulegen sind; wir haben daher ersichtlich:

$$(38)_\alpha \qquad J = 0.$$

Im Falle β) wird

$$J = \int\limits_{-\frac{\lambda}{2}}^{\xi + Vt - R} \frac{d\varrho}{\sqrt{(\xi + Vt - \varrho)^2 - R^2}} = \int\limits_{R}^{\xi + Vt + \frac{\lambda}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}},$$

woraus sich ergiebt

$$(38)_\beta \qquad J = \log \frac{\left(\xi + Vt + \frac{\lambda}{2}\right) + \sqrt{\left(\xi + Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}}{R}.$$

Im Falle γ) endlich haben wir

$$J = \int\limits_{-\frac{\lambda}{2}}^{+\frac{\lambda}{2}} \frac{d\varrho}{\sqrt{(\xi + Vt - \varrho)^2 - R^2}} = \int\limits_{\xi + Vt - \frac{\lambda}{2}}^{\xi + Vt + \frac{\lambda}{2}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - R^2}}$$

oder

$$(38)_\gamma \qquad J = \log \frac{\xi + Vt + \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\xi + Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}}{\xi + Vt - \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\left(\xi + Vt - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}}.$$

Sodann sind die Werthe $\frac{\partial J}{\partial n}$ und $\frac{\delta J}{\delta n}$ zu bilden, wobei, wie aus

Fig. 11 ersichtlich ist, $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \xi}$ ist. Indem wir nach Ausführung der Differentiation $\xi = 0$ setzen, unter R^2 also nunmehr die Grösse $x^2 + (y - \eta)^2$ verstehen, erhalten wir in den drei unterschiedenen Fällen nach geringen Umformungen:

$$(39)_\alpha \qquad \frac{\delta J}{\delta n} - \frac{\partial J}{\partial n} = 0,$$

$$(39)_\beta \qquad \text{„} \quad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{\left(Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}} - \frac{x}{R^2}\,\frac{Vt + \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\left(Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}},$$

$$(39)_\gamma \qquad \text{„} \quad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{\left(Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}} - \frac{x}{R^2}\,\frac{Vt + \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\left(Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}},$$

$$- \frac{1}{\sqrt{\left(Vt - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}} + \frac{x}{R^2}\,\frac{Vt - \frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\left(Vt - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - R^2}},$$

Schliesslich erhalten wir die gesuchte Darstellung von u, indem wir diese Ausdrücke nach η integriren (s. Gl. (35) und (37')):

$$(40) \qquad 2\pi u(x, y, t) = \int_0^\infty \left(\frac{\delta J}{\delta n} - \frac{\partial J}{\partial n}\right) d\eta.$$

§ 10.

Durchführung der vorangehenden Methode und Vergleichung mit der früheren.

Bei der weiteren Behandlung des Integrales (40) haben wir eine Reihe verschiedener Fälle zu unterscheiden je nach der Lage des Punktes xy und je nach der Grösse von t. Der Punkt x, y kann entweder *im Gebiete des geometrischen Schattens* ($x < 0$, $y < 0$) oder *im bestrahlten Gebiete* ($x < 0$, $y > 0$) liegen. Der erste Fall interessirt uns vornehmlich und soll uns zunächst beschäftigen. Um den Punkt (x, y) schlagen wir zwei Kreise mit den Radien

$$r_1 = Vt + \frac{\lambda}{2} \quad \text{und} \quad r_2 = Vt - \frac{\lambda}{2}.$$

Dabei können je nach der Grösse von t drei Fälle eintreten: *Keiner der beiden Kreise schneidet die positive y-Axe, beide schneiden dieselbe, nur der grössere schneidet sie.* Diese drei Fälle entsprechen genau den drei pag. 40 gemachten Fallunterscheidungen. Bezeichnen wir nämlich wie früher mit

r den Abstand des Punktes xy vom Schirmrande, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so sind unsere drei Fälle durch die Ungleichungen charakterisirt:

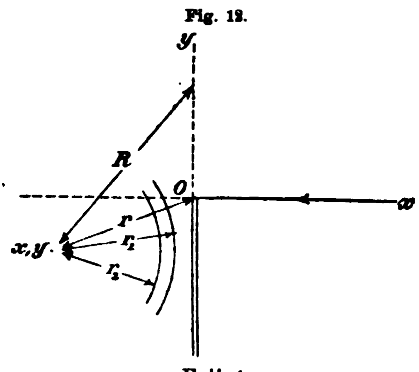
$$1)\qquad r > r_1 \qquad \text{oder} \qquad r > Vt + \frac{\lambda}{2},$$

$$2)\qquad r < r_2 \qquad \text{„} \qquad r < Vt - \frac{\lambda}{2},$$

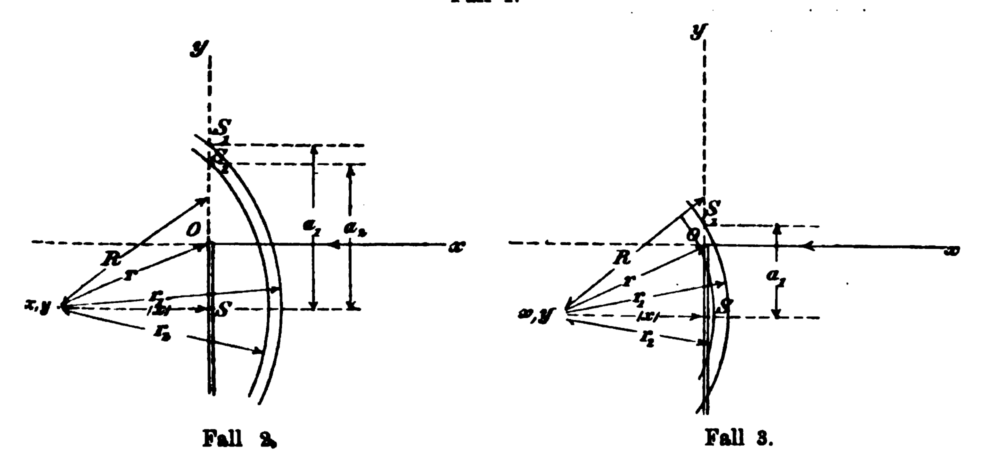
$$3)\qquad r_2 < r < r_1 \qquad \text{„} \qquad Vt - \frac{\lambda}{2} < r < Vt + \frac{\lambda}{2}.$$

Sie werden durch die folgenden Figuren erläutert:

Fig. 12.



Fall 1.



Fall 2. Fall 3.

1) Im ersten Fall ist, wie man sieht, längs des ganzen Integrationsgebietes $R > r$ und also auch

$$R > Vt + \frac{\lambda}{2}.$$

Hier liegt also der früher mit α) bezeichnete Fall vor. Bei der Ausrechnung des Integrales (40) haben wir daher für $\frac{\partial J}{\partial n} - \frac{\partial J}{\partial n}$ den in $(39)_\alpha$

angegebenen Werth Null einzusetzen. Somit folgt in diesem ersten Falle

$$(41)_1 \qquad u = 0,$$

in Uebereinstimmung mit Gleichung $(28)_1$.

3) Gehen wir zunächst zum dritten Falle über, wo der Kreis r_1 die positive y-Axe schneidet, der Kreis r_2 aber nicht. Der Schnittpunkt S_1 habe die Coordinate $y = \eta_1$. Alle Punkte der y-Axe, deren Coordinate $\eta < \eta_1$ ist, haben vom Punkte xy einen Abstand R, welcher $> r_2$, aber $< r_1$ ist. Für diese Punkte gilt also die Ungleichung

$$Vt + \frac{\lambda}{2} > R > Vt - \frac{\lambda}{2}.$$

In allen Punkten der y-Axe dagegen, deren Coordinate $\eta > \eta_1$ ist, wird auch $R > r_1$ oder

$$R > Vt + \frac{\lambda}{2}.$$

Die erste Ungleichung entspricht dem früheren Falle β), die letztere dem Falle α). Das Integral (40) zerlegt sich so in die zwei Integrale:

$$\int_0^\infty d\eta = \int_0^{\eta_1} d\eta + \int_{\eta_1}^\infty d\eta,$$

von denen das zweite wegen $(39)_\alpha$ verschwindet. Das erste lautet nach $(39)_\beta$:

$$\int_0^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2 - (y-\eta)^2}} - r_1 x \int_0^{\eta_1} \frac{1}{x^2 + (y-\eta)^2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2 - (y-\eta)^2}}.$$

Hier haben wir zur Abkürzung gesetzt:

$$(42) \qquad a_1 = \sqrt{\left(Vt + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{r_1^2 - x^2} = \eta_1 - y,$$

so dass a_1 (vgl. Fig. 12, Fall 3) den Abstand SS_1 des Schnittpunktes S_1 vom Fusspunkte S des von xy auf die y-Axe gefällten Lotes bedeutet. Die Länge dieses Lotes ist, vom Vorzeichen abgesehen, gleich der x-Coordinate des Punktes xy und kann füglich mit $|x|$ bezeichnet werden.

Führen wir die Integrationsvariable φ ein, indem wir setzen:

$$(43) \qquad \sin\varphi = \frac{\eta - y}{a_1}, \qquad \sin\alpha_1 = -\frac{y}{a_1} = \frac{|y|}{a_1},$$

so geht das vorige Integral über in[1]):

---

1) Wir benutzen hier und im Folgenden die Integrationsformel:

$$\int \frac{d\varphi}{A^2\cos^2\varphi + B^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{AB} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{B}{A} \operatorname{tg}\varphi\right).$$

$$\int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - r_1 x \int_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x^2 \cos^2\varphi + r_1{}^2 \sin^2\varphi} = \pi - \alpha_1 + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{x} \operatorname{tg}\alpha_1\right).$$

Somit ergiebt sich nach Gl. (40):

$$(41)_3 \qquad u = \frac{1}{2\pi}\left\{\pi - \alpha_1 + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{x}\operatorname{tg}\alpha_1\right)\right\}.$$

Diesen Ausdruck wollen wir, unter Vernachlässigung kleiner Grössen, etwas vereinfachen und damit zugleich dem früher in $(28)_3$ abgeleiteten Ausdruck näher bringen. Wir unterscheiden zu dem Zweck die beiden Möglichkeiten, dass der Punkt (xy) in einiger Entfernung von der Schattengrenze, oder ihr sehr nahe liegt. Im ersten Fall ist nahezu $\frac{y}{a_1} = -1$ (denn y und a_1 unterscheiden sich nur um die kleine Grösse η_1, die dann klein gegen a_1 ist), im zweiten Falle haben wir angenähert $\frac{x}{r_1} = -1$ (denn x^2 und $r_1{}^2$ unterscheiden sich um die Grösse $a_1{}^2$, die im zweiten Falle klein gegen $r_1{}^2$ ist). Im ersten Falle wird daher nahezu: $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ und $u = 0$; im zweiten Falle dürfen wir setzen:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{x}\operatorname{tg}\alpha_1\right) = \operatorname{arc\,tg}(-\operatorname{tg}\alpha_1) = -\alpha_1$$

und daher

$$(41')_3 \qquad u = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right\}.$$

Die letzte Formel kann übrigens gleichzeitig auch im ersten Falle, d. h. in einiger Entfernung von der Schattengrenze benutzt werden, da sie alsdann ebenfalls einen verschwindenden Werth für u liefert.

Aus der letzten Formel lesen wir bereits die uns von früher her bekannten Eigenschaften unseres „Cylinderimpulses" ab: *auf der Schattengrenze wird nämlich y und α_1 gleich Null und daher nach* $(41')_3$ $u = \frac{1}{2}$, *von diesem Werthe aus nimmt u schnell ab, um in einiger Entfernung von der Schattengrenze merklich zu verschwinden.*

Wir können aber auch durch Zulassung weiterer geringfügiger Vernachlässigungen unsere jetzige Darstellung des Cylinderimpulses direct in die frühere überführen. Nach (42) und (43) ist nämlich

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{\sqrt{a_1{}^2 - y^2}} = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r_1{}^2 - r^2}} =$$

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{r - |x|}{r_1 - r}\cdot\frac{r + |x|}{r_1 + r}}.$$

Der zweite Factor unter dem Wurzelzeichen kann aber gleich 1 gesetzt werden, wenn der Punkt (x, y) der Schattengrenze hinreichend nahe liegt;

denn alsdann ist $|x|$ nahezu gleich r_1, ausserdem unterscheidet sich r von r_1 um weniger als λ. Somit schreiben wir

$$\alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r_1 - |x|}{r_1 - r}}$$

und dementsprechend

$$\frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r_1 - r}{r - |x|}}.$$

Gleichung $(41')_3$ geht dann über in

$$(41'')_3 \qquad u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{r_1 - r}{r - |x|}},$$

eine Gleichung, welche in grösserer Entfernung von der Schattengrenze einen merklich verschwindenden Werth von u liefert und daher auch für solche Punkte gültig bleibt.

Das ist aber genau die frühere Gleichung $(28)_3$, wenn wir nur noch für r_1 seinen Werth $r_1 = Vt + \frac{\lambda}{2}$ eintragen und $|x|$ durch den Beugungswinkel ψ ausdrücken, $(|x| = r \cos \psi)$.

Wir erkennen also: *Auch im Falle* (3), *wo* $Vt + \frac{\lambda}{2} > r > Vt - \frac{\lambda}{2}$ *ist, liefert die Methode des Huygens'schen Principes fast genau dieselben Werthe von u wie unsere frühere Methode, wenn wir, was bei den soeben gemachten Vernachlässigungen durchweg geschehen ist, λ als eine sehr kleine Grösse behandeln.*

Wir wollen bei dieser Gelegenheit die Richtigkeit einer bereits pag. 57 gemachten Bemerkung nachweisen: dass nämlich die Lösung des Huygens'schen Principes gewissermassen mit sich selbst in Widerspruch steht, insofern als die aus dieser Lösung folgenden Randwerthe von u auf der Rückseite des Schirmes keineswegs genau mit denjenigen Randwerthen übereinstimmen, die bei der Integration benutzt wurden. Wir setzten nämlich ursprünglich (bei der Berechnung des Integrales (36)) auf der Rückseite des Schirmes $u = 0$ voraus. Aus Gleichung $(41)_3$ ergiebt sich dagegen für die Punkte des Schirmes, d. h. für $x = 0$:

$$u = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) \quad \text{d. h.} \quad u \neq 0.$$

So gut also auch die Uebereinstimmung unserer jetzigen und unserer früheren Lösung sein mag, so können wir doch unsere jetzige Methode nicht als logisch völlig befriedigend ansehen.

2) Wir haben noch die Betrachtung des Falles 2) nachzuholen, in dem sowohl der Kreis r_1, wie der Kreis r_2 die positive y-Axe schneidet; die Schnittpunkte seien S_1 und S_2, ihre Coordinaten η_1 und η_2. In allen Punkten zwischen O und S_2 (s. Fig. 12) ist $R < r_2$, zwischen S_1 und S_2

dagegen $r_2 < R < r_1$, jenseits von S_2 wird $R > r_1$. Bei der Integration von O bis S_2 liegt also der Fall β), von S_2 bis S_1 der Fall γ), von S_1 bis ∞ der Fall α) vor. Das Integral in Gleichung (40) zerlegt sich so in drei Bestandtheile:

$$(45) \qquad \int_0^\infty d\eta = \int_0^{\eta_2} d\eta + \int_{\eta_2}^{\eta_1} d\eta + \int_{\eta_1}^{\infty} d\eta,$$

von denen der letzte verschwindet.

Der erste lautet nach $(39)_\gamma$:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2-(y-\eta)^2}} - r_1 x \int_0^{\eta_2} \frac{1}{x^2+(y-\eta)^2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2-(y-\eta)^2}} \\ -&\int_0^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_2^2-(y-\eta)^2}} + r_2 x \int_0^{\eta_2} \frac{1}{x^2+(y-\eta)^2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_2^2-(y-\eta)^2}}, \end{aligned} \right.$$

hier ist a_1 durch (42) erklärt, während a_2 in analoger Weise bedeutet:

$$(42') \qquad a_2 = \sqrt{\left(Vt - \frac{\lambda}{2}\right)^2 - x^2} = \sqrt{r_2^2 - x^2} = \eta_2 - y.$$

Substituiren wir ähnlich wie in (43)

$$\sin\varphi_1 = \frac{\eta - y}{a_1}, \qquad \sin\varphi_2 = \frac{\eta - y}{a_2}$$

und setzen wir zur Abkürzung

$$(43') \qquad \sin\alpha_1 = \frac{|y|}{a_1}, \qquad \sin\alpha_2 = \frac{|y|}{a_2}, \qquad \sin\alpha = \frac{a_2}{a_1},$$

so gehen die Integrale (46) über in:

$$(46') \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\alpha_1}^{\alpha} d\varphi_1 - r_1 x \int_{\alpha_1}^{\alpha} \frac{d\varphi_1}{x^2\cos^2\varphi_1 + r_1^2\sin^2\varphi_1} \\ -&\int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_2 + r_2 x \int_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{x^2\cos^2\varphi_2 + r_2^2\sin^2\varphi_2}. \end{aligned} \right.$$

In derselben Weise behandeln wir den zweiten Bestandtheil auf der rechten Seite von (45). Derselbe lautet nach $(39)_\beta$:

$$(47) \qquad \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2-(y-\eta)^2}} - r_1 x \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{1}{x^2+(y-\eta)^2} \frac{d\eta}{\sqrt{a_1^2-(y-\eta)^2}}$$

und geht durch die soeben benutzten Substitutionen in

$$(47') \qquad \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_1 - r_1 x \int\limits_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{x^2 \cos^2\varphi_1 + r_1^2 \sin^2\varphi_1}$$

über. Addiren wir also (46') und (47'), so erhalten wir

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_1 - \int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_2 - r_1 x \int\limits_{\alpha_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{x^2 \cos^2\varphi_1 + r_1^2 \sin^2\varphi_1} + r_2 x \int\limits_{\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_2}{x^2 \cos^2\varphi_2 + r_2^2 \sin^2\varphi_2}.$$

Darauf führen wir die Integration nach der Anm. von pag. 62 aus und bekommen für u den folgenden Werth:

$$(41)_2 \qquad u = \frac{1}{2\pi}\left\{\alpha_2 - \alpha_1 - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_2}{x}\operatorname{tg}\alpha_2\right) + \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{r_1}{x}\operatorname{tg}\alpha_1\right)\right\}.$$

Wir haben noch zu untersuchen, wie weit dieser Werth mit dem im Falle 2 abgeleiteten früheren Werthe $(28)_2$ übereinstimmt.

Bemerken wir zunächst, dass dieser Ausdruck ebenso wie $(28)_2$ von der Grössenordnung λ ist; es unterscheiden sich nämlich α_1 und α_2 einerseits, r_1 und r_2 andrerseits nur um Glieder, welche λ zum Factor haben. In der That ist $r_1 = r_2 + \lambda$ und (nach Gl. (42'), (43')) bei Fortlassung der Glieder mit λ^2 etc.:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\lambda |y| \, Vt}{\sqrt{V^2 t^2 - r^2}} \, \frac{1}{V^2 t^2 - x^2} + \cdots.$$

Entwickeln wir also $(41)_2$ nach Potenzen von λ, so wird die Entwickelung mit der Potenz λ beginnen. Sie lautet nämlich, wie man nach einiger Rechnung findet:

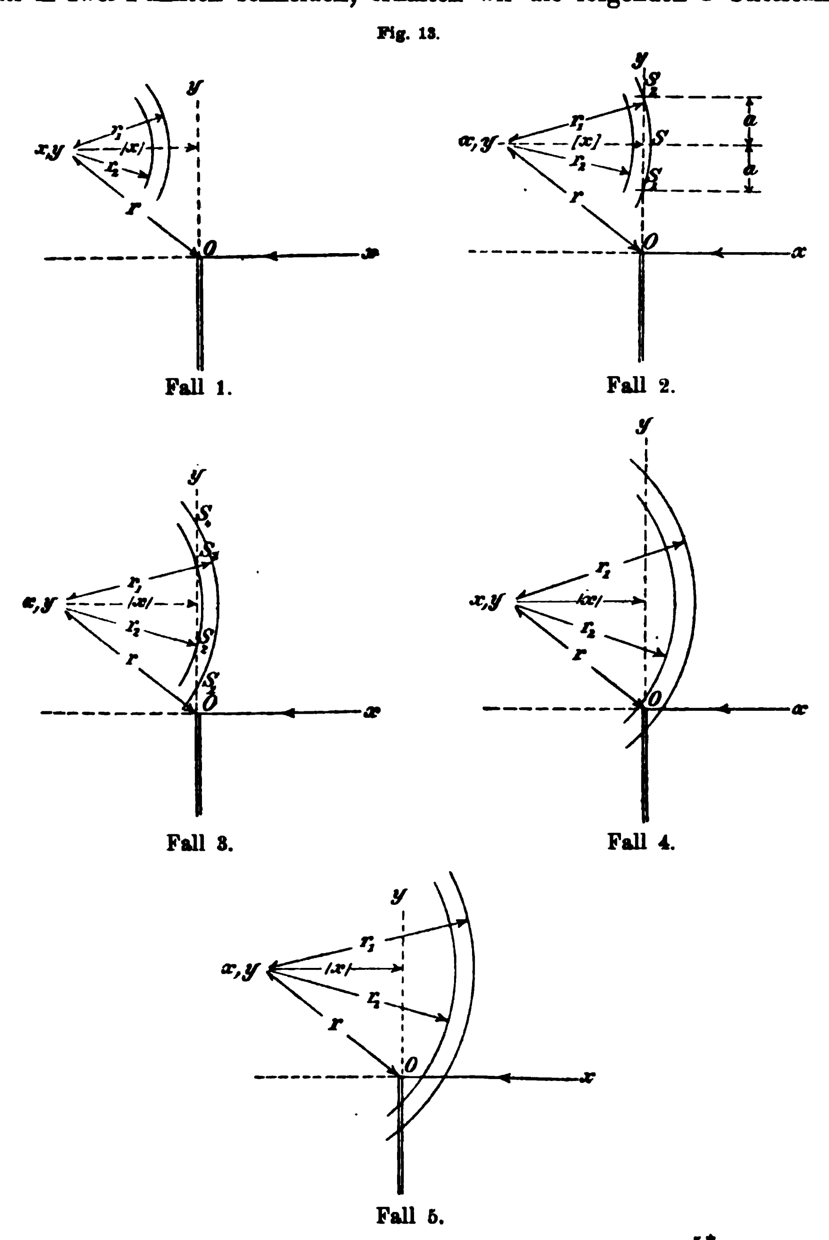
$$(41')_2 \qquad u = \frac{\lambda}{2\pi} \, \frac{|y|}{\sqrt{V^2 t^2 - r^2}} \, \frac{1}{Vt - |x|} + \cdots.$$

Dies ist zwar nicht genau der frühere Ausdruck $(28)_2$, auch nicht bis auf die höheren Potenzen von λ. Trotzdem liefert er in allen wesentlichen Zügen dasselbe Bild von der zeitlichen und räumlichen Vertheilung unseres „Residuums“, wie der frühere: auf der Schattengrenze ($y = 0$) verschwindet das Residuum dauernd; es füllt das Innere des Kreises $r = Vt - \frac{\lambda}{2}$ muldenförmig aus, indem es von der Schattengrenze nach dem Rande desselben sanft ansteigt; es wird überall Null für $t = \infty$ und ist durchweg um so schwächer, je kleiner die Impulsbreite λ ist.

Zusammenfassend werden wir also sagen können, dass *das Huygens'sche Princip auch im Falle 2 und überhaupt im ganzen Gebiet des geometrischen Schattens die Beugung unseres ebenen Impulses mit befriedigender Annäherung wiedergiebt.*

Was das *bestrahlte Gebiet* ($x < 0$, $y > 0$) betrifft, so mögen einige Andeutungen genügen. Um den Punkt (x, y) schlagen wir wieder die beiden Kreise $r_1 = Vt + \frac{\lambda}{2}$ und $r_2 = Vt - \frac{\lambda}{2}$. Je nachdem diese die positive y-Axe nicht schneiden oder schneiden, je nachdem sie in einem oder in zwei Punkten schneiden, erhalten wir die folgenden 5 Unterfälle:

Fig. 13.



Der Fall 1 ist charakterisirt durch $r_1 < |x|$. Dabei ergiebt sich leicht $u = 0$, eine Gleichung, welche sich folgendermassen in Worte fassen lässt:

Solange $Vt + \frac{\lambda}{2} < |x|$ *ist, ist weder der directe noch der gebeugte Impuls bis zum Punkte* (xy) *hingelangt.* —

Im Falle 2 haben wir $r_2 < |x| < r_1 < r$. Sind S_1 und S_2 die beiden Schnittpunkte von r_1 mit der positiven y-Axe, η_1 und η_2 ihre Coordinaten, so gilt zwischen S_1 und S_2 ersichtlich $r_2 < R < r_1$ (Fall β)), jenseits von S_1 und S_2 aber $R > r_1$ (Fall α)). u ist dann durch die Formel gegeben:

$$2\pi u = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{a^2 - (y-\eta)^2}} - r_1 x \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\sqrt{a^2 - (y-\eta)^2}} \frac{1}{x^2 + (y-\eta)^2}.$$

Hier ist die Abkürzung benutzt: $a = \sqrt{r_1^2 - x^2}$, deren Bedeutung $(S_1 S + S S_2)$ aus Fig. 13 ersichtlich ist. Verfährt man bei der Integration ähnlich wie früher, so erhält man einfach:

$$2\pi u = 2\pi \quad \text{d. h.} \quad u = 1.$$

Für das Zeitintervall $|x| - \frac{\lambda}{2} < Vt < |x| + \frac{\lambda}{2}$ *ist also im Punkte* (x, y) *des bestrahlten Gebietes die Erregung constant gleich* 1.

Wir haben hier offenbar den *einfallenden Impuls* vor uns, dessen Grösse bei Zugrundelegung der Rechtecksform in der That gleich 1 ist. —

Im Falle 3 ist $|x| < r_2 < r_1 < r$. Heissen die Schnittpunkte unserer beiden Kreise der Reihe nach S_1, S_2, S_3, S_4, und die zugehörigen Coordinaten $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, so gilt zwischen 0 und S_1, sowie zwischen S_4 und ∞: $R > r_1$ (Fall α), zwischen S_1 und S_2 sowie zwischen S_3 und S_4: $r_2 < R < r_1$ (Fall γ), zwischen S_2 und S_3 endlich: $R < r_2$ (Fall β). Die Ausführung der Integration liefert dann genau den Werth 0, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll.

In diesem Falle ist der directe Impuls über den Punkt (x, y) *bereits hinweggegangen, während der gebeugte Impuls ihn noch nicht erreicht hat.*

Der Fall 4 greift Platz, wenn t so weit gewachsen ist, dass der Kreis r_1 über den Punkt O hinübergreift, der Fall 5, wenn dasselbe vom Kreise r_2 gilt. Die Verhältnisse liegen dann ebenso wie bei der Betrachtung des Schattengebietes im Falle 3 und 2. In unserem jetzigen Falle 4 haben wir im Punkte (x, y) die dem Cylinderimpuls entsprechende Erregung, im Falle 5 das Residuum des letzteren. Auf die formelmässige Darstellung dieser Erregungen verzichten wir, da sie ebenso lautet, wie bei der Behandlung des Schattengebietes.

Jedenfalls können wir sagen, *dass auch im bestrahlten Gebiete der Zustand durch die Methode des Huygens'schen Principes richtig, u. zw. in*

den ersten drei Fällen genau, in den letzten beiden angenähert richtig wiedergegeben wird.

Hiernach könnte man die Frage aufwerfen, ob unser früheres Verfahren überflüssig war und ob wir uns nicht besser von vornherein der üblichen Methode des Huygen'schen Principes angeschlossen hätten. Wir müssen hierauf mit Nein antworten.

Denn *erstlich* trägt unser jetziges Verfahren von vornherein nicht die Gewähr für die Richtigkeit seiner Resultate in sich. In der That sind, wie wir oben sahen, die Randwerthe, die wir in die Formel des Huygens'schen Principes einsetzten, keinesfalls genau richtig. Die Annahme, dass sie angenähert richtig sind, bedeutet eine Vorwegnahme des zu Beweisenden, welche in unserem Falle noch unbefriedigender ist, wie in der gewöhnlichen Optik, wo die gemeine Erfahrung von der nahezu vollständigen Schattenbildung hinter einem undurchsichtigen Objecte zeugt, während uns bei der Beugung der Impulse die optische Erfahrung im Stiche lässt und die akustische nicht sehr überzeugend ist.

Zweitens ist die jetzige Methode nur bei hinreichend kleiner Impulslänge λ anwendbar, weil nur in diesem Falle die benutzten Randwerthe als angenähert richtig gelten können. Bei grösseren Werthen von λ kann von einer absoluten Schattenbildung, wie sie bei Zugrundelegung der Randwerthe $u = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ vorausgesetzt wird, nicht die Rede sein. Dagegen war unsere frühere Methode von der Kleinheit von λ unabhängig.

Drittens aber zeigt ein Blick auf die Rechnungen dieses und der früheren Paragraphen, dass unsere frühere Methode in ihrer Durchführung und ihren Resultaten wesentlich einfacher ist, wie die jetzige. In der That haben wir früher die mühseligen Integrationen und Fallunterscheidungen nicht nöthig gehabt, welche das Huygens'sche Princip mit sich bringt. Man kann hier die häufig zutreffende Bemerkung machen, dass bei einem hinreichend einfach formulirten Problem die exakte Lösung schliesslich übersichtlicher und eleganter wird, wie eine angenäherte.

Dagegen bleibt der Methode des Huygens'schen Principes ein grosser Vorzug, der sie in der Optik für alle Zeiten unentbehrlich machen wird, der der grössten *Verallgemeinerungsfähigkeit.* Unter diesem Gesichtspunkte wird sie uns im nächsten Paragraphen wesentliche Dienste leisten.

§ 11.

Das Problem des Spaltes. Behandlung desselben nach der Methode der verzweigten Lösungen und nach der des Huygens'schen Principes.

Wie schon am Ende von § 8 bemerkt, ist die Berechnung der Impulsbreite aus den von einer Halbebene hervorgerufenen Beugungs-

erscheinungen sehr unsicher. Günstiger liegt die Sache bei dem Spalt, an dem auch die Beobachtung leichter und sicherer sein dürfte.

Thatsächlich beziehen sich die zur Zeit vorliegenden einzigen einwandfreien Beugungsbeobachtungen auf den Spalt. Wir wollen daher versuchen, die zu ihrer Deutung erforderliche Theorie zu entwickeln.

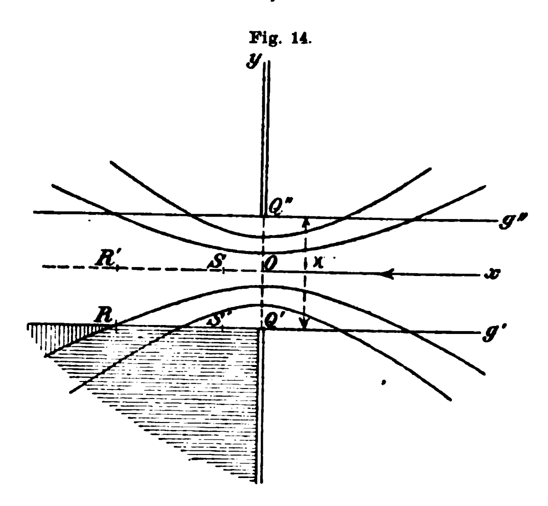
Was die entsprechenden optischen Phänomene betrifft, so habe ich bereits am Ende einer früher citirten Arbeit[1]) angedeutet, in welcher Weise ich mir ihre exakte Behandlung denke. Statt der zweiblättrigen Riemann'schen Fläche mit *einem* Verzweigungspunkte im Endlichen müsste man von einer zweiblättrigen Fläche ausgehen, welche *zwei* Verzweigungspunkte besitzt. Diese würden den Durchstossungspunkten der Ränder des Spaltes mit ihrer gemeinsamen Normalebene entsprechen. Der Zusammenhang dieser Fläche lässt sich am einfachsten so beschreiben, dass man sagt: *Man lege zwei schlichte Ebenen übereinander, markire in ihnen die Schnittpunkte mit den Spalträndern, sowie die Spuren der Spaltebenen. Längs der letzteren schneide man die beiden Ebenen auf und hefte die Schnittlinien wechselweise aneinander.* In der Optik würde es sich nun darum handeln, eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ zu construiren, welche auf dieser Riemann'schen Fläche eindeutig und stetig ist und gewissen anderen Bedingungen genügt, welche sie als Darstellung einer fortschreitenden ebenen Welle charakterisiren. Für sich genommen würde diese Lösung die Beugung einer ebenen Welle an einem Spalt in einer *absolut schwarzen Oberfläche* liefern, während man nach dem Spiegelungsprincip durch Uebereinanderlagerung zweier solcher Lösungen das befriedigender definirte Problem der Beugung an einem Spalt in einer *absolut reflectirenden* Ebene behandeln könnte.

Dasselbe gilt von der Beugung eines ebenen Impulses. Hier hat man gleichfalls von der soeben definirten Riemann'schen Fläche auszugehen, auf ihr eine Lösung der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta u$ zu construiren, welche sich auf der Fläche eindeutig und stetig verhält, welche für einen beliebig gewählten Anfangszeitpunkt $t = -T$ und für $r < R$ im unteren Blatte verschwindet, im oberen gleich dem unverzweigten Impuls u_0 wird und sich ähnlich in der grossen Entfernung $r = R$ von dem Coordinatenanfangspunkte für jede Zeit zwischen $-T$ und $+T$ verhält, (nämlich im unteren Blatte verschwindet, im oberen gleich u_0 wird). Eine solche Function würde direct die Beugung eines ebenen Impulses an einem Spalt mit geschwärzten Schirmoberflächen liefern; sie lässt sich auch dazu benutzen, um aus ihr die Lösung des völlig eindeutig definirten Problems der Beugung an einem Spalt von absolut reflectirenden Schirmoberflächen zusammenzusetzen.

1) Math. Ann. Bd. [illegible], pag. [illegible]

Leider ist es mir aber trotz wiederholter Bemühungen nicht gelungen, eine solche Function u aufzustellen, d. h. die Integration der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (Optik) bez. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta u$ (Röntgenstrahlung) auf der genannten Riemann'schen Fläche zu leisten.[1]) Es ist kein Zweifel, dass die Kenntniss einer solchen Function die Behandlung der betr. Beugungserscheinungen nicht nur exakter sondern auch übersichtlicher und einfacher gestalten würde, wie die Methode des Huygens'schen Principes. Auf letztere sehen wir uns nun doch angewiesen. Wir werden sie bei hinreichend kleinem λ ohne Bedenken anwenden, da wir bei dem Probleme der Halbebene die ziemlich weitgehende Uebereinstimmung ihrer Resultate mit unserer exakten Lösung nachgewiesen haben. Dabei werden wir auch von letzterer Nutzen ziehen, indem wir sie mit der Lösung des Huygens'schen Principes combiniren.

Fig. 14.



Die Einfallsrichtung des ebenen Impulses sei wie früher die positive x-Axe, sie möge durch die Mitte des Spaltes gehn und senkrecht zu den den Spalt formirenden Ebenen sein. Die Breite des Spaltes sei $\varkappa$. Das Randintegral $\int ds$, durch welches wir u hinter dem Schirme (für $x < 0$) darstellen, erstreckt sich zunächst auf die ganze y-Axe. Da wir aber bei der Anwendung des Huygens'schen Principes hinter den Schirmwänden $u = \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$ nehmen, so fallen die Integrationen von $-\infty \cdots -\frac{\varkappa}{2}$ und von $+\frac{\varkappa}{2} \cdots +\infty$ heraus und wir erhalten die zu Gleichung (40) analoge Darstellung.

1) Auch in der Potentialtheorie, wo die verzweigten Lösungen bei der Behandlung gewisser Randwerthaufgaben eine ähnliche Rolle spielen wie in der Optik, habe ich das Problem des Spaltes nicht lösen können. Vgl. meine Arbeit „Ueber verzweigte Potentiale", Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. 28 (1896), § 5. Die Bemerkungen über den Spalt habe ich l. c. vol. 39 pag. 161 abgeändert. Aber auch in der abgeänderten Fassung ist die Lösung nicht richtig. Sie giebt nicht die Green'sche Function des Spaltes, sondern die der Kreisscheibe, welche bekanntlich durch Inversion aus der Green'schen Function für die Halbebene abgeleitet werden kann und die von Hn. E. W. Hobson nach der Methode der verzweigten Lösungen direct behandelt worden ist. Vgl. Trans. Cambridge Phil. Soc. Bd. 18 (Stokes-Jubiläums-Band), pag. 277.

$$(48) \qquad 2\pi u(x, y, t) = \int_{-\frac{\varkappa}{2}}^{+\frac{\varkappa}{2}} \left(\frac{\delta J}{\delta n} - \frac{\partial J}{\partial n} \right) d\eta .$$

Dabei sind für $\frac{\delta J}{\delta n} - \frac{\partial J}{\partial n}$, je nach der Lage des Punktes x, y und je nach der Zeit t, genau die früheren Werthe $(39)_\alpha$, $(39)_\beta$, $(39)_\gamma$ einzutragen.

Wir können uns aber die Ausführung der Integration sparen. Bemerken wir nämlich, dass

$$\int_{-\frac{\varkappa}{2}}^{+\frac{\varkappa}{2}} d\eta = \int_{-\frac{\varkappa}{2}}^{\infty} d\eta - \int_{+\frac{\varkappa}{2}}^{\infty} d\eta .$$

Die rechts stehenden Integrale haben wir im vorigen Paragraphen berechnet, mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass dort die untere Grenze nicht $\pm \frac{\varkappa}{2}$, sondern 0 hiess. Wir fanden, dass sie in allen wesentlichen Stücken mit unserer zweiwerthigen Lösung $2\pi u$ übereinstimmten. Indem wir sie direct dieser Lösung gleichsetzen, vereinfachen wir die Rechnungen und corrigiren wenigstens theilweise die dem Huygens'schen Princip anhaftenden Ungenauigkeiten. Wir wollen schreiben:

$$\int_{-\frac{\varkappa}{2}}^{\infty} \cdots d\eta = 2\pi u', \quad \int_{+\frac{\varkappa}{2}}^{\infty} \cdots d\eta = 2\pi u''.$$

Alsdann bedeutet u' die Function des verzweigten Impulses für eine Riemann'sche Fläche, welche im Punkte $x = 0$, $y = -\frac{\varkappa}{2}$ und nur in diesem einen Verzweigungspunkt hat, oder auch den Zustand, welchen ein schwarzer Schirm, dessen Spur mit dem Stücke der y-Axe von $-\infty$ bis $-\frac{\varkappa}{2}$ zusammenfällt, bei auffallendem ebenen Impuls hervorruft. In der gleichen Weise bezieht sich u'' auf eine Riemann'sche Fläche mit dem Verzweigungspunkte $x = 0$, $y = +\frac{\varkappa}{2}$ bez. auf einen schwarzen Schirm, dessen Spur von $y = -\infty$ bis $y = +\frac{\varkappa}{2}$ reicht.

Aus (48) folgt somit einfach:

$$(49) \qquad u(x, y, t) = u' - u''.$$

Dies wäre die Lösung des Spaltproblems nach dem (in der angegebenen Weise corrigirten) Huygens'schen Princip. Vergleichen wir sie mit der oben postulirten strengen Lösung! Dass beide nicht genau übereinstimmen

können, ist klar, denn die unbekannte strenge Lösung sollte eine *zweiwerthige Function von x und y* sein, da sie ja auf einer zweiblättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig sein sollte. Die vorstehende Lösung da-

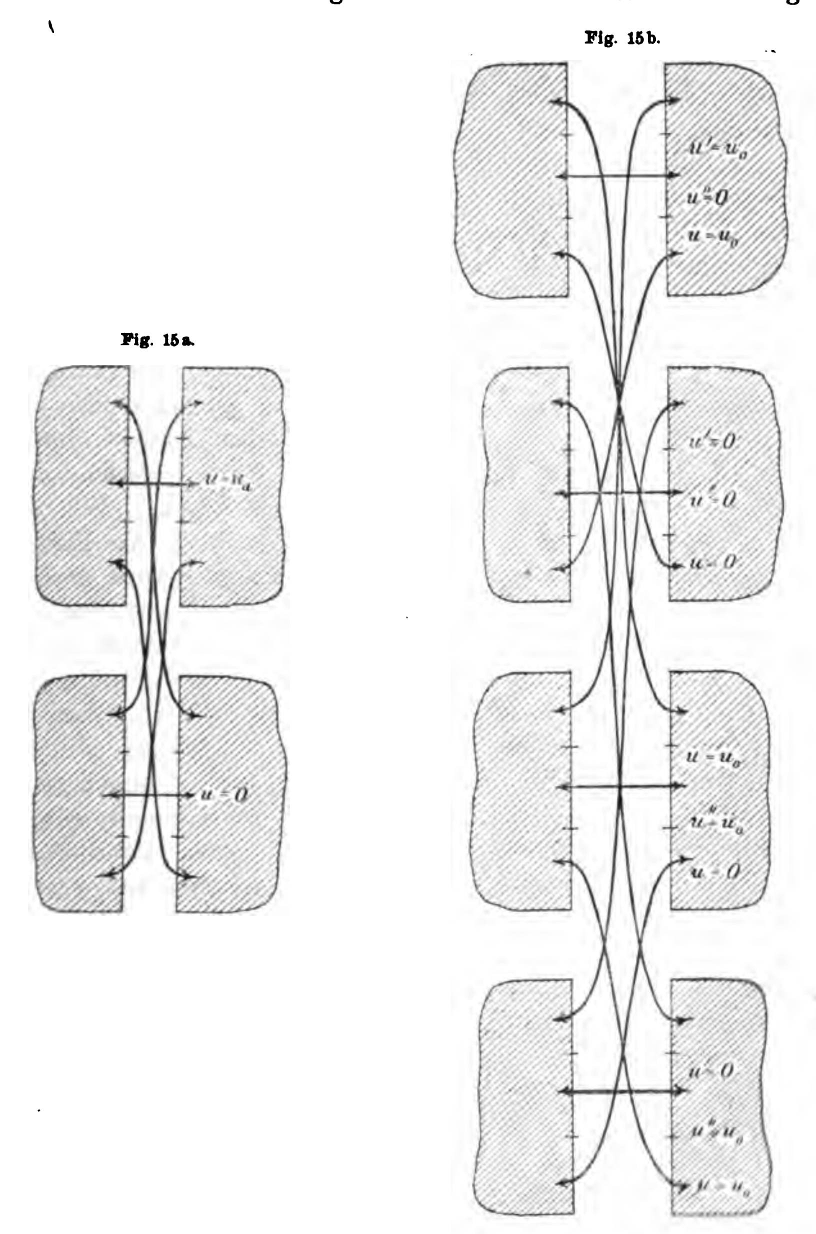


Fig. 15a.

Fig. 15b.

gegen ist eine *vierwerthige Function von x und y*, da sie sich aus den beiden verschieden verzweigten zweiwerthigen Functionen u' und u'' zusammen-

setzt. Sie gehört zu einer vierblättrigen Riemann'schen Fläche, welche etwa in folgender Weise erzeugt werden kann. Man lege zunächst vier schlicht verlaufende Ebenen (1, 2, 3, 4) übereinander und markire in ihnen sämmtlich die Durchstossungspunkte der beiden Spaltränder sowie die Spuren der beiden Spaltebenen. Dann schneide man alle vier Blätter längs der Spuren der beiden Spaltebenen auf. An der einen dieser Spuren verbinde man die Blätter 1 und 2, 3 und 4, an der anderen die Blätter 1 und 3, 2 und 4 wechselweise mit einander. Dadurch sind alle vier Blätter zu einer einheitlichen vierblättrigen Fläche verkoppelt.

Das Resultat dieses Processes wird durch Fig. 15b schematisch dargestellt, während Fig. 15a in derselben Weise die zweiblättrige Riemann'sche Fläche veranschaulicht, von der vorhin die Rede war.

Der charakteristische Unterschied zwischen beiden Flächen besteht darin, dass auf der zweiblättrigen Fläche *ein*, auf der vierblättrigen erst zwei Umläufe um beide Verzweigungspunkte zum Ausgangspunkte zurückführen. Wichtiger als dieser Unterschied in dem *Zusammenhange* der Flächen ist der folgende Unterschied in der *Werthevertheilung* der ursprünglich postulirten und der jetzt gefundenen Lösung. Wir suchten ursprünglich eine Lösung, welche auf dem einen Blatte der Fläche 15a im Anfangszustande für $t = -T$ gleich u_0, auf dem anderen gleich Null wird. Dagegen fanden wir durch das Huygens'sche Princip eine Lösung, welche dem folgenden Anfangszustande entspricht: Es wird u' und u'' für $t < -T$ je in zweien der vier Blätter von 15b gleich u_0, in zweien gleich Null; dementsprechend wird $u = u' - u''$ in einem Blatte gleich u_0, in einem anderen gleich $-u_0$, in den beiden übrigen gleich Null, (vgl. Fig. 15b, wo die Anfangswerthe von u', u'' und u eingetragen sind). Wir *suchten* also eine Lösung, die *einem* einfallenden Impulse entspricht; wir *fanden* eine solche, die aus der Combination *zweier*, (natürlich in verschiedenen Blättern) einfallender Impulse, eines positiven und eines negativen, hervorgeht.

Nun könnten wir ja, wenn wir von dem Problem des Spaltes mit absolut reflectirenden Oberflächen absehen und lediglich an den Spalt mit geschwärzten Schirmwänden denken, ebenso gut auf der vierblättrigen Fläche 15b operiren, wie auf der zweiblättrigen 15a (vgl. pag. 14). Wir müssten dann aber auf der vierblättrigen Fläche eine Lösung verlangen, die *einem* einfallenden Impulse entspricht, die also im Anfangszustande nur in *einem* der vier Blätter von Null verschieden, nämlich gleich u_0, wird.

Das Huygens'sche Princip liefert uns, wie wir sahen, eine solche Lösung *nicht*. Dementsprechend wird bei der Lösung des Huygens'schen Principes die Energie nicht nur in *einem* Sinne durch die Spaltebenen fliessen (nämlich nicht nur von dem Blatte, wo anfangs $u = u_0$, nach

den anstossenden Blättern hin), sondern es wird etwas Energie auch in der umgekehrten Richtung durch die Spaltebenen hindurchtreten (von dem Blatte, wo anfangs $u = -u_0$ ist, wird Energie in das Blatt übergehen, wo anfangs $u = +u_0$ war.) Wir werden daher sagen müssen: *Auch wenn wir diejenige Unbestimmtheit berücksichtigen, welche das Problem des schwarzen Körpers mit sich bringt, kann uns die Lösung des Huygens'schen Principes nicht völlig befriedigen. Denn sie stellt uns nicht die Ausbreitung eines einzigen Impulses auf der vierblättrigen Fläche dar, sondern die gleichzeitige Ausbreitung zweier entgegengesetzter Impulse, bei welcher die Energieströmung nicht dauernd in's Innere der Spaltwände hinein gerichtet sein kann.*

Trotzdem dürfen wir nach den Erfahrungen, die wir bei der doppelten Behandlung des Halbebenenproblems gemacht haben, annehmen, dass auch im Falle des Spaltes die Lösung nach dem Huygens'schen Princip eine gute Annäherung darstellen wird, sofern nur die Impulsbreite hinreichend klein ist. Jedenfalls werden wir diese Lösung den weiteren Untersuchungen zu Grunde legen,

Wir müssen uns nun die Lösung (49) etwas näher ansehen. Wir bezeichnen mit r' und r'' die Abstände des Punktes $P(x, y)$ von den beiden Spalträndern (in Fig. 14 den Punkten Q' und Q''), so dass

$$r' = \sqrt{x^2 + \left(y + \frac{\varkappa}{2}\right)^2}, \quad r'' = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{\varkappa}{2}\right)^2}.$$

Wir ziehen ferner die Geraden g' und g'', welche für die Einzelimpulse u' und u'' die Rolle von Schattengrenzen spielen. Auf den beiden Seiten einer jeden dieser Geraden wird jedesmal eine der Functionen u' und u'' durch verschiedene Formeln darzustellen sein: auf der einen Seite gelten die für das „untere“, auf der anderen die für das „obere Blatt“ abgeleiteten Formeln (28) bez. (29). Hinter dem Spalt werden sich offenbar zwei Schattengebiete ausbilden, das eine zwischen g' und der einen Seite des Schirms, das andere zwischen g'' und der anderen Seite. Das erstere gehört sowohl hinsichtlich der Function u' wie u'' zum unteren Blatte der betr. Riemann'schen Fläche. In dieses Gebiet gelangt daher nur gebeugte Strahlung. Das zweite Schattengebiet gehört zum oberen Blatte jener beiden Riemann'schen Flächen. In dem Ausdruck von u' sowohl wie von u'' kommt daher ein Term u_0 vor, welcher einfallende Strahlung bedeutet. Diese beiden Terme heben sich aber in der Differenz $u' - u''$ heraus, so dass, wie es sein muss, in dieses zweite Schattengebiet ebenfalls nur gebeugte Strahlung hineingelangt. Dagegen finden wir zwischen den Geraden g' und g'' neben der gebeugten auch eine von u' herrührende directe Strahlung.

Von Wichtigkeit wird für uns noch der geometrische Ort $r'' - r' = \lambda$

sein. Es ist dieses, (wenn der Spalt nicht zu eng, wenn nämlich $\varkappa > \lambda$ ist), ein Hyperbelast, welcher Q' zum Brennpunkt und die x- und y-Axe zu Hauptaxen hat. Seine Gleichung lautet

$$\frac{4y^2}{\lambda^2} - \frac{4x^2}{\varkappa^2 - \lambda^2} = 1. \tag{50}$$

Die Gerade g' wird von der Hyperbel in einem Punkte R geschnitten, der von Q' den Abstand $\frac{\varkappa^2 - \lambda^2}{2\lambda}$ hat.

Fassen wir nun einerseits das vertical, andrerseits das horizontal schraffirte Gebiet in Fig. 14 in's Auge, welche beide durch die Hyperbel getrennt werden. In einem Punkte des ersteren (vertical schraffirten) Gebietes herrscht nach den Gleichungen (28) Ruhe bis zu dem Momente $Vt = r' - \frac{\lambda}{2}$, in welchem der von Q' ausgehende Cylinderimpuls einsetzt. Bevor er über den betrachteten Punkt hinweggegangen ist, was zur Zeit $Vt = r' + \frac{\lambda}{2}$ der Fall ist, kommt von Q'' her der zweite Cylinderimpuls, welcher den betrachteten Punkt im Momente $Vt = r'' - \frac{\lambda}{2}$ erreicht. Für ein gewisses Zeitintervall $r'' - \frac{\lambda}{2} < Vt < r' + \frac{\lambda}{2}$ schwächen sich also die beiden Cylinderimpulse gegenseitig; darauf combinirt sich theils der von Q'' ausgegangene Cylinderimpuls, theils das von ihm zurückgelassene Residuum mit dem Residuum, welches den von Q' herkommenden Cylinderimpuls begleitet. In diesem Gebiete wird u dementsprechend durch die folgenden Ausdrücke dargestellt (s. die Gleichungen (28)):

$$-\infty < Vt < r' - \frac{\lambda}{2} \cdots u = 0,$$

$$r' - \frac{\lambda}{2} < Vt < r'' - \frac{\lambda}{2} \cdots u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt + \frac{\lambda}{2} - r'}{r' - |x|}},$$

$$r'' - \frac{\lambda}{2} < Vt < r' + \frac{\lambda}{2} \cdots u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt + \frac{\lambda}{2} - r'}{r' - |x|}} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt + \frac{\lambda}{2} - r''}{r'' - |x|}},$$

$$r' + \frac{\lambda}{2} < Vt < r'' + \frac{\lambda}{2} \cdots u = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r' - |x|}{Vt - r'}} \frac{1}{Vt - |x|} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt + \frac{\lambda}{2} - r''}{r'' - |x|}},$$

$$r'' + \frac{\lambda}{2} < Vt < +\infty \cdots u = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r' - |x|}{Vt - r'}} \frac{1}{Vt - |x|} - \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r'' - |x|}{Vt - r''}} \frac{1}{Vt - |x|}.$$

In dem anderen genannten (in Fig. 14 horizontal schraffirten) Gebiete ist dagegen die zeitliche Aufeinanderfolge der Störungen eine andere. In

jedem Punkte dieses Gebietes herrscht abermals Ruhe bis zu dem Momente $Vt = r' - \frac{\lambda}{2}$, wo der von Q' kommende Cylinderimpuls den betrachteten Punkt erreicht. Dieser Cylinderimpuls läuft vollständig ab und es tritt an seine Stelle das zugehörige Residuum, bevor der andere Cylinderimpuls von Q'' herangekommen ist. Von da ab besteht theils dieser letzte Cylinderimpuls, theils das zugehörige Residuum neben dem Residuum des ersten Cylinderimpulses. Wie man sieht, haben in den Punkten dieses Gebietes beide Cylinderimpulse Zeit, sich ungestört auszubilden. Die Formeln, welche hier zur Darstellung von u dienen, sind die folgenden:

$$-\infty < Vt < r' - \frac{\lambda}{2} \cdots u = 0,$$

$$r' - \frac{\lambda}{2} < Vt < r' + \frac{\lambda}{2} \cdots u = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt + \frac{\lambda}{2} - r'}{r' - |x|}},$$

$$r' + \frac{\lambda}{2} < Vt < r'' - \frac{\lambda}{2} \cdots u = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r' - |x|}{Vt - r'}} \frac{1}{Vt - |x|},$$

$$r'' - \frac{\lambda}{2} < Vt < r'' + \frac{\lambda}{2} \cdots u = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r' - |x|}{Vt - r'}} \frac{1}{Vt - |x|} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{Vt + \frac{\lambda}{2} - r''}{r'' - |x|}},$$

$$r'' + \frac{\lambda}{2} < Vt < +\infty \cdots u = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r' - |x|}{Vt - r'}} \frac{1}{Vt - |x|} - \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{r'' - |x|}{Vt - r''}} \frac{1}{Vt - |x|}.$$

Wir haben hier nur von Gebieten gesprochen, in denen $r'' > r'$ ist. Genau das Entsprechende gilt offenbar von den Gebieten $r' > r''$, da ja der Vorgang oberhalb und unterhalb der x-Axe ($r'' = r'$) symmetrisch verlaufen muss. Wie die Formeln in den nicht schraffirten Gebieten zwischen g' und g'' zu modificiren sind, braucht kaum näher erörtert zu werden.

§ 12.

Die Intensität der Röntgenstrahlung im Beugungsbilde des Spaltes.

Aus den im § 8 besprochenen Gründen müssen wir von der elektrischen Kraft u zu der elektrischen Energie $\frac{1}{8\pi}\int u^2\,dt$ oder besser noch zu der relativen Intensität

$$J = \frac{V}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2\,dt$$

übergehen. Die hierzu erforderlichen Rechnungen sind zwar ganz elementar, aber recht mühsam. Sie sollen nur auszugsweise mitgetheilt werden.

1) Wir beginnen mit der *Mittellinie des Spaltes*, der x-Axe. Hier ist u' durch (29), u'' durch (28) dargestellt. Da $r'' = r'$, wird der gebeugte Bestandtheil in u' bis auf das Vorzeichen gleich u''. Wir haben nämlich

$$u' = u_0 - u'', \quad \text{also} \quad u = u_0 - 2u''$$

und daher

$$J = \frac{V}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 - 2u'')^2 \, dt = J' + 4J'' - 4K,$$

$$J' = \frac{V}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0^2 \, dt, \quad J'' = \frac{V}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u''^2 \, dt, \quad K = \frac{V}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 u'' \, dt.$$

Da u_0 im Allgemeinen gleich Null ist, ausser für das Zeitintervall von der Länge $\tau = \frac{\lambda}{V}$, wo u_0 constant gleich 1 wird, so ist zunächst

$$J' = 1.$$

Der Werth von J'' ist gerade durch die frühere Gleichung (33) gegeben, wenn wir unter der dort vorkommenden Grösse s das folgende verstehen:

$$s = \frac{\lambda}{r' - |x|} = \frac{\lambda}{r'' - |x|}. \tag{34}$$

Es handelt sich also nur noch um die Berechnung von K. Hierbei ist zu bemerken, dass u_0 von Null verschieden nur dann ist, wenn

$$|x| - \frac{\lambda}{2} < Vt < |x| + \frac{\lambda}{2},$$

und dass u'' von Null verschieden ist, nur wenn

$$r'' - \frac{\lambda}{2} < Vt.$$

Machen wir also

$$Vt_1 = |x| - \frac{\lambda}{2}, \quad Vt_2 = r'' - \frac{\lambda}{2}, \quad Vt_3 = |x| + \frac{\lambda}{2},$$

so wird es darauf ankommen, ob $t_2 < t_3$ oder $t_3 < t_2$ ist. Im letzteren Falle ist offenbar

$$K = 0.$$

Im anderen haben wir

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Die Bedingung $t_2 < t_3$ kann aber auch so geschrieben werden:

$$[illegible] \quad s > 1.$$

Unter dieser Bedingung hat K den zuletzt angeschriebenen Werth. Im entgegengesetzten Falle $(s<1)$, wo jener Werth imaginär werden würde, ist K gleich Null.

Die gesuchte Intensität J können wir demnach folgendermassen berechnen.

$$J = 1 + 4J'' - \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{s-1} - \frac{\sqrt{s-1}}{s}\right)^{*}. \tag{52}$$

Der Zusatz* soll andeuten, dass der betreffende Term zu streichen ist, wenn er imaginär werden würde; die Grösse J'' bedeutet, wie bemerkt, die rechte Seite von (33).

Nach dieser Formel ist die folgende kleine Tabelle berechnet, und zwar für dieselben Werthe von s, für die wir J'' nach pag. 53 bereits kennen:

$$s = \frac{1}{25},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad 10,\quad 16,\quad 25,\quad \infty,$$

$$|x| = \left(\frac{1}{25},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{2},\quad 1,\quad 2,\quad 4,\quad 10,\quad 16,\quad 25,\quad \infty\right)\frac{\varkappa^2}{8\lambda}.$$

$$J = 1{,}04,\quad 1{,}08,\quad 1{,}12,\quad 1{,}20,\quad 0{,}92,\quad 0{,}58,\quad 0{,}30,\quad 0{,}19,\quad 0{,}13,\quad 0{,}00.$$

Um ihre physikalische Bedeutung zu verstehen, wollen wir den Ausdruck (51) für s etwas umrechnen. Es ist ja auf der Mittellinie

$$r' = r'' = \sqrt{x^2 + \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2} = |x|\left(1 + \frac{\varkappa^2}{8x^2}\right),$$

sobald wir uns in einem Abstande $|x|$ vom Spalte befinden, der gross gegen die halbe Spaltbreite $\frac{\varkappa}{2}$ ist. Somit wird $r' - |x| = \frac{\varkappa^2}{8|x|}$ und s proportional mit dem Abstande vom Spalt, nämlich:

$$s = |x|\frac{8\lambda}{\varkappa^2},\quad |x| = s\frac{\varkappa^2}{8\lambda}.$$

Den Inhalt unserer Tabelle können wir also so ausdrücken: *Bewegen wir uns auf der Mittellinie vom Spalte fort, so wächst J zunächst von dem ungefähren Werthe 1 an bis zu dem maximalen Werthe $J = 1{,}20$, welcher im Abstande $|x| = \frac{\varkappa^2}{8\lambda}$ vom Spalt erreicht wird. Von da aus nimmt J allmählich ab und zwar etwas schneller als es vorher zugenommen hatte, um in unendlicher Entfernung vom Spalt zu verschwinden.*

In dem Auftreten des Maximums und in der Abnahme der Intensität bei wachsender Entfernung haben wir offenbar eine Folge der *Endlichkeit der Impulsbreite* zu erblicken. Bei unendlich kleiner Impulsbreite $(\lambda = 0)$ würde auf der ganzen Mittellinie und wie wir hinzufügen können, in dem ganzen Raume zwischen g' und g'' überall die gleiche Intensität 1 herrschen (es wäre ja überall auf der Mittellinie $s = 0$). Eine hinter dem

Spalt aufgestellte Platte würde in jeder Entfernung ein gleichmässig erhelltes Bild von der Breite $\varkappa$ und der Bestrahlungsintensität 1 liefern. In diesem Falle könnten (wie in der geometrischen Optik, wo man die Wellenlänge λ verschwindend klein voraussetzt) alle Verhältnisse des Spaltbildes durch blosse geometrische Projection gefunden werden; jede Art von Beugung wäre ausgeschlossen. Bei endlicher Impulsbreite aber treten die oben geschilderten Unterschiedlichkeiten auf.

II. Wir schliessen hier zunächst die Betrachtung der Schattengrenze g' an. Auf dieser ist $u' = \frac{1}{2} u_0$ und daher $u = \frac{1}{2} u_0 - u''$. u ist also halb so gross und J ein viertel so gross wie im vorhergehenden Falle bei gleichen Werthen von u''.

Die Darstellung von J entnehmen wir daher unmittelbar der Gleichung (52):

$$J = \frac{1}{4} + J'' - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{s''-1} - \frac{\sqrt{s''-1}}{s''}\right)^*. \tag{53}$$

s'' bedeutet hierbei die Grösse $\frac{\lambda}{r''-|x|}$. Die entsprechend gebildete Grösse $s' = \frac{\lambda}{r'-|x|}$ ist, da wir uns auf der Schattengrenze von u' befinden, fortgesetzt ∞. Die Grösse s'' ist abermals dem Abstande $|x|$ von der Spaltebene proportional. Wir haben nämlich auf g' (mit Ausschluss der dem Spalt benachbarten Theile dieser Geraden):

$$r'' = \sqrt{x^2 + \varkappa^2} = |x|\left(1 + \frac{\varkappa^2}{2x^2}\right), \quad r'' - |x| = \frac{\varkappa^2}{2|x|},$$

also

$$s'' = |x| \frac{2\lambda}{\varkappa^2}, \quad |x| = s'' \frac{\varkappa^2}{2\lambda}.$$

Zu einem beliebigen Werth von s'' gehört danach auf der Schattengrenze die vierfache Entfernung von der Spaltebene, wie zu demselben Werth von s auf der Mittellinie. Z. B. entspricht auf der Schattengrenze dem Werthe $s'' = 1$ die Entfernung $|x| = \frac{\varkappa^2}{2\lambda}$, während auf der Mittellinie zu $s = 1$ die Entfernung $|x| = \frac{\varkappa^2}{8\lambda}$ gehörte. Da, wie wir sahen, bei gleichen Werthen von u'' die Grösse von J auf der Schattengrenze viermal so klein ist wie J auf der Mittellinie, so ergiebt sich:

Auf der Schattengrenze ist in viermal so grosser Entfernung von der Spaltebene die relative Intensität viermal so klein wie in einfacher Entfernung auf der Mittellinie.

Nach dieser Regel sind in der folgenden Tabelle für dieselben Werthe von $|x|$ wie oben die zugehörigen J-Werthe auf der Schattengrenze berechnet. Die letzteren wurden, wo sie nicht direct der früheren Tabelle entnommen werden konnten, durch Interpolation daraus abgeleitet.

$$|x| = \left(\frac{1}{25}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2} \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 10, \quad 16, \quad 25, \quad \infty\right) \frac{\varkappa^2}{8\lambda},$$
$$J = 0{,}26, \ 0{,}26, \ 0{,}26, \ 0{,}27, \ 0{,}28, \ 0{,}30, \ 0{,}21, \ 0{,}15, \ 0{,}12, \ 0{,}00.$$

Aehnlich wie oben lässt sich daher der allgemeine Gang von J folgendermassen beschreiben. *Bewegen wir uns auf der Schattengrenze von der Spaltebene fort, so wächst J von dem anfänglichen Werthe 0,25 zunächst etwas an, erreicht ein Maximum 0,30 im Abstande $|x| = \frac{\varkappa^2}{2\lambda}$ vom Spalt und nimmt von da aus bei weiter wachsender Entfernung vom Spalt allmählich zu Null ab.* Das Maximum ist ziemlich schwach ausgebildet; sein Ort ist, falls λ klein gegen $\varkappa$ ist, merklich derselbe Punkt, der in Fig. 14 mit R bezeichnet wurde, also der Schnittpunkt von g' mit unserem Hyperbelaste. Die Stelle des Maximums auf der Mittellinie ist in Fig. 14 mit S bezeichnet.

Wir ziehen noch die *Schnelligkeit des seitlichen Abfalls der Intensität beim Uebergange von der Mittellinie nach der Schattengrenze auf der ihnen gemeinsamen Senkrechten* in Betracht. Dieselbe wird am besten gekennzeichnet durch das Verhältniss $\Delta J : J$ (ΔJ = Abnahme der Intensität bei dem genannten Uebergange, J = Intensität auf der Mittellinie). Für dieses Verhältniss berechnen wir durch Vergleich der beiden vorigen Tabellen die folgende:

$$|x| = \left(\frac{1}{25}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2}; \quad 1, \quad 2, \quad 4, \quad 10, \quad 16, \quad 25\right) \frac{\varkappa^2}{8\lambda}.$$
$$\frac{\Delta J}{J} = 0{,}8, \ 0{,}8, \ 0{,}8, \ 0{,}8. \ 0{,}7, \ 0{,}5, \ 0{,}3, \ 0{,}2, \ 0{,}1.$$

Die Grenzen, zwischen denen $\frac{\Delta J}{J}$ liegen muss, sind ersichtlich 1 und 0; 1 würde bedeuten, dass J auf der Schattengrenze zu Null herabgesunken ist, dass also die seitliche Abnahme der Intensität sehr stark ist; 0 würde bedeuten, dass J auf der Schattengrenze denselben Werth hat, wie auf der Mittellinie, dass also die Abnahme sehr langsam stattfindet. Die echten Brüche zwischen diesen Grenzen geben, wie gesagt, ein Maass für die Geschwindigkeit der seitlichen Intensitätsabnahme. Wir sehen nun aus unserer Tabelle:

Die Schnelligkeit des seitlichen Intensitätsabfalles ist anfangs (in der Nähe des Spaltes) ziemlich gross. In der Entfernung $|x| = \frac{\varkappa^2}{8\lambda}$ aber, d. h. in der Gegend des Punktes S, S', wo die Intensität auf der Mittellinie ihr Maximum erreicht, verlangsamt sich die Geschwindigkeit erheblich und nähert sich mit wachsender Entfernung $|x|$ dem Werthe Null, bei dem überhaupt keine seitliche Abnahme mehr vorhanden ist.

Aus diesem wichtigen Umstande ist hinsichtlich des Charakters des Beugungsbildes Folgendes zu schliessen:

Eine hinter dem Spalt angebrachte (fluorescirende oder photographische) Platte liefert ein Bild des Spaltes, welches in verschiedenen Entfernungen vom Spalt verschieden deutlich ist. *Es wird scharf begrenzt sein in der Nähe des Spaltes bis zur Entfernung* $|x| = \frac{\varkappa^2}{8\lambda}$; *bei weiter wachsender Entfernung wird das Bild immer verschwommener und,* wie wir vorher sahen, *immer lichtschwächer,* so dass schon für $|x| = \frac{25\varkappa^2}{8\lambda}$ die Intensität an der Schattengrenze nicht mehr merklich von der Intensität auf der Mittellinie abweicht.

Auch dieses Verhalten ist offenbar bei unendlich kleiner Impulsbreite unmöglich; in diesem Grenzfalle würde das Spaltbild in jeder Entfernung gleichmässig scharf begrenzt sein. Umgekehrt wird man aus dem Masse der Verschwommenheit des Bildes und aus der Entfernung, in welcher dieselbe stattfindet, auf die Breite des Impulses schliessen können.

III. Wir berechnen J noch auf einer dritten charakteristischen Linie, nämlich auf dem Hyperbelast $r'' - r' = \lambda$ (s. Gl. (50)); dabei wollen wir uns auf solche Punkte dieses Astes beschränken, die vom Spalte aus gerechnet jenseits von R liegen. Indem wir wieder $u^2 = (u' - u'')^2$ entwickeln, schreiben wir

$$(54)\quad \begin{cases} J = J' + J'' - 2K, \\ J' = \frac{V}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u'^2\, dt, \quad J'' = \frac{V}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u''^2\, dt, \\ K = \frac{V}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u' u''\, dt. \end{cases}$$

J' und J'' sind durch Gleichung (33) gegeben, wenn wir darin für s bez. die Werthe substituiren:

$$s' = \frac{\lambda}{r' - |x|}, \qquad s'' = \frac{\lambda}{r'' - |x|}.$$

Das Integral K zerlegen wir in drei Theile K_1, K_2, K_3 mit den Integrationsgrenzen $-\infty$ und t_1, t_1 und t_2, t_2 und ∞, wobei t_1, t_2 die Bedeutung haben sollen:

$$Vt_1 = r'' - \frac{\lambda}{2}, \quad Vt_2 = r'' + \frac{\lambda}{2}.$$

1) Solange $Vt < Vt_1$, d. h. $< r'' - \frac{\lambda}{2}$, ist nach $(28)_1$ $u'' = 0$. Wir haben daher

$$(55)\qquad K_1 = \frac{V}{\lambda}\int\limits_{-\infty}^{t_1} u' u''\, dt = 0.$$

2) Wenn $Vt_1 < Vt < Vt_2$, d. h. $r'' - \frac{\lambda}{2} < Vt < r'' + \frac{\lambda}{2}$, ist gleichzeitig $Vt > r' + \frac{\lambda}{2}\cdot$ Demnach ist u' durch $(28)_2$, u'' durch $(28)_3$ gegeben. Es wird also

$$K_2 = \frac{V}{\lambda}\int_{t_1}^{t_2} u'u''dt = \frac{V}{2\pi^2}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{r'-|x|}{Vt-r'}}\,\frac{1}{Vt-|x|}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{Vt+\frac{\lambda}{2}-r''}{r''-|x|}}\,dt.$$

Da das Argument des Arcus Tangens bei der Integration zwischen 0 und $\sqrt{s''}$ enthalten ist und wir nur Werthe $s''<1$ zu betrachten haben werden, so ersetzen wir den Arcus durch den Tangens und erhalten:

$$K_2 = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\frac{s''}{s'}}\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{Vt+\frac{\lambda}{2}-r''}{Vt-r'}}\,\frac{Vdt}{Vt-|x|}.$$

Die Ausführung der Integration liefert

(56) $$K_2 = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{\frac{s''}{s'}}\left(\lg\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{s'+2}{2}}\lg\frac{\sqrt{3(s'+2)}+2}{\sqrt{3(s'+2)}-2}\right).$$

3) Wenn $Vt_2 < Vt$, so ist $Vt > r'' + \frac{\lambda}{2}$ und umsomehr $> r' + \frac{\lambda}{2}\cdot$ Für u' und u'' sind daher die Ausdrücke $(28)_2$ einzusetzen. Somit wird

$$K_3 = \frac{V}{\lambda}\int_{t_2}^{\infty} u'u''dt = \frac{\lambda V}{4\pi^2}\sqrt{(r'-|x|)(r''-|x|)}\int_{t_2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(Vt-r')(Vt-r'')}}\,\frac{dt}{(Vt-|x|)^2}.$$

Hier wollen wir eine Vereinfachung dadurch eintreten lassen, dass wir r' und r'' durch den gemeinsamen Werth $r' + \frac{\lambda}{2} = r'' - \frac{\lambda}{2}$ ersetzen. Da wir hierdurch vor und unter dem Integralzeichen den einen Factor verkleinern, den anderen vergrössern, wird der Fehler vermuthlich klein sein.

Wir bekommen so

$$K_3 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\,\frac{s'+2}{2s'}\int_{t_2}^{\infty}\frac{1}{Vt-r'-\frac{\lambda}{2}}\,\frac{Vdt}{(Vt-|x|)^2}$$

oder nach Auswerthung des Integrals

(57) $$K_3 = \frac{1}{4\pi^2}\left(\frac{2s'}{s'+2}\log\frac{s''+2}{2s''} - \frac{2s''}{s''+2}\right).$$

Hiernach kann K und also auch J berechnet werden.

Wir werden die Berechnung nur für solche Werthe von $|x|$ vornehmen, für die wir schon vorher J auf der Mittellinie und der Schatten-

grenze berechnet haben. Dabei werden wir uns auf Werthe $|x| > \frac{\varkappa^2}{2\lambda}$ (d. h. $|x| >$ Abstand des Punktes R von der Spaltebene) beschränken, da unsere vorstehenden Formeln nur für Punkte der Hyperbel jenseits von R gelten. Es sind dieses die fünf letzten $|x|$-Werthe unserer früheren Tabellen. Die Frage ist zunächst, welche Werthe von s' und s'' diesen Punkten unseres Hyperbelastes entsprechen.

Die Gleichung der Hyperbel war:

$$\frac{4y^2}{\lambda^2} - \frac{4x^2}{\varkappa^2 - \lambda^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{4x^2}{\varkappa^2 - \lambda^2} + 1}\cdot$$

Berücksichtigen wir, dass $|x|$ gross gegen $\varkappa$ (enger Spalt) und $\varkappa$ gross gegen λ (sehr schmaler Impuls) sein soll, so können wir in erster Näherung schreiben:

$$y = \frac{\lambda x}{\varkappa}, \tag{58}$$

d. h. wir können die Hyperbel durch eine Gerade (nahezu ihre Tangente im Punkte R) ersetzen.

Berechnen wir daraufhin r' und r'', so haben wir:

$$\left.\begin{matrix} r' \\ r'' \end{matrix}\right\} = \sqrt{x^2 + \left(y \pm \frac{\varkappa}{2}\right)^2} = |x| + \frac{\left(y \pm \frac{\varkappa}{2}\right)^2}{2\,|x|}$$

und

$$\left.\begin{matrix} r' - |x| \\ r'' - |x| \end{matrix}\right\} = \frac{\left(y \pm \frac{\varkappa}{2}\right)^2}{2\,|x|} = \frac{\left(\frac{\lambda x}{\varkappa} \pm \frac{\varkappa}{2}\right)^2}{2\,|x|}$$

und endlich:

$$\left.\begin{matrix} s' \\ s'' \end{matrix}\right\} = \frac{2\lambda x}{\left(\frac{\lambda x}{\varkappa} \pm \frac{\varkappa}{2}\right)^2} = \frac{8\lambda x}{\varkappa^2}\left(\frac{2\lambda x}{\varkappa^2} \mp 1\right)^{-2}. \tag{59}$$

Die fraglichen Werthe von s', s'', welche zu den oben genannten fünf Werthen von x gehören, sind also:

$$s' = \infty,\ \frac{40}{9},\ \frac{16}{9},\ \frac{400}{441},\ 0,$$

$$s'' = 1,\ \frac{40}{49},\ \frac{16}{25},\ \frac{400}{841},\ 0.$$

Mit diesen Werthen liefert die Ausrechnung der Ausdrücke K_2, K_3, J', J'' die folgenden Werthe für J:

$$x = (4,\quad 10,\quad 16,\quad 25,\quad \infty)\,\frac{\varkappa^2}{8\lambda},$$

$$J = 0{,}80,\ [illegible],\ [illegible],\ [illegible],\ [illegible].$$

Der erste [illegible] Werthe ist bereits unter [illegible] gefunden, da er ja die

Intensität im Punkte R auf der Schattengrenze bedeutet. *Auch auf unserem Hyperbelast nimmt also*, wie es ja nicht anders zu erwarten, *die Intensität mit wachsender Entfernung vom Spalt zu Null ab.*

Was uns speciell interessirt ist wieder die Schnelligkeit der seitlichen Abnahme der Intensität beim Uebergange von einem Punkte der Mittellinie zu dem gleich weit von der Spaltebene entfernten Punkte der Hyperbel. Wir bilden wieder das Verhältniss $\frac{\Delta J}{J}$ (ΔJ = Differenz der Intensitäten auf der Mittellinie und auf der Hyperbel, J = Intensität auf der Mittellinie), bedenken dabei aber, dass sich dieses Verhältniss auf verschiedene Abstände von der Mittellinie bezieht. Um daher Zahlen zu bekommen, die mit der vorigen Tabelle (pag. 81) vergleichbar sind, müssen wir jenes Verhältniss zuvor auf den gemeinsamen Abstand $\frac{\varkappa}{2}$ von der Mittellinie reduciren. Dies geschieht durch Hinzufügung des Factors $\frac{\varkappa}{2|y|}$, unter y den Abstand des betr. Hyperbelpunktes von der Mittellinie, d. h. den Betrag seiner y-Coordinate verstanden. Der genannte Factor lautet daher (s. Gl. (58)):

$$\frac{\varkappa}{2|y|} = \frac{\varkappa^2}{2\lambda|x|} = 1,\ \frac{4}{10},\ \frac{4}{16},\ \frac{4}{25},\ 0$$

und unsere Tabelle wird die folgende:

$$|x| = (4,\quad 10,\quad 16,\quad 25)\frac{\mu^2}{8\lambda},$$

$$\frac{\varkappa}{2|y|}\frac{\Delta J}{J} = 0{,}5,\quad 0{,}3,\quad 0{,}2,\quad 0{,}1.$$

Dies sind dieselben Maasse für die Schnelligkeit der seitlichen Intensitätsabnahme, die wir früher durch den Vergleich der Schattengrenze und der Mittellinie gefunden haben. Wir dürfen daher wohl schliessen, dass von der Mittellinie bis zu unserer Hyperbel ein einigermassen gleichmässiger Intensitätsabfall Platz greift. *Der Intensitätsabfall verlangsamt sich also nicht nur mit wachsender Entfernung vom Spalt, sondern dieser langsamere Abfall hält auch für immer weitere Abstände von der Mittellinie vor.*

IV. Endlich mögen noch einige Werthe von J auf der zur bisher betrachteten Hyperbel confocalen Hyperbel $r'' - r' = 2\lambda$ hergesetzt werden, welche die Schattengrenze g' im Halbirungspunkte von R und S' schneidet und in Fig. 14 ebenfalls verzeichnet ist, nämlich:

$$|x| = (2,\quad 4,\quad 10,\quad 16,\quad 25,\quad \infty)\frac{\varkappa^2}{8\lambda},$$

$$J = 0{,}28,\quad 0{,}10,\quad 0{,}04,\quad 0{,}03,\quad 0{,}01,\quad 0{,}00.$$

Hinsichtlich der Intensitätsvertheilung knüpfen sich hier ähnliche Be-

merkungen an wie unter III. Der Abstand der Punkte dieser Hyperbel von der Mittellinie beträgt näherungsweise:

$$|y| = \frac{2\lambda|x|}{\varkappa}. \tag{60}$$

§ 13.

Die Beobachtungen von Haga und Wind. Berechnung der Impulsbreite.

Bekanntlich ist es kürzlich den Herren H. Haga und C. H. Wind[1]) gelungen, den ersten einwandfreien Beugungseffect bei Röntgenstrahlen nachzuweisen. Die Versuchsanordnung war, so weit sie uns hier interessirt, die folgende — wir beziehen uns speciell auf Versuch Nr. 2, von dem uns einige photographische Vergrösserungen der Originalnegative von Herrn Wind gütigst zur Verfügung gestellt sind —:

Ein erster Spalt („X-Spalt") von der Breite 14μ[2]) und der Höhe 1 cm sondert von den in der Vacuumröhre erzeugten Röntgenstrahlen ein schmales Bündel aus und ist als Strahlungsquelle anzusehen. 75 cm hinter diesem befindet sich in der Strahlungsrichtung ein zweiter Spalt („Beugungs-Spalt") von der Höhe 3 cm, der sich nach unten verjüngt; am oberen Ende beträgt nämlich seine Breite 14μ, am unteren ca. 2μ. Abermals 75 cm dahinter ist die photographische Platte angebracht. Die Expositionszeit betrug nicht weniger als 100 Stunden.

Der Beugungseffect bestand nun darin, dass sich *das Bild des Spaltes auf dem photographischen Negativ nicht in demselben Masse verjüngt, wie der Spalt selbst.* Während sich das Bild der breiteren (oberen) Partien des Spaltes als dunkler Streifen markirt, schwarz in der Mitte, etwas verschwommen an den Rändern, und sich zunächst, der geometrischen Gestalt des Spaltes entsprechend, von oben nach unten hin etwas verengert, breitet sich das Bild der engeren (unteren) Partien des Spaltes von der Stelle ab, wo der dunkle Kern verschwindet, ein wenig federartig aus und weist in der Richtung senkrecht zur Erstreckung des Spaltes nur äusserst schwache Intensitätsunterschiede auf. Das Bild ist in den oberen Partien *dunkel und ziemlich scharf begrenzt*, in den unteren Partien *lichtschwach und sehr verschwommen.*

1) Amsterdamer Akademie Versl., April 1899, S. 420, und (etwas ausführlicher): Ann. der Physik (Wiedemann), Bd. 68, S. 884, 1899. Die Figur des Spaltbildes ist an letzterer Stelle nicht wiedergegeben.

2) $1\,\mu = 10^{-3}$ mm, $1\,\mu\mu = 10^{-6}$ mm, 1 Angström $= 10^{-7}$ mm.

Wir verhehlen uns nicht, dass der Anwendung unserer Theorie auf diese Versuchsanordnung verschiedene ernste Bedenken[1]) entgegenstehen:

1) In unserer Theorie wurde der einfallende Impuls als ein *ebener* vorausgesetzt. Der Beugungsschirm würde bei dieser Voraussetzung längs seiner ganzen Vorderseite von einer überall gleich grossen und in gleicher Richtung fortschreitenden Erregung getroffen werden. Dagegen sendet der X-Spalt in dem Versuche von Haga und Wind ein divergirendes Strahlenbündel auf den Beugungsschirm, welches seinerseits schon durch Beugung an dem ersten Spalt afficirt ist.

2) In unserer Theorie haben wir sozusagen mit monochromatischer Strahlung gearbeitet, d. h. wir haben eine ganz bestimmte Impulsbreite vorausgesetzt und haben überdies angenommen, dass nur eine einmalige Erregung durch das Feld geschickt wird. In Wirklichkeit wird (vgl. die Vorstellung von der Erzeugung der Röntgen- durch Kathodenstrahlen) wegen des fortgesetzten Bombardements mit Kathodenpartikelchen eine ganze Serie von Impulsen erregt werden; auch mögen die Breiten dieser Impulse unter sich etwas differiren. Es ist klar, dass die einer Serie von Impulsen entsprechende *Erregung* einfach durch Superposition der Einzelerregungen erhalten wird. Dasselbe gilt auch von der dieser Serie entsprechenden *Intensität*, wenn die Zeitabstände zwischen den einzelnen Impulsen gross genug sind, wenn nämlich an jeder Stelle des Feldes der Impuls schon merklich abgelaufen ist, bevor der folgende anhebt.[2]) Unter dieser Voraussetzung würde eine Aufeinanderfolge von *gleich breiten* Impulsen lediglich eine *Verstärkung*, eine Aufeinanderfolge von *ungleich breiten, aber nur wenig unter sich verschiedenen* Impulsen eine *Verstärkung mit einer Trübung des Bildes* hervorrufen; (es würden im letzteren Falle die den einzelnen Impulsen entsprechenden Bilder des Spaltes, die bei verschiedener Impulsbreite incongruent sind, sich gegenseitig überdecken und die charakteristischen Eigenschaften des Einzelbildes beeinträchtigen.)

1) Ich benutze im Folgenden einige freundliche briefliche Mittheilungen von Herrn Wind.

2) Nach Versuchen von Trouton (Rep. Br. Assoc. 1896, pag. 711) und Brunhes (Comptes Rendus 1900, Bd. 130, pag. 1007) beträgt die Dauer einer Röntgenentladung ca. 10^{-4} sec. Aus der Anordnung der genannten Versuche geht hervor, dass hiermit die Dauer eines ganzen Bombardements ($\mathfrak{T}$), nicht die Dauer eines einzelnen Schusses oder Impulses (τ) gemeint ist. Die Dauer $\mathfrak{T}$ ist nicht sowohl für den Vorgang der Röntgenstrahlung selbst, als für die Umstände bei seiner Hervorbringung charakteristisch. Während der Zeit $\mathfrak{T}$ werden vermuthlich eine sehr grosse Zahl von Kathodenpartikelchen auf die Antikathode auftreffen, sagen wir etwa eine Million, und dementsprechend eine sehr grosse Zahl von Impulsen ausgesandt werden. Da wir für die Zeit τ einen Werth von der Grössenordnung 10^{-18} finden werden (vgl. pag. 82), so bleibt für die Pausen zwischen zwei Impulsen immer noch eine hundert-millionen-mal grössere Zeit übrig.

Bei *merklich von einander verschiedenen Impulsbreiten* endlich wird sich das Bild gleichfalls durch *Uebereinanderlagerung der den Einzelimpulsen entsprechenden Beugungsbilder* ergeben und diese Einzelbilder werden sich im Eindruck des Gesammtbildes von einander trennen lassen.

3) Unsere Theorie handelt von einem Spalt mit *parallelen* Rändern, die Berücksichtigung der Nichtparallelität der im Experiment verwendeten Ränder würde erhebliche Schwierigkeiten machen. Wir werden die Intensitätsvertheilung, die hinter einer bestimmten Stelle des sich verjüngenden Spaltes auftritt, so berechnen wie bei einem Spalt mit parallelen Rändern von der Breite der betr. Stelle. Dies ist sicher nicht genau richtig; wir nehmen aber an, dass bei der äusserst schwachen Convergenz der Ränder (sie nähern sich nur um $12\,\mu$ auf eine Erstreckung von 3 cm) der Fehler hinreichend klein sein wird.

4) In unserer Theorie berechnen wir die *Intensität der Strahlung;* auf der Platte aber sehen wir die *Intensität der photographischen Wirkung,* welche eine durch die Eigenschaften der Platte bedingte Function der Intensität der Strahlung ist. Wäre die photographische Wirkung der auffallenden Strahlung proportional, so wäre das photographische Bild eine treue Wiedergabe der Strahlungsintensität. Da dies aber im allgemeinen nicht der Fall ist, so müsste, wie schon pag. 55 hervorgehoben, dem quantitativen Studium des Beugungsbildes ein Studium der Eigenschaften der Platte vorhergehen. Im Folgenden stützen wir uns übrigens hauptsächlich auf gewisse qualitative Eigenschaften des Beugungsbildes, welche von der Beschaffenheit der Platte unabhängig sind.

5) Auf der Platte wird eine gewisse Irradiation, eine seitliche Ausbreitung der photographischen Wirkung an den Stellen maximaler Erregung, statt haben. Diese würde eine allgemeine Verbreiterung des Spaltbildes in den dunkleren Partien des Bildes bewirken. In demselben Sinne würden kleine Erschütterungen wirken, denen X-Spalt und Beugungsspalt bei der langen Expositionszeit — trotz aller angewandten Vorsichtsmassregeln — ausgesetzt gewesen sein mögen. Auch die unter 1) genannten Umstände (Nicht-Parallelität der auffallenden Strahlen) werden sich in entsprechender Weise geltend machen.

Indem wir diese Bedenken als berechtigt anerkennen, sind wir doch nicht in der Lage, die ihretwegen etwa anzubringenden Correctionen hier zu entwickeln. Wir verweisen betreffend 1) auf Arbeiten von Herrn C. H. Wind[1]) und möchten im Uebrigen die im Folgenden abzuleitenden Zahlenwerthe nur als erste Abschätzungen und Anhaltspunkte angesehen wissen.

---

1) Amsterdamer Akademie, Versl. April 1897 und Juni 1898.

In der Theorie benutzten wir einen Spalt von bestimmter Breite $\varkappa$ und betrachteten die Beugungsbilder in verschiedenen Entfernungen $|x|$ vom Spalte. In der Beobachtung benutzen die Herren **Haga** und **Wind** einen Spalt von variabler Breite und beobachten in einer bestimmten Entfernung $|x| = 75$ cm. Nun hing die Intensität auf der Mittellinie von der Grösse $\frac{8\lambda|x|}{\varkappa^2}$ ab. (Siehe die Tabelle von pag. 79.) Es ist gleichgültig, ob wir uns hierin $\varkappa$ oder x veränderlich denken, in beiden Fällen ergeben sich die früher berechneten Werthefolgen von J. Die Beugungsbilder (Intensitätsabfälle von der Mittellinie nach den Seiten), die bei festem $\varkappa$ in der xy-Ebene in verschiedenen Entfernungen vom Spalt *hinter einander* liegen, werden in der Beobachtung mit dem sich verjüngenden Spalt auf derselben Platte (d. h. bei festem x) *über einander* zu liegen kommen. Es ist klar, dass allein durch diese Anordnung ein genauer Vergleich der verschiedenen Beugungsbilder ermöglicht wird. Noch ein anderer Umstand lässt die Verwendung des sich verjüngenden Spaltes besonders günstig erscheinen, dass nämlich $\varkappa$ in dem Ausdrucke $\frac{8\lambda|x|}{\varkappa^2}$ in der zweiten, $|x|$ in der ersten Potenz vorkommt. Ausgehend von einer Intensitätsvertheilung, die einem gewissen $\varkappa$ und einem gewissen $|x|$ entspricht, findet man also bei dem sich verjüngenden Spalt eine gewisse andere Intensitätsvertheilung an der Stelle, wo $\varkappa$ *halb* so gross ist, während man bei einem parallelen Spalt dieselbe Intensitätsvertheilung erst in einer Entfernung zu erwarten hat, wo $|x|$ *viermal* so gross ist. *Die verschiedenen Beugungsbilder liegen bei dem sich verjüngenden Spalt auf der Platte viel enger übereinander, wie sie bei einem parallelen Spalt im Raume hinter einander liegen würden.*

Wir wollen nun in einer neuen Figur die früher berechneten Intensitäten in der Weise übereinander eintragen, wie sie bei der Beobachtung von **Haga** und **Wind** unserer Theorie nach zu erwarten sind.

Die Mittellinie MM der Figur entspricht der Mittellinie des Spaltes; auf ihr nehmen wir zwei Punkte willkürlich an, die den früher mit R und S bezeichneten entsprechen mögen. In S errichten wir auf der Mittellinie ein Lot SS' von passender Länge, in R ein halb so langes Lot RR'. Die Verbindungslinie $S'R$ ist dann die senkrechte Projection des einen Spaltrandes (Grenze des geometrischen Schattens) und entspricht der früheren Geraden g'. Die Gerade g'' wird auf der anderen Seite der Mittellinie symmetrisch zu g' gezogen.

In den Punkten S und S' war

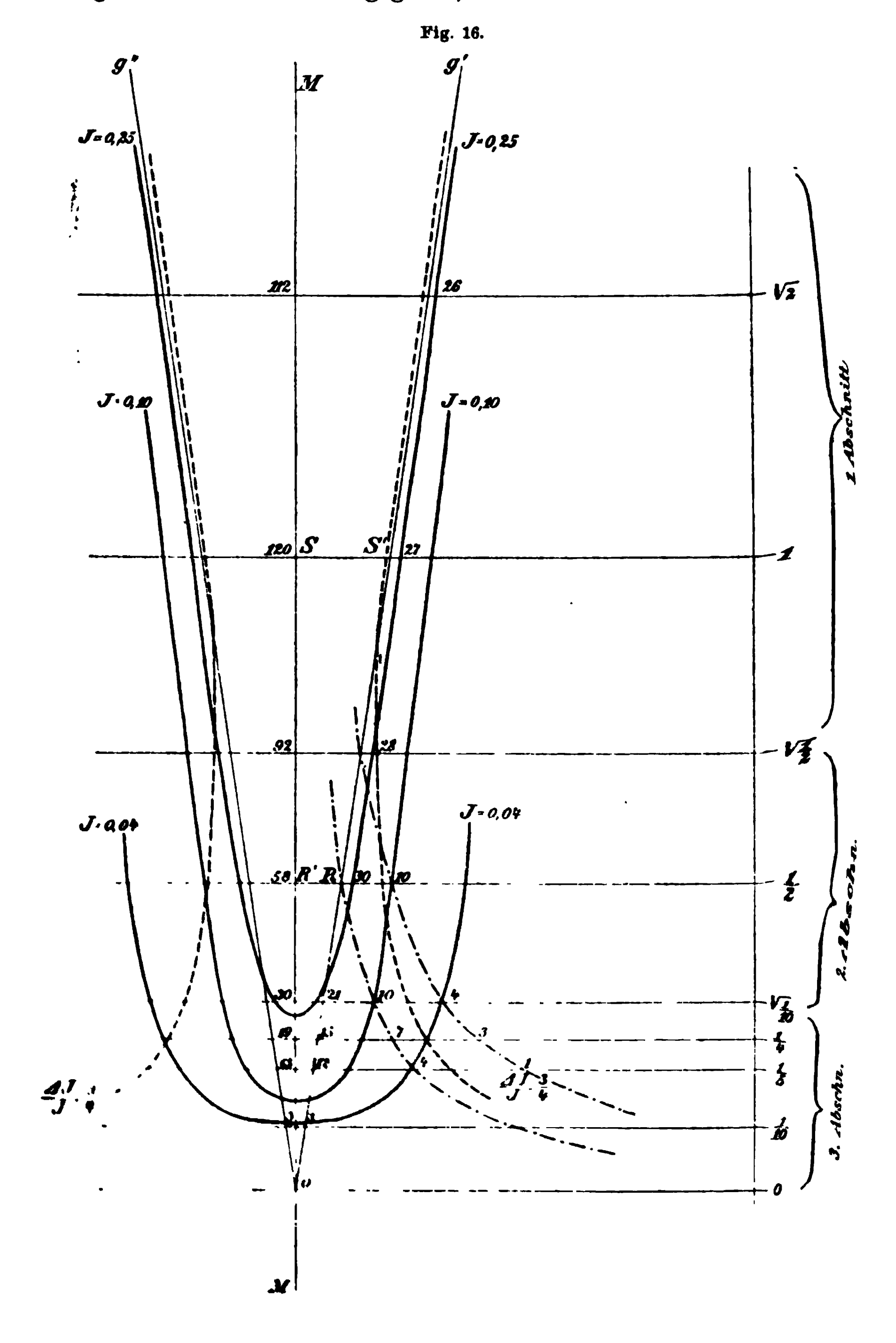
$$\frac{8\lambda|x|}{\varkappa^2} = 1, \quad \text{also} \quad \varkappa = \sqrt{8\lambda|x|},$$

in den Punkten R und R' war entsprechend

$$\frac{8\lambda|x|}{\varkappa^2} = 4, \quad \text{also} \quad \varkappa = \frac{1}{2}\sqrt{8\lambda x}.$$

Der Figur ist eine Skala beigegeben, welche die Werthe der Spaltbreite

Fig. 16.



in Theilen von $\sqrt{8\lambda|x|}$ angiebt. In der Höhe von SS' steht also an der Skala die Zahl 1, in der Höhe von RR' finden wir die Zahl $\frac{1}{2}$, wobei wir uns beide Zahlen mit $\sqrt{8\lambda|x|}$ multiplicirt zu denken haben. In derselben Weise sind die anderen Zahlen der Skala $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{10}}, \cdots$ zu lesen, welche bez. den früher benutzten Werthen $|x| = (2, 10, \cdots) \frac{x^2}{8\lambda}$ entsprechen.

Die beiden strichpunktirten Linien entsprechen den früher betrachteten Hyperbelästen

$$r'' - r' = \lambda \quad \text{und} \quad r'' - r' = 2\lambda.$$

Sie sind hier in gleichseitige Hyperbeln übergegangen, die die Linien MM und OO zu Asymptoten haben.

Die der Figur beigeschriebenen Zahlenwerthe bedeuten $100\,J$ und sind den früheren kleinen Tabellen entnommen.

Wir verbinden nun solche Punkte, zu denen derselbe Werth von J gehört, je durch eine Curve. Drei solcher Curven sind in der Figur ausgezogen, nämlich $J = 0{,}25$, $= 0{,}10$, $= 0{,}04$. Die Curve für $J = 0{,}25$ folgt im Wesentlichen der geometrischen Projection des Spaltes (den Geraden g' und g'') ausser am unteren Ende des Spaltbildes, wo sie ziemlich plötzlich umbiegt. Aehnlich die beiden anderen Curven, nur dass sie am unteren Ende des Bildes in einem flacheren Bogen umbiegen. Nach Construction weiterer solcher „Niveaulinien" würde man die Intensitätsvertheilung nach Art einer Landkarte vor sich haben.

Indessen ist zu beachten, dass für den Eindruck auf unser Auge nicht die *absoluten* sondern die *relativen* Werthe der Intensität massgebend sind. Das Auge vergleicht unwillkürlich die Intensität jeder Stelle mit der an benachbarten Stellen, hier etwa mit der Intensität auf der Mittellinie. Wir haben deshalb in der Figur noch diejenige Curve punktirt eingezeichnet, in der J gleich $\frac{1}{4}$ seines Werthes auf der Mittellinie in gleicher Höhe ist, oder, was dasselbe ist, in der der relative Intensitätsabfall $\frac{\Delta J}{J} = \frac{3}{4}$ beträgt. Der rechte und linke Theil dieser Curve schliesst sich nicht zusammen; sie entfernen sich vielmehr nach unten hin von einander. Der letztere Umstand hängt mit der früher betonten Thatsache zusammen, dass die Stärke des Intensitätsabfalles mit wachsender Entfernung vom Spalt oder, wie wir jetzt lieber sagen wollen, mit abnehmender Breite des Spaltes abnimmt.

Wir möchten nun etwa die Curve $J = \frac{1}{4}$ als *Grenze des dunkeln Kerns*, die punktirte Curve $\frac{\Delta J}{J} = \frac{3}{4}$ (wenigstens in ihren unteren Partien)

als *Grenze des überhaupt noch sichtbaren Spaltbildes* ansprechen. Dann werden wir auf Grund unserer Figur sagen dürfen: *Am unteren Ende des Spaltbildes, wo der dunkle Kern aufhört, beginnt die Breite des überhaupt noch sichtbaren photographischen Bildes zu wachsen.* Des Genaueren können wir etwa drei verschiedene Abschnitte in unserem Spaltbilde unterscheiden: 1) Verfolgen wir das Spaltbild von oben her, so wird sich dasselbe *zunächst verengen*, entsprechend der geometrischen Gestalt des Spaltes. Es schliesst sich nämlich sowohl die Curve $J = \frac{1}{4}$, („Grenze des dunkeln Kerns") als auch die Curve $\frac{\Delta J}{J} = \frac{3}{4}$ („Grenze der noch wahrnehmbaren photographischen Wirkung") zunächst dicht an die geometrische Schattengrenze des Spaltes (die Geraden g' und g'') an. In unserer Figur reicht dieser erste Abschnitt etwa bis an den Skalentheil $\sqrt{\frac{1}{2}}$ heran. Die Intensität der Dunkelfärbung ist durchweg stark, am stärksten in der Mitte, wo an einer Stelle das Maximum $J = 1{,}20$ erreicht wird; der Abfall nach den Rändern findet ziemlich plötzlich statt. 2) Hierauf folgt *ein Abschnitt grösster, ziemlich gleichbleibender Einschnürung des Spaltbildes;* in unserer Figur mag er etwa von dem Skalentheile $\sqrt{\frac{1}{2}}$ bis $\sqrt{\frac{1}{10}}$ reichen. Die Intensität der Dunkelfärbung in der Mitte ist noch beträchtlich, da immer noch $J > 0{,}25$ ist; die Breite des dunkeln Kerns nimmt in diesem zweiten Abschnitte nach unten hin ab $\left(\text{s. die Curve } J = \frac{1}{4}\right)$, während die Breite desjenigen Gebietes, in dem eine photographische Wirkung noch sichtbar ist, nicht weiter abnimmt $\left(\text{s. die Curve } \frac{\Delta J}{J} = \frac{3}{4}\right)$. 3) Endlich haben wir einen dritten Abschnitt, in der Figur von $\sqrt{\frac{1}{10}}$ bis 0 reichend, in dem *ein dunkler Kern nicht mehr wahrnehmbar ist und das Gebiet der sichtbaren photographischen Wirkung sich seitlich ausdehnt.* Der Intensitätsabfall von der Mitte nach den Seiten hin ist kaum mehr merklich, die Intensität selbst überall sehr schwach.

Vergleichen wir nun diese theoretische Bestimmung des Spaltbildes mit der experimentellen von Haga und Wind, so scheint uns eine durchgreifende Aehnlichkeit beider unverkennbar. Bei der Vergleichung ist natürlich zu beachten, dass die Massstäbe unserer Figur 16 und der von Haga und Wind publicirten Vergrösserung ihrer Originalaufnahmen verschiedene sind. Die Neigung der Spaltränder gegen die Mittellinie beträgt bei uns etwa 1 : 7, während sie bei Haga und Wind etwa 1 : 6000 beträgt. Unsere Figur müssten wir also in seitlicher Richtung ausserordentlich stark comprimiren und in der Längsrichtung auseinanderziehen,

bevor wir eine Uebereinstimmung mit Haga-Wind auch den Grössenverhältnissen nach erwarten können.

Aus dieser Uebereinstimmung möchten wir nun zunächst die Folgerung ziehen:

Dass unsere Impulshypothese mit den Beobachtungen von Haga und Wind wohl vereinbar ist.

Sodann möchten wir durch den Vergleich des theoretischen und des beobachteten Spaltbildes wenigstens zu einer ungefähren Bestimmung der Impulsbreite λ kommen.

Eine deutliche Verbreiterung des Spaltbildes stellt sich bei Haga und Wind etwas unterhalb der Marke 6 ein, welche einer Spaltbreite von 8,5 μ entspricht; die intensive Dunkelfärbung der Mittellinie hört etwas oberhalb derselben Stelle auf. Beide Umstände weisen uns darauf hin, dass wir den Anfang unseres „dritten Abschnittes" etwas oberhalb jener Marke, etwa bei einer Spaltbreite $\varkappa = 9\mu$ zu suchen haben. Der ganze obere Theil des beobachteten Beugungsbildes würde zu unserem Abschnitt 2 gehören. Unser Abschnitt 1 mit dem Maximum der Intensität 1,20 würde erst bei grösseren Spaltbreiten auftreten, als sie bei den Haga-Wind'schen Beobachtungen vorkamen.

Der theoretische Werth der Spaltbreite, welche zu dem Anfange des Abschnittes 3 gehört, ist nach Figur 16 ungefähr:

$$\varkappa = \sqrt{8\lambda|x|} \cdot \sqrt{\frac{1}{10}}.$$

Setzen wir diesen Werth gleich $9\mu = 9 \cdot 10^{-3}$ mm, sowie den Abstand $|x|$ von photographischer Platte und Spalt gleich 750 mm wie oben angegeben, so folgt

$$\lambda = \frac{10 \cdot 81}{8 \cdot 750} 10^{-6} \text{ mm} = 13{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ mm}$$
$$= 0{,}13 \ \mu\mu.$$

Die Impulsbreite betrug hiernach bei den Versuchen von Haga und Wind wenig mehr als eine Angström-Einheit. Der zugehörige Werth der Impuls*dauer* wird alsdann

$$\tau = \frac{\lambda}{V} = 0{,}4 \cdot 10^{-18} \text{ sec.}$$

In einer vorläufigen Mittheilung über denselben Gegenstand (vgl. die Anm. auf pag. 11) habe ich den Werth von λ ca. 25 mal so gross (nämlich $= 3{,}3 \ \mu\mu$) angegeben. Mir stand damals nur die Theorie der Beugung an einer Halbebene zu Gebote, und ich musste meine Schlüsse aus dem Betrage der seitlichen Verbreiterung des Spaltbildes ziehen (in der am Ende von § 8 geschilderten Weise). Gerade diese wird aber

durch die Abweichungen unserer Theorie von der Wirklichkeit, die wir am Anfange dieses Paragraphen zusammengestellt haben (s. besonders unter 5) pag. 88), vergrössert. Es ist daher von vornherein wahrscheinlich, dass der früher angegebene Werth zu gross ausfallen musste. Jedenfalls verdient die jetzige Bestimmung viel mehr Vertrauen, da sie auf Grund der Theorie des Spaltes gewonnen ist und sich auf die am meisten charakteristischen Eigenschaften des Spaltbildes gründet.

Uebrigens gelten über die Abhängigkeit des Beugungsbildes von der Impulsbreite dieselben Bemerkungen, die pag. 50 bei der Halbebene gemacht wurden. Bei geringerer Verdünnung des Kathodenraumes und dementsprechend grösserer Breite des Impulses würde der Beugungseffect leichter, d. h. schon bei grösserer Spaltbreite oder geringerer Entfernung vom Spalt zu beobachten sein. Vermuthlich dürfte der oben gefundene Werth von λ schon einen sehr „jähen" Impuls charakterisiren; wenn man die Versuche mit weniger durchschlagskräftigen, also beugungsfähigeren Impulsen wiederholt, wird man voraussichtlich grössere Werthe von λ finden.

Wir haben hier nur den allgemeinen Charakter des Spaltbildes berücksichtigt und die Thatsache betont, dass unterhalb derjenigen Stelle, wo der dunkle Kern verschwindet ($x = 9\,\mu$) eine Verbreiterung des Spaltbildes eintritt. Daneben legen die Beobachter selbst auch darauf Gewicht, dass mehrere solche Verbreiterungen an verschiedenen Stellen des Spaltes (nämlich bei dem von uns herangezogenen Versuch für $x = 7, 6, 5$ und $4\,\mu$) vorhanden sind. In den Reproductionen sind diese Verbreiterungen nicht sehr deutlich ausgeprägt, dagegen waren sie auf dem unter dem Mikroskop betrachteten originalen Beugungsbilde, welches Herr Wind auf der letzten Naturforscher-Versammlung zeigte, unverkennbar.

Wenn sich diese lokalen Verbreiterungen auch bei künftigen Versuchen bewähren, so würden wir sie, wie oben pag. 87 unter 2) angedeutet, von dem Boden unserer Anschauung aus durch die Annahme zu erklären haben, dass sich die Röntgenstrahlung aus verschiedenen, verschieden breiten Impulsen zusammensetzt, die entweder gleichzeitig oder nach einander[1]) auftreten mögen. Jede lokale Verbreiterung würde auf eine bestimmte Impulsbreite hinweisen.

Die Vorstellung von dem Zusammenhange der Kathoden- und Röntgenstrahlen lehrt (vgl. die pag. 12 citirte Arbeit von J. J. Thomson), dass in dem extremen Falle, wo die Kathodenpartikelchen *mit Lichtgeschwindigkeit* fliegen und wo sie bei der Erzeugung der Röntgenstrahlen *plötzlich* zur Ruhe kommen, die Impulsbreite gleich dem Durchmesser der Kathodenpartikelchen werden würde. Da die genannten Voraussetzungen nie genau

1) Vgl. C. H. Wind, Wiedemann's Annalen 68 (1899), pag. 901.

erfüllt sein können, wird die Impulsbreite in Wirklichkeit grösser wie jener Durchmesser sein. Nun schätzt man den Radius der Wirkungssphäre der ponderabeln Moleküle (= Durchmesser der Moleküle) bekanntlich etwa zu 0,1 bis 0,5 $\mu\mu$ [1]); den Durchmesser der Kathodenpartikelchen, deren Masse 1000 mal so klein ist, wie die der ponderabeln Moleküle, werden wir 10 mal so klein wie den Durchmesser der gewöhnlichen Moleküle vermuthen. Wir werden also erwarten müssen, dass mindestens

$$\lambda > 0{,}01\ \mu\mu$$

wird. Wie man sieht, ist der oben gefundene Werth von λ mit dieser Ungleichung wohl verträglich.

Die Herren Haga und Wind haben ihrerseits bereits einige — allerdings sehr kurze — Angaben darüber gemacht, wie sie sich die theoretische Verwerthung ihrer Beobachtungen denken; nähere Ausführungen sollen, wie ich erfahre, folgen. Der Gedankengang dieser Forscher ist von dem unsrigen principiell verschieden; trotzdem liegen die Resultate nicht weit auseinander.

Die Herren Haga und Wind stellen sich von vornherein auf einen möglichst umfassenden Standpunkt; sie denken sich die Erregung in der Quelle durch eine beliebige Zustandsfunction $f(t)$ gegeben und lassen es unentschieden, ob diese Function einer periodischen Schwingung oder einem bez. einer Reihe von aperiodischen Impulsen etc. entspricht. Nach dem Fourier'schen Satz wird nun $f(t)$ in eine Serie von rein harmonischen Componenten zerlegt und die einzelne Componente nach den Methoden der gewöhnlichen Beugungstheorie behandelt. Die Wellenlängen der am stärksten vertretenen oder sonst in gewisser Weise ausgezeichneten [2]) harmonischen Componenten sind für die Zustandsfunction $f(t)$ und für die Beschaffenheit der Röntgenstrahlung charakteristisch. In diesem Sinne wird direct von der „Wellenlänge der Röntgenstrahlen" gesprochen und dieselbe zu 0,01 bis 0,2 $\mu\mu$ bestimmt.

In meiner cit. ersten vorläufigen Mittheilung habe ich die vorstehend wiedergegebene Meinung der Herren missverstanden und gesagt, dass sie die Röntgenstrahlung „als einen rein-periodischen oder in gewisser Weise unregelmässig periodischen Vorgang" auffassen, während sie, wie ich von Herrn Wind erfahre, als einen möglichen Specialfall ihrer allgemeinen Zustandsfunction $f(t)$ gerade auch den später von mir behandelten Impuls im Auge hatten.

---

1) Vgl. z. B. Wüllner, Experimentalphysik I, § 104 und 122.

2) Vgl. hierzu C. H. Wind, Ann. der Phys. (Wiedemann) Bd. 68, pag. 896, 1899.

Uebrigens war unser ursprünglicher Ansatz in dieser Arbeit keineswegs auf den extremen Fall des einmaligen Impulses beschränkt, da wir die einfallende Störung ursprünglich durch eine beliebige Zustandsfunction $f(x+Vt)$ gegeben dachten; unser ursprünglicher Ansatz umfasst daher (ebenso wie der von Haga und Wind) das ganze Gebiet der möglichen Strahlungsvorgänge (z. B. die periodische Welle der Optik, wenn wir $f(x)$ mit e^{ix} identificiren). Nur bei der Entwickelung specieller, besonders numerischer Resultate mussten wir uns auf den Fall des Impulses beschränken, während die Theorie von Herrn Wind auch in ihrer weiteren Durchführung den Vorzug voller Allgemeinheit bewahrt.

Ich will schliesslich die Gründe auseinanderlegen, derentwegen ich seinerzeit bei der Inangriffnahme des vorliegenden Problems von der Zurückführung der Impulsbeugung auf die Beugung periodischer Wellen im Sinne der Herren Haga und Wind absehen zu sollen glaubte, bemerke aber ausdrücklich, dass ich nach Rücksprache mit Herrn Wind diesen Gründen selbst kein volles Gewicht mehr beilege (vgl. die Anm. unten).

Will man einen unperiodischen für alle Zeiten definirten Vorgang $f(t)$ nach Fourier darstellen, so bedarf man dazu genau genommen des *Fourier'schen Integrals.* Benutzt man nämlich die *Fourier'sche Reihendarstellung*, indem man ein beliebiges Zeitintervall T als Periode der Entwickelung zu Grunde legt, so stellt man in Wahrheit nicht die gewünschte unperiodische, sondern eine periodische Function von der Periode T dar, z. B. in unserem Falle nicht den einzelnen, einmaligen Impuls, sondern eine unendliche Serie von solchen Impulsen, die in dem zeitlichen Abstand T aufeinander folgen.

Die Zerlegung des unperiodischen in periodische Vorgänge mittels des Fourier'schen Integrals aber bringt es mit sich, dass neben Vorgängen von kurzer auch solche von langer, ja von unendlich langer Periode benutzt werden. Nun ist es klar, dass die übliche Beugungstheorie nur auf die kurzen Schwingungen der Optik passt; was die Beugung der langsamen Schwingungen betrifft, die im Fourier'schen Integrale vorkommen, so hätte ich auf meine für beliebige Wellenlänge gültigen Beugungsformeln zurückgreifen müssen, die ich Math. Ann. Bd. 47 entwickelt habe.[1]) Ueberdies schien es mir, dass dieser Weg, wenn er

1) Theoretisch lässt sich gegen die Ausführungen des Textes wohl kaum etwas einwenden. Practisch wird allerdings auch bei einem aperiodischen Vorgang eine Entwickelung in eine Fourier'sche *Reihe* dann zulässig sein, wenn die Zeit des Ablaufs der Störung an jeder Stelle des Raumes klein ist gegen das Entwickelungsintervall T, wenn also der ganze Vorgang überall merklich zu Null abgenommen hat, bevor die neue nach der Zeit T einsetzende Störung herangekommen ist. Dass sich bei den Röntgenstrahlen ein jener Bedingung genügendes Entwickelungsintervall

sich überhaupt gangbar erwies, ein Umweg gewesen wäre und zu weniger durchsichtigen Resultaten geführt hätte, wie die directe Inangriffnahme des unzerlegten Impulses.

Zu Gunsten des von mir eingeschlagenen Weges sei noch dieses bemerkt: Ein einmaliger Impuls ist fraglos ein ebenso einfaches Ding, wie eine fortgesetzte Schwingung. Dass man sich mit der Beugung der Schwingungsvorgänge, nicht aber mit der der Impulse von altersher beschäftigt hat, ist Sache des Zufalls. Unser einmaliger Impuls stellt sozusagen das eine äusserste Extrem der Strahlungsvorgänge dar, deren anderes Extrem die periodische Welle bildet. Es mag immerhin sein, dass bei den Röntgenstrahlen jenes Extrem nicht vollständig realisirt wird, ebenso wenig wie in der Optik dieses. Die Röntgenstrahlen sowohl wie die optischen Strahlen mögen beide zwischen den völlig unperiodischen und den völlig periodischen Vorgängen liegen, jene näher dem einen, diese näher dem anderen Extrem. Trotzdem ist es berechtigt und im Interesse der Einfachheit der mathematischen Behandlung geboten, das eine Extrem, den Impuls, für sich zu behandeln, so gut wie das andere, die rein periodische Welle.

T angeben lässt, beabsichtigt Herr Wind näher auszuführen. (Vgl. Physikalische Zeitschrift, December 1900.) Ist dieses T überdies sehr klein (von der Ordnung der Lichtschwingungsdauer), so werden die obigen Einwände practisch hinfällig. Ich stimme daher mit Hrn. Wind darin überein, dass von einer principiellen Ueberlegenheit der einen oder anderen Methode im Ernste nicht die Rede sein kann. Jede hat ihre Vorzüge und Schwächen. Der Vorzug der Wind'schen Behandlung besteht in ihrer grösseren Allgemeinheit und Anpassungsfähigkeit an die Versuchsanordnung, der Vorzug der meinigen in der grösseren Anschaulichkeit und concreten Bestimmtheit der Schlussresultate sowie in einer gewissen strengeren Formulirung der Grundlagen.

Brennpunkte der Linsen, Bestimmung der Konstanten der Linsen.

Von Dr. ANTON KILLERMANN,
Königl. Reallehrer an der Luitpoldkreisrealschule in München.

Mit lithogr. Tafel I.

Wenn ein Lichtstrahl an die Grenze zweier Medien kommt, so erfährt er dort erfahrungsgemäss einerseits Reflexion in das erste Medium und andererseits Brechung in das neue Medium nach den bestehenden Reflexions- und Brechungsgesetzen, wofern nicht der Lichtstrahl unter einem solchen Einfallswinkel ankommt, dass der Grenzwinkel erreicht oder überschritten ist und dann der Strahl nur Reflexion, Totalreflexion, erfährt.

Überblickt man die bisherigen physikalischen Untersuchungen und Gesetze über Linsen, so sieht man sofort, dass diese Betrachtungen nicht vollständig sein dürften, indem sie nur die Brechung durch die Linsen beschreiben und erklären, aber nicht die auch stattfindende Reflexion und deren Gesetze berücksichtigen, wiewohl diese letztere auch Ursache von interessanten Erscheinungen ist, deren Studium sich nicht minder wichtig für die Theorie und Praxis erweist als das der bereits bekannten Linsengesetze. Zudem erhellt ohne weiteres, dass durch die Nichtbeachtung der stattfindenden Reflexionen der weitaus grössere Teil der physikalischen Erscheinungen an der Linse sich der Rechnung und Beobachtung entzieht, so dass die heutige Linsentheorie gewissermassen nur das erste Glied zu einer grossen Reihe von Gliedern, den neu zu gewinnenden Gesetzen, bildet.

Übersicht.

Von diesem Gesichtspunkte ausgehend bezweckt gegenwärtige Abhandlung die Lösung folgender Aufgaben, die gleichzeitig eine kurze Übersicht über die ganze Arbeit geben:

1. Aufstellung einer einzigen, allgemein giltigen, geschlossenen Formel für sämtliche Brennweiten, die sich bei der Vernachlässigung der Linsendicke unter Berück-

sichtigung aller Reflexionen und Brechungen durch die Linse ergeben.

Diskussion der erhaltenen Formel und allgemeine Definition der Begriffe: „Konvex- und Konkavlinse“ an Hand der erhaltenen Formel.

2. Einführung der Linsendicke, Berechnung der durch die Vernachlässigung der Linsendicke sich ergebenden Korrektionsglieder ersten Grades, speziell für Plankonvexlinsen.
3. Beschreibung von angestellten, die Theorie bestätigenden Experimenten.
4. Anwendung der gefundenen Gesetze zur einfachen Bestimmung der Konstanten der Linse, Centrierung von Linsen und Blenden in Röhren.

Abhandlung.

I. Aufstellung einer einzigen, geschlossenen Formel für die Brennweite. Diskussion der Formel.

Von einem leuchtenden Punkte in der optischen Axe einer Konvexlinse, deren Krümmungsradien r_1 und r_2 sind und deren Brechungsindex durch n gegeben ist, falle ein Lichtstrahl auf die Linse. Der Allgemeinheit der Betrachtung wird durch Annahme einer Konvexlinse kein Eintrag gethan, da ja über die Krümmungsradien nachträglich sowohl bezüglich Grösse als auch Vorzeichen beliebig verfügt werden kann, wodurch sich die gewonnenen Gesetze sofort auf alle Linsenarten anwenden lassen. Der Brechungsindex n sei zunächst grösser als die Einheit, ohne dadurch eine Spezialisierung zu bewirken, da die Grösse von n für die Ableitung gleichgiltig ist. Ausserdem wird bemerkt, dass ebenso von vornherein den Ausführungen die Annahme zu Grunde gelegt wird, dass die vorkommenden Winkel so klein seien, dass statt sin und tg der Winkel selbst in Bogenmass ausgedrückt gesetzt werden darf, wie diese Annahme ja auch stets bei der Ableitung der Linsengesetze gemacht wird. Die Dicke der Linse möge ferner gegen die übrigen Grössen verschwindend klein sein, so dass sie in den allgemeinen Formeln gleich Null zu setzen ist.

Allgemeine Betrachtung.

Der bei der Untersuchung einzuschlagende Weg veranschaulicht sich leicht, wenn man zusieht, welche Gesetze der Lichtstrahl auf seinem Wege befolgt. Beiliegende Zeichnung soll dies an Hand folgender Erklärung näher darthun (Fig. 1).

Der Lichtstrahl geht von A, einem Punkte der optischen Axe aus und trifft in C auf die Vorderfläche (r_1) der Linse. In diesem Punkte erfährt der Lichtstrahl eine Teilung; ein Teil wird in C reflektiert — CE — und ein anderer Teil dringt in die Linse mit Brechung ein. Der reflektierte Strahl rückwärts verlängert schneidet in B_1', der gebrochene Strahl in B_2 die optische Axe. Die Konstruktion dieser Punkte ergiebt sich nach den geltenden Reflexions- und Brechungsgesetzen leicht, ebenso auch die Konstruktion der folgenden Punkte, die nach den bekannten Gesetzen ausgeführt werden kann.

Unser weiteres Interesse beansprucht der gebrochene Strahl CB_2. Dieser Strahl trifft in dem Punkte D die zweite Kugelfläche (r_2) und tritt dort aus der Linse aus, um nach den bekannten Linsengesetzen wieder die Axe zu treffen und den bekannten Bildpunkt B zu erzeugen. Indes tritt in Punkt D der Strahl nur zum Teile aus, teilweise wird er an der Kugelfläche (r_2) reflektiert und schneidet die optische Axe in einem Punkt B_3. Dieser reflektierte Strahl kommt nun in C_1 wieder zur ersten Kugelfläche zurück, erfährt dort wieder eine Teilung, indem ein Teil aus der Linse nach vorne austritt, ein anderer Teil aber abermals reflektiert wird. Der austretende gebrochene Teil trifft in R_1 die optische Axe, während der reflektierte Strahl in B_4 die Axe schneidet und in D_1 die zweite Kugelfläche trifft. Im Punkte D_1 wiederholt sich nun abermals der bereits besprochene Vorgang; ein Teil tritt aus der Linse aus, trifft in B_1 die Axe, ein Teil wird wieder reflektiert, um dann abermals von der ersten Kugelfläche gebrochen und zum Teil wieder reflektiert zu werden. Diese Erscheinung wiederholt sich unzählige Male, wenn nicht durch zufällige oder beabsichtigte Konstruktion der Linse die Gesetzmässigkeit der Aufeinanderfolge der B und R durch Totalreflexion verhindert wird. Die einzelnen Lichtstrahlen verlieren natürlich auf ihrem beschriebenen Wege teils durch Absorption und Diffusion, teils durch die erwähnte stets stattfindende Teilung immer mehr und mehr an Intensität, so dass der experimentelle Nachweis, der wohl sehr gut, wie später beschrieben ist, für die ersten vier Bildpunkte ... B B_1 R_1 R_2 ... geführt werden kann, für die weiteren Bildpunkte leider nicht mehr möglich ist. Indes ist die theoretische Untersuchung deshalb doch nicht ohne Interesse.

Obige Betrachtung zeigt nun, dass zu einem leuchtenden Punkte A unzählige Bildpunkte ausserhalb der Linse, sowohl vor derselben als auch hinter derselben, gehören. Einem unendlich fernen Punkte A entsprechen demnach ebensoviele Brennpunkte vor und hinter der Linse wie im vorigen Falle Bildpunkte, also unendlich viele Brennpunkte.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen bezweckt die weitere Untersuchung, die theoretische Ableitung hierfür zu geben, d. h. den Zusammenhang aufzustellen zwischen den Konstanten der gegebenen Linse und den Entfernungen des leuchtenden Objekts (a) und der durch das leuchtende Objekt entworfenen Bildpunkte von der Linse, sowie alle Brennweiten zu bestimmen.

Theoretische Untersuchung.

I. Reflexion an der Vorderfläche der Linse:

Der Lichtstrahl AC wird von der Vorderfläche (r_1) der Linse nach dem Gesetze über sphärische Spiegel teilweise reflektiert und folgt, wenn $AS_1 = a =$ Gegenstandsweite, $S_1B'_1 = b_1 =$ Bildweite und $f = -\frac{r_1}{2} =$ Brennweite ist, dem Gesetze:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}; \quad f = -\frac{r_1}{2};$$

hierbei ist f die dem $a = \infty$ entsprechende Bildweite oder Brennweite.

II. Brechung durch die I. Fläche der Linse (1 Brech.):

Der gebrochene Lichtstrahl CB_2 folgt dem bekannten Brechungsgesetze, wenn $AS_1 = a$ Gegenstandsweite, $S_1B_2 = b_2 =$ Bildweite, $n =$ Brechungsindex und $r_1 =$ Radius der Kugelfläche I:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_2} = \frac{n-1}{r_1};$$

woraus b_2 zu berechnen ist.

III. Reflexion in der Linse an Fläche II (1 Refl. 1 Brech.):

Der Lichtstrahl CB_2 trifft in D die zweite Fläche der Linse und wird dort reflektiert. Für ihn ist $B_2S_2 = d - b_2 =$ Gegenstandsweite, wobei $d =$ Dicke der Linse; $b_3 = S_2B_3 =$ Bildweite, $r_2 =$ Radius der Fläche II. Diese Reflexion ist durch die Formel bestimmt:

$$\frac{1}{d-b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{2}{r_2} \quad \text{(Gesetz der Reflexion).}$$

Dazu kommt noch die Formel in II, aus der sich b_2 bestimmt, nämlich:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_2} = \frac{n-1}{r_1} \quad \text{(aus Nr. II).}$$

IV. Brechung durch Fläche II der Linse (2 Brech.):

Der Lichtstrahl $CB_2 \equiv CD$ wird in D gebrochen nach demselben Brechungsgesetz wie in Nr. II, nur tritt statt:

$$a \dots d - b_2$$
$$b_2 \dots S_2 B = b$$

und statt $n \cdots \frac{1}{n}$ und statt $r_1 \cdots - r_2$ ein, so dass sich ergiebt:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_2} = \frac{n-1}{r_1} \text{ (aus Nr. II zur Ber. v. } b_2\text{)},$$

$$\frac{1}{d - b_2} + \frac{1}{nb} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{-r_2};$$

oder, wenn man $d = 0$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{n}{b_2} &= \frac{n-1}{r_1} \\ -\frac{n}{b_2} + \frac{1}{b} &= \frac{n-1}{r_2} \end{aligned}\right\} d = 0.$$

Daher durch Addition:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right] \equiv \frac{1}{F_0}.$$

NB. Die hier in Nr. I und II und IV angegebenen Formeln sind die bereits bekannten und verwendeten Linsengesetze, die nur der Allgemeinheit der Betrachtung und nachherigen Verwendung wegen angegeben werden.

V. Brechung durch Fläche I der Linse (1 Refl. 2 Brech.):

Der Lichtstrahl CD, der in D nach den in III angegebenen zwei Gesetzen nach Punkt B_3 reflektiert wird, gelangt von diesem Punkte aus als Lichtstrahl B_3C_1 nach Punkt C_1 der Fläche I der Linse und wird dort aus der Linse heraus nach vorne gebrochen nach den Gesetzen:

$$\frac{1}{-(d-b_3)} + \frac{1}{-nx_1} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{r_1};$$

wobei:

$$-(d - b_3) = S_1 B_3 = \text{Gegenstandsweite},$$
$$-x_1 = S_1 R_1 = \text{Bildweite},$$
$$\frac{1}{n} = \text{Brechungsindex}, \quad r_1 = \text{Kugelradius}.$$

Formt man obige Formel um und schreibt noch die zwei in Nr. III gefundenen Gesetze, die gleichzeitig gelten, dazu, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{n}{b_2}&=\frac{n-1}{r_1};\\ \frac{1}{d-b_2}+\frac{1}{b_3}&=\frac{2}{r_2};\end{aligned}\right\}\text{ (aus III).}$$

$$\frac{n}{d-b_3}+\frac{1}{x_1}=\frac{n-1}{r_1};$$

setzt man nun d = Linsendicke = Null und multipliziert die zweite Gleichung mit n und addiert diese drei Gleichungen, um b_2 und b_3 als nicht messbare Grössen zu beseitigen, so erhält man:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}=(n-1)\left[\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}\right]+\frac{2n}{r_2}$$

$$=2\cdot\left[(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+\frac{1}{r_2}\right]$$

$$=2\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right] \text{ (aus IV).}$$

Daher:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}=2\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right]\equiv\frac{1}{F_I''}.$$

Aus der nunmehr erhaltenen Formel ist folgendes zu ersehen: Das Glied ... $2\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right]$ ist eine Konstante, es spielt hierin der Radius des zweiten Kugelkreises eine Hauptrolle. Setzt man den ganzen Ausdruck $=\frac{1}{F_I''}$, so stellt F_I'' den Bildpunkt für $a=\infty$ dar und giebt somit einen Brennpunkt an, der um die Grösse F_I'' vor der Linse liegt und ein reeller Brennpunkt ist, da für die obigen Annahmen in ihm die wirklichen Strahlen zusammentreffen. Die Bezeichnung F_I'' dient zur Hervorhebung der dem r_2 zukommenden Hauptrolle und der Anzahl der in der Linse vorkommenden Reflexionen (I).

Kehrt man diese Linse um, d. h. vertauscht man r_1 mit r_2, so ändert sich in der gefundenen Formel sonst nichts, als dass jetzt die Grösse r_1 ebendieselbe Hauptrolle spielt, wie vorher r_2 und dadurch bei Verschiedenheit der Radien auch die neue Brennweite in F_I' verändert, was jetzt auch ein anderes x_1 bedingt. Es gilt dann die Formel:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{x_1}=2\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_1}\right]\equiv\frac{1}{F_I'};$$

hierbei bedeutet $\frac{1}{F_0}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$ die reziproke, gewöhnliche Brennweite obiger Linse.

Bezüglich der Grössen F_I'' und F_I' ist zu bemerken, dass beide für die nunmehr positiven r_1 und r_2 (bei Konvexlinsen) stets kleiner sind und sein müssen als die Brennweite F_0 und zwischen den Grenzen Null und $\frac{F_0}{2}$ sich bewegen werden.

Die Formel selbst ist gerade so gebaut wie die bekannte Linsenformel. Die Diskussion der erhaltenen Beziehung ist, abgesehen von der Modifikation durch die Lage des Brennpunktes vor der Linse, die gleiche wie bei der bekannten Linsenformel. Parallel zur Axe einfallende Strahlen gehen nach einmaliger Brechung, Reflexion und wiederholter Brechung durch den Brennpunkt. Strahlen, die vom Brennpunkte kommen, gehen nach gleichem Schicksal in der Linse parallel zur Axe zurück. Dadurch ergiebt sich sofort die Lage und Grösse der reellen Bilder, sowie deren geometrische Konstruktion. Die Bilder sind je nach Grösse von a und F_I reell und verkehrt oder virtuell und aufrecht.

VI. Reflexion an Fläche I der Linse (2 Refl. 1 Brech.):

Der in V behandelte Lichtstrahl $B_3 C_1$ wird im Punkte C_1 nicht bloss gebrochen und folgt dem in V abgeleiteten Gesetze, sondern ein Teil wird in Richtung von $C_1 B_4$ reflektiert, wobei $B_3 S_1 = d - b_3 =$ Gegenstandsweite, $S_1 B_4 = b_4 =$ Bildweite und r_1 Krümmungsradius der reflektierenden Fläche ist. Es gilt deshalb:

$$\frac{1}{d-b_3} + \frac{1}{b_4} = \frac{2}{r_1} \cdot$$

Zudem gelten noch die in Nr. III angegebenen zwei Formeln, so dass der Lichtstrahl durch die drei Gleichungen:

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_2} = \frac{n-1}{r_1};$$

$$\frac{1}{d-b_2} + \frac{1}{b_3} = \frac{2}{r_2};$$

$$\frac{1}{d-b_3} + \frac{1}{b_4} = \frac{2}{r_1};$$

nunmehr festgelegt ist und die Richtung $C_1 B_4$ hat.

VII. Brechung an Fläche II der Linse (2 Refl. 2 Brech.):

Der durch die Nr. VI angegebenen Gleichungen bestimmte Lichtstrahl trifft im Punkte D_1 seiner Richtung die zweite Fläche der Linse und wird dort gebrochen. Das Gesetz lautet, wenn:

$B_4 S_2 = d - b_4 =$ Gegenstandsweite,

$S_2 B_1 = y_1 = \cdots$ Bildweite,

$- r_2$ und $\frac{1}{n}$ Radius und Brechungsindex,

$$\frac{1}{d-b_4} + \frac{1}{n y_1} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{-r_2} \text{ (Gesetz der Brechung),}$$

oder:

$$\frac{n}{d-b_4}+\frac{1}{y_1}=\frac{n-1}{r_2}.$$

Hierzu nun die drei in Nr. VI gefundenen Gleichungen angeschrieben, ergiebt folgende vier Beziehungen:

$$\frac{1}{a}+\frac{n}{b_2}=\frac{n-1}{r_1};$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{d-b_2}+\frac{1}{b_3}&=\frac{2}{r_2};\\ \frac{1}{d-b_3}+\frac{1}{b_4}&=\frac{2}{r_1};\end{aligned}\right\}\ \text{Multipl. mit } n.$$

$$\frac{n}{d-b_4}+\frac{1}{y_1}=\frac{n-1}{r_2};$$

Setzt man nun wieder $d=$ Null $=$ Dicke der Linse, und multipliziert die zweite und dritte Gleichung mit n und addiert sämtliche Gleichungen, so bekommt man:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{y_1}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+2n\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=(2n+n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\equiv\frac{1}{F_2}.$$

Die erhaltene Formel $\frac{1}{a}+\frac{1}{y_1}=\frac{1}{F_2}$ zeigt folgendes: Zunächst lautet sie gerade so wie die gewöhnliche Linsengleichung, nur sind die Grössen andere. Die Grösse F_2 ist die Bildweite für $a=\infty$, also ein Brennpunkt. Merkwürdigerweise zeigt sich hier wieder, wie in Nr. IV, vollständige Symmetrie in dem Ausdrucke für $\frac{1}{F_2}$ bezüglich der beiden Krümmungsradien der die Linse begrenzenden Kugelflächen, so dass ohne Veränderung des Wertes von F_2, der neuen Brennweite, eine Vertauschung der beiden Radien vorgenommen werden darf, d. h. eine Umkehrung der Linse. Daraus folgt, dass auch vor der Linse in demselben Abstande ... F_2 ... ein zweiter Brennpunkt liegt. Die Diskussion der gefundenen Formel lautet genau so wie die der gewöhnlichen Linsenformel, nur wird der Strahl innerhalb der Linse zweimal reflektiert. Ob demnach die Bilder reell oder virtuell, wie gross sie sind und wo sie entstehen und wie sie zu konstruieren sind, ist als bekannt vorauszusetzen.

Umformungen von F_2.

Die Grösse $\frac{1}{F_2}$ lässt sich auf zweierlei Arten umformen, wenn man die bereits abgeleiteten früheren Grössen benützt:

$$\frac{1}{F_2}=(2n+n-1)\left[\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right].$$

Nun ist aber nach Nr. IV

$$(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{F_0} \quad \text{oder:} \quad \frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{F_0\,(n-1)};$$

somit:

$$\frac{1}{F_2}=\frac{2n+(n-1)}{F_0(n-1)}, \quad \text{oder:} \quad F_2=F_0\cdot\frac{n-1}{3n-1}.$$

Daher ist F_2 proportional zu F_0 und der Proportionalitätsfaktor ist bloss von n = Brechungsindex abhängig.

Andere Umformung:

$$\frac{1}{F_2}=(2n+n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=(3[n-1]+2)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=3(n-1)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)+2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)=3\cdot\frac{1}{F_0}+2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

$$=4\cdot\frac{1}{F_0}+2\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{1}{F_0}=2\left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_1}\right)+2\left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right)-\frac{1}{F_0}$$

= (nach Formel Nr. V)

$$\frac{1}{F_2}=\frac{1}{F_I'}+\frac{1}{F_I''}-\frac{1}{F_0}.$$

Aus dieser Formel erhellt wiederum die Unabhängigkeit der gefundenen Brennweite von einer Vertauschung der beiden Krümmungsradien, da sich dabei nur die zwei ersten Glieder ändern, aber ineinander übergehen und denselben Gesamtwert ergeben. Zugleich ist hierdurch der Zusammenhang zwischen F_2 und den übrigen durch die Linse bedingten Brennweiten gezeigt.

Die Grösse F_2 ist, wie leicht aus $F_2=F_0\frac{n-1}{3n-1}$ ersichtlich ist, für $n>1$ stets kleiner als F_0.

VIII. Reflexion an der zweiten Fläche der Linse (3 Refl. 2 Brech.):

Der in Nr. VII betrachtete Lichtstrahl C_1D_1 tritt in D_1 nun nicht bloss aus der Linse heraus, sondern wird in diesem Punkte zum Teil auch wieder in die Linse reflektiert nach einem Punkte B_5 der Axe und gelangt in C_2 wieder an die erste Fläche der Linse, um dort wieder nach dem Brechungsgesetz die Linse zu verlassen (zwei Brechungen) und in einem Punkte R_2 die optische Axe zu treffen. Der reflektierte Lichtstrahl (bis Punkt C_2) folgt den durch folgende vier Gleichungen festgelegten Gesetzen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{a} + \frac{n}{b_2} &= \frac{n-1}{r_1},\\
\frac{1}{d-b_2} + \frac{1}{b_3} &= \frac{2}{r_2},\\
\frac{1}{d-b_3} + \frac{1}{b_4} &= \frac{2}{r_1},
\end{aligned}\right\} \text{(aus Nr. VI)}$$

$$\frac{1}{d-b_4} + \frac{1}{b_5} = \frac{2}{r_2}, \quad \text{(Reflexion in } D_1\text{)}.$$

IX. **Brechung im Punkte C_2 der Linse** (3 Refl. 2 Brech.):

Zu den vorstehenden vier Gleichungen, welche den bisherigen Verlauf des Lichtstrahles (bis Punkt C_2) bedingen, kommt infolge der Brechung im Punkte C_2 eine weitere fünfte Gleichung hinzu, die gerade so gebildet ist, wie die Beziehung in Nr. V. Diese neue Gleichung lautet:

$$\frac{n}{d-b_5} + \frac{1}{x_2} = \frac{n-1}{r_1}, \quad \text{(Brechung in } C_2\text{)}.$$

Die vier Gleichungen von Nr. VIII und die Gleichung hier verbunden, nachdem $d = 0$ gesetzt und die drei mittleren Gleichungen, um $b_2 \ldots b_3 \ldots b_4 \ldots b_5 \ldots$ zu beseitigen, mit n multipliziert wurden, ergeben $x_2 =$ ges. Bildweite aus:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x_2} = \frac{2(n-1)}{r_1} + 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2}\right) = 2n\left(\frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2}\right) - \frac{2}{r_1}$$

$$= 4n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \frac{2}{r_1} = \frac{4n}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0} - \frac{2}{r_1} \equiv \frac{1}{F''_{III}}.$$

Dieses $\frac{1}{F''_{III}}$ lässt sich noch weiterhin interessant umformen in folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{F''_{III}} = 4n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{2}{r_2} \quad \left(\text{Add. u. Subtr. von } \frac{2}{r_2}\right)$$

$$= 2(2n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + \frac{2}{r_2} = \frac{2\cdot(2n-1)}{(n-1)\cdot F_0} + \frac{2}{r_2};$$

und da nun aus Vorhergehendem:

$$\frac{1}{F'_I} + \frac{1}{F''_I} = 2\left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_1}\right) + 2\left(\frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{(Nr. VII)}$$

$$= 2\left|\frac{2}{F_0} + \frac{1}{(n-1)F_0}\right| = \frac{2(2n-1)}{(n-1)F_0};$$

so:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{x_1} = \frac{1}{F'_I} + \frac{1}{F''_I} + \frac{2}{r_2} \equiv \frac{1}{F''_{III}} = \frac{1}{F_0} + \frac{1}{F_2} + \frac{2}{r_2}, \quad \text{(Nr. VII)}.$$

Der merkwürdige Zusammenhang zwischen den verschiedenen Brennweiten, sowie die Hauptrolle, die hier wiederum r_2 spielt, erhellen aus der gefundenen Formel sofort ohne weiteres.

Aufstellung einer allgemeinen Formel für zwei Brechungen und beliebig viele Reflexionen.

Betrachtet man die Art und Weise, wie die bisherigen Formeln gewonnen wurden, so erhält man stets links die Summe aus reziproker Gegenstandsweite und reziproker Bildweite und rechts stets die reziproke Brennweite, um deren allgemeine Form sich es weiter handelt. Selbstverständlich werden jetzt nur die **in** der Linse stattfindenden Reflexionen und Brechungen betrachtet, während die allererste Reflexion an der Vorderfläche der Linse als nicht hierher gehörig ausser acht gelassen wird.

Als erste Formel für 0 Reflexionen in der Linse und zwei Brechungen hat sich als reziproker Wert der Brennweite ergeben:

$$\frac{1}{F_0} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2}.$$

Kommt nun eine Reflexion an der Fläche II der Linse hinzu, d. h. erleidet der Strahl eine Reflexion und zwei Brechungen, so ergiebt sich der Ableitung gemäss als Bestimmungsstück der ersten Brechung wieder das obige erste Glied $\frac{n-1}{r_1}$, die folgenden Glieder werden aber andere, entsprechend der Reflexion an Fläche II der Linse und der Brechung durch die Fläche I, wodurch sich folgende Formel ergab:

$$\frac{1}{F_I''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1}.$$

Bei zwei Reflexionen und zwei Brechungen ergiebt sich noch ein weiteres Glied $\cdots \frac{2n}{r_1} \cdots$ infolge der Reflexion an der ersten Fläche der Linse und statt des Gliedes $\cdots \frac{n-1}{r_1} \cdots$, das ja nunmehr keine Bedeutung haben kann, da die zweite Brechung nicht mehr durch die Vorderfläche der Linse, sondern durch die II. Fläche stattfindet, das Glied $\cdots \frac{n-1}{r_2}$, so dass die Formel sich ergiebt:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{2n}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

In dieser Weise geht es nun weiter. Für drei Reflexionen und zwei Brechungen tritt das Glied $\cdots \frac{2n}{r_2} \cdots$ neu hinzu und da die zweite Brechung jetzt wieder durch die Fläche I der Linse stattfindet ... statt des Gliedes $\frac{n-1}{r_2} \cdots$ das Glied $\frac{n-1}{r_1}$, um folgende bereits gefundene Form zu geben:

$$\frac{1}{F_3''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{2n}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1}$$
$$= \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} + 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Bei vier Reflexionen und zwei Brechungen ergiebt sich entsprechend statt $\frac{n-1}{r_1}\cdots$ wieder $\frac{n-1}{r_2}$ und ausserdem als neues Glied $\cdots\frac{2n}{r_1}\cdots$ und man erhält:

$$\frac{1}{F_4} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{2n}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{2n}{r_1} + \frac{n-1}{r_2}$$
$$= \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 2\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Die Betrachtung so fortgesetzt ergiebt folgende übersichtliche Darstellung der einzelnen Brennweiten in ihrem reziproken Werte für alle möglichen Reflexionen und für stets zwei Brechungen. Die Tabelle lautet:

Übersicht.

Anzahl der Brechungen = 2.

Anzahl der Reflexionen.	Wert der reziproken Brennweite:
0	$\frac{1}{F_0} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 0$
1	$\frac{1}{F_1''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1}$
2	$\frac{1}{F_2} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
3	$\frac{1}{F_3''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} + 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
4	$\frac{1}{F_4} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 2\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
5	$\frac{1}{F_5''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} + 2\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
6	$\frac{1}{F_6} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 3\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
7	$\frac{1}{F_7''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} + 3\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
8	$\frac{1}{F_8} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 4\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
9	$\frac{1}{F_9''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} + 4\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
10	$\frac{1}{F_{10}} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + 5\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$
⋮	u. s. w.

Aus dieser Darstellung, aus welcher die Bildungsweise der verschiedenen Brennweiten erhellt, und welche mit Leichtigkeit sich durch Induktion, Bestätigung des Schlusses von k auf $k+1$, nachweisen liesse, folgen nun folgende Gesetze:

Wenn die Anzahl der Reflexionen eine gerade Zahl ist, d. h. wenn der Strahl durch die hintere Fläche der Linse austritt, so ist die sich ergebende Brennweite stets symmetrisch bezüglich der beiden Krümmungsradien; man kann und darf also die Linse, ohne dadurch die Brennweite zu verändern, umkehren. Es ergiebt sich daraus die Existenz ebenso vieler Brennpunkte von derselben Beschaffenheit vor der Linse wie auch hinter der Linse. Ferner sieht man, dass die reziproken Brennweiten in diesem Falle eine arithmetische Reihe bilden, deren ...

$$\ldots \text{ erstes Glied} \ldots \frac{1}{F_0} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2}$$

und deren Differenz ... $2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{2n}{(n-1)F_0} \cdots$ ist.

Für eine ungerade Anzahl von Reflexionen gilt die Symmetrie wie vorher nicht; jetzt vertauscht sich r_1 mit r_2 und es geht jede Formel dadurch von ... $\frac{1}{F''}$ in $\cdots \frac{1}{F'}$ über, und besitzt bei verschiedenen Krümmungsradien verschiedene Werte. Die aufeinander folgenden reziproken Brennweiten für eine ungerade Anzahl von Reflexionen bilden wieder eine arithmetische Reihe, deren

$$\cdots \text{ erstes Glied} \cdots \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} \cdots$$

und deren Differenz ... $2n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{2n}{(n-1)F_0}$ ist.

Demzufolge ergiebt sich:

Allgemeines Glied.

$$p = \text{ gerade Zahl, so} \cdots \frac{1}{F_p} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{n-1}{r_2} + p \cdot n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

$$p = \text{ ungerade Zahl, so} \cdots \frac{1}{F_p''} = \frac{n-1}{r_1} + \frac{2n}{r_2} + \frac{n-1}{r_1} + (p-1)n\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Die folgende Betrachtung soll nun für ein beliebig gegebenes p d. h. für eine beliebig gegebene Anzahl von Reflexionen des Strahles in der Linse, eine einzige geschlossene Formel aufstellen, die gleichzeitig für gerade und ungerade p gilt und immer die entsprechenden von der zugehörigen reziproken Brennweite darstellt.

Werden die Ausdrücke:

$$\frac{n-1}{r_1}+\frac{n-1}{r_2}\cdots \text{ mit } A,$$

$$2n\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)\cdots \text{ mit } B,$$

$$\frac{n-1}{r_1}+\frac{2n}{r_2}+\frac{n-1}{r_1}\cdots \text{ mit } C\cdots$$

bezeichnet, so sieht man, dass die Koeffizienten von B in obigen Gliedern für die reziproke Brennweite folgende Übersicht bieten:

Werte von p.	Koeffizient von B
Für $p=0$ und $p=1$	... 0
$p=2$ und $p=3$	... 1
$p=4$ und $p=5$	... 2
$p=6$ und $p=7$	... 3 etc.

Der Ausdruck $\cdots \frac{p}{2}$ ergiebt nun für gerade p die verlangten Koeffizienten, während $\cdots \frac{p-1}{2} \cdots$ die Koeffizienten für ungerade p giebt. Diese beiden Ausdrücke stimmen in $\frac{p}{2}$ überein. Nun wird eine Funktion gesucht von der Art, dass dieselbe

für gerade p ... den Wert ... Null,

„ ungerade $p \cdots$ den Wert $\cdots -\frac{1}{2}$ giebt.

Eine solche Funktion ist aber offenbar:

$$\cdots(-1)^p\cdot\frac{1}{4}[1-(-1)^p]\cdots$$

Es nimmt also nun der Ausdruck:

$$1)\qquad \cdots\frac{p}{2}+(-1)^p\cdot\frac{1}{4}[1-(-1)^p]=\frac{1}{4}\{2p-[1-(-1)^p]\}\cdots$$

für die oben bezeichneten p die geforderten Koeffizientenwerte von B an.

... Die Ausdrücke A und C ...

stimmen zunächst in dem Gliede $\cdots \frac{n-1}{r_1} \cdots$ überein.

Dem Gliede $\cdots \frac{2n}{r_2}$ entspricht in A das Glied Null.

Dem Gliede $\cdots \frac{n-1}{r_1}$ „ „ A „ „ $\frac{n-1}{r_2}$.

Es wird daher wiederum eine Funktion gesucht, die

für $p =$ gerade Zahl ... den Wert Null

und

„ $p =$ ungerade „ ... „ „ ... $\frac{2n}{r_2}$ ... hat.

Eine solche Funktion heisst:

$$2)\qquad \cdots \frac{n}{r_2}[1-(-1)^p]\cdots$$

Es erübrigt jetzt noch eine andere Funktion zu finden, die ...

... für gerade p ... $\frac{n-1}{r_2}$ ...

... für ungerade p ... $\frac{n-1}{r_1}$ giebt.

Eine solche Funktion lautet:

$$3)\quad (n-1)\cdot\frac{\frac{r_1+r_2}{2}+\frac{r_1-r_2}{2}(-1)^p}{r_1 r_2} = (n-1)\left[\frac{1+(-1)^p}{2r_2}+\frac{1-(-1)^p}{2r_1}\right].$$

Die allgemeine Funktion, die für gerade p den Ausdruck ... A, und für ungerade p den Ausdruck C ergiebt, heisst nach 2) und 3) nunmehr:

$$\frac{n-1}{r_1}+\frac{n}{r_2}[1-(-1)^p]+(n-1)\left[\frac{1+(-1)^p}{2r_2}+\frac{1-(-1)^p}{2r_1}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(n-1)[3-(-1)^p]\left[\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right]+\frac{2}{r_2}[1-(-1)^p]\right\},$$

oder da $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{(n-1)F_0}$:

$$4)\qquad =\frac{1}{2}\left\{\frac{3-(-1)^p}{F_0}+\frac{2}{r_2}[1-(-1)^p]\right\};$$

dadurch stellt sich jetzt das allgemeine Glied $\frac{1}{F_p}$ giltig für jedes p im folgenden Ausdruck dar: [aus 4) ... 1) und B]

$$\frac{1}{F_p}=\frac{1}{2}\left\{\frac{3-(-1)^p}{F_0}+\frac{2}{r_2}[1-(-1)^p]\right\}+\frac{1}{4}\Big[2p-[1-(-1)^p]\Big]\cdot 2n\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right)$$

= ... nach etlichen Umformungen ...

Allgemeiner Ausdruck für die Brennweite.

$$\frac{1}{F_p}=\frac{1}{F_0}\cdot\frac{(p+1)n-\frac{3-(-1)^p}{2}}{n-1}+[1-(-1)^p]\cdot\frac{1}{r_2}.$$

Die Formel ergiebt für ungerade p stets den Wert ... $\frac{1}{F_p}$, worin der Krümmungsradius r_2 die Hauptrolle spielt.

Man braucht bloss r_1 mit r_2 zu vertauschen, wenn die Linse umgekehrt wird, um sofort $\cdots \frac{1}{F'_p} \cdots$ zu erhalten.

Diese allgemein giltige, geschlossene Formel für die reziproke Brennweite lehrt nun, dass es für p von Null beginnend bis $\ldots p = \infty \cdots$ unendlich viele Brennweiten giebt. Für ungerade p sind dieselben nach vorn positiv zu zählen, von woher der Lichtstrahl kommt. Für gerade p sind sie nach rückwärts positiv zu nehmen. Will man übrigens bloss eine Richtung als positive nehmen z. B. wie gewöhnlich die Richtung, nach welcher der ankommende Strahl weiter vordringen will, so kann man dies in der allgemeinen Formel sofort zum Ausdruck bringen, wenn man den Wert von $\frac{1}{F_p}$ mit $(-1)^p$ multipliziert; indes lasse ich dies bei der weiteren Betrachtung ausser acht und nehme aus praktischen, später klar werdenden Gründen, die Definitionen der Linsenarten betreffend, die oben erwähnten Richtungen, je nachdem p gerade oder ungerade ist, als positiv.

Setzt man $p =$ Null, so erhält man:

$$\frac{1}{F_p} = \frac{1}{F_0}, \quad \text{für} \quad p = 0;$$

d. h. man erhält die bekannte gewöhnliche Linsenbrennweite, die somit das erste Glied einer unendlichen Reihe von Brennweiten bildet, die alle definiert sind als Bildweiten eines unendlich entfernten leuchtenden Punktes.

$p = 2k =$ **gerade Zahl.**

Setzt man in der allgemeinen Formel $p =$ gerade Zahl, so verschwindet stets das zweite Glied, nämlich der Ausdruck $\ldots [1-(-1)^p]\frac{1}{r_2}\cdots$, d. h. das gewonnene Resultat ist jetzt nur mehr von F_0 und n abhängig; also symmetrisch in Bezug auf r_1 und r_2, weshalb sich stets dieselbe Brennweite auch bei Umkehrung der Linse ergiebt. Der Ausdruck für $p = 2k$ giebt allgemein:

$$\frac{1}{F_p} = \frac{1}{F_{2k}} = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{(2k+1)n - 1}{n-1} = \frac{1}{F_0} + k \cdot \frac{2n}{(n-1)F_0}.$$

Der Ausdruck stellt also, wie bereits oben erwähnt, das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe dar, deren Anfangsglied $\frac{1}{F_0}$ und deren Differenz $\frac{2n}{(n-1)F_0} \cdots$ ist. Speziell ergeben sich folgende Einzelwerte:

$$k=0\cdots\frac{1}{F_0}=\frac{n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0},$$

$$k=1\cdots\frac{1}{F_2}=\frac{3n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0},$$

$$k=2\cdots\frac{1}{F_4}=\frac{5n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0},$$

$$k=3\cdots\frac{1}{F_6}=\frac{7n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0},$$

$$k=4\cdots\frac{1}{F_8}=\frac{9n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0},$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$k=k\cdots\frac{1}{F_{2k}}=\frac{(2k+1)n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0}.$$

$p=2k+1=$ ungerade Zahl.

Setzt man $p=$ ungerade Zahl in der allgemeinen Formel, so kommt durch den Krümmungsradius r_2 der hinteren Linsenfläche, welche die ungeraden Reflexionen bedingt, eine Unsymmetrie herein. Es spielt also r_2, der hintere Kugelradius, eine Hauptrolle, was in der Bezeichnung durch die Striche oberhalb $F^{p''}$ zum Ausdruck gelangt. Dreht man die Linse um, so vertauscht sich r_2 mit r_1 und jetzt ist r_1 die Grösse, welche die Rolle des r_2 vom vorigen Fall übernommen hat. Die Formel ergiebt für ungerade p:

$$\frac{1}{F_p''}=\frac{1}{F_{2k+1}}=2\cdot\left[\frac{(k+1)n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right],$$

$$\frac{1}{F_p'}=\frac{1}{F'_{2k+1}}=2\cdot\left[\frac{(k+1)n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_1}\right].$$

Die beiden Ausdrücke stellen wiederum die allgemeinen Glieder von arithmetischen Reihen dar, deren Anfangsglieder bezw.... $2\left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right)$ und ... $2\left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_1}\right)$ sind und deren Differenz die gleiche für gerade und ungerade p ist und den Wert $\cdots\frac{2n}{(n-1)F_0}\cdots$ hat.

Da aber nach früherem und der allgemeinen Formel für $p=1$ oder $0=k$ im Ausdrucke ... $2k+1$, die Glieder $\cdots 2\left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right)$ und $2\left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_1}\right)\cdots$ die reziproken Brennweiten F_1'' resp.... F_1' bedeuten, und ferner für gerade und ungerade p die Differenz in der arithmetischen Reihe dieselbe ist, so stellen sich die Ausdrücke für die reziproken Brennweiten auch folgendermassen dar:

$$p = 2k \cdots \qquad \frac{1}{F_p} = \frac{1}{F_0} + k \cdot \frac{2n}{(n-1)F_0},$$

$$p = 2k+1 \cdots \frac{1}{F_p'} = \frac{1}{F_1'} + k \cdot \frac{2n}{(n-1)F_0},$$

$$\frac{1}{F_p''} = \frac{1}{F_1''} + k \cdot \frac{2n}{(n-1)F_0}.$$

Es ändert sich in der Bildungsweise also bloss $\frac{1}{F_0}$ in $\frac{1}{F_1'}$ bezw. $\frac{1}{F_1''}$ und die ersten Glieder sind also die gleichnamigen entsprechenden ersten reziproken Brennweiten, wenn man von $\frac{1}{F_0}$ und $\frac{1}{F_1}$ ausgeht.

Lässt man k alle Werte durchlaufen, so erhält man hier alle reziproken Werte für eine ungerade Anzahl von Reflexionen, diese Werte sind einzeln folgende:

$$p = 2k + 1; \quad k = 0 \cdots \frac{1}{F_1'} = 2\left[\frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_1}\right];$$

Die $\frac{1}{F_p''}$ lauten ebenso, wenn man nur statt r_1 die Grösse r_2 einsetzt.

$$k = 1 \cdots \frac{1}{F_3'} = 2\left[\frac{2n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_1}\right]$$

$$= \frac{1}{F_1'} + \frac{2n}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0};$$

$$k = 2 \cdots \frac{1}{F_5'} = \left[\frac{3n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_1}\right]$$

$$= \frac{1}{F_1'} + 2 \cdot \frac{2n}{(n-1)F_0}$$

$$= 2\left[\frac{1}{F_2} + \frac{1}{r_1}\right]$$

da:

$$\frac{1}{F_2} = \frac{3n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0}$$

(nach Früherem).

$$p = 2k + 1, \quad k = 3 \cdots \frac{1}{F_7'} = 2\left[\frac{4n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_1}\right]$$

$$= \frac{1}{F_1'} + 3\frac{2n}{(n-1)F_0}$$

$$k = 4 \cdots \frac{1}{F_9'} = 2\left[\frac{5n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0} + \frac{1}{r_1}\right]$$

$$= \frac{1}{F_1'} + 4 \cdot \frac{2n}{(n-1)F_0}$$

$$= 2\left[\frac{1}{F_4} + \frac{1}{r_1}\right]$$

da

$$\frac{1}{F_4} = \frac{5n-1}{n-1} \cdot \frac{1}{F_0}.$$

u. s. w.

Es erhellen hieraus wieder merkwürdige Beziehungen, indem die

reziproken Brennweiten für eine ungerade Anzahl von Reflexionen, für die Werte $k = 0, 2, 4, 6$ ähnlich gebaut sind und einfach statt

$$\frac{1}{F_0}\cdots\frac{1}{F_2}\cdots\frac{1}{F_4}\ \text{u. s. w.}$$

eintritt, also die reziproken Brennweiten für eine gerade Anzahl von Reflexionen; es lässt sich dies allgemein mühelos zeigen.

Ebenso kann man die reziproken Brennweiten für eine ungerade Anzahl von Reflexionen, wie bereits für $\cdots\frac{1}{F_3''}$ gezeigt wurde, durch sämtliche vorhergehenden reziproken Brennweiten für eine gerade Anzahl von Reflexionen darstellen; denn ...

$$\frac{1}{F_p''} = \frac{1}{F_{2k+1}''} = 2\left[\frac{(k+1)n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right].$$

Nun ist ferner:

$$S\quad \frac{1}{F_0}+\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_4}+\cdots+\frac{1}{F_{2k}} = \left(\frac{1}{F_0}+\frac{1}{F_{2k}}\right)\cdot\frac{k+1}{2}\ \text{(arithm. R.)}$$

$$= (k+1)\cdot\frac{(k+1)n-1}{n-1}\cdot\frac{1}{F_0},$$

somit:

$$\frac{(k+1)n-1}{(n-1)F_0} = \frac{S}{k+1}$$

und

$$\frac{1}{F_p''} = \frac{1}{F_{2k+1}''} = 2\left[\frac{\sum_0^k \frac{1}{F_{2k}}}{k+1}+\frac{1}{r_2}\right].$$

Spezialisierung der Konstanten, Anwendung auf die verschiedenen Arten von Linsen.

Die allgemeine Linsenformel lautet nunmehr für jedes p = Anzahl der Reflexionen in der Linse:

Linsen-Formel:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F_p}=\frac{1}{F_0}\cdot\frac{(p+1)n-\frac{3-(-1)^p}{2}}{n-1}+[1-(-1)^p]\cdot\frac{1}{r_2}.$$

Bei der weiteren Betrachtung empfiehlt es sich nun, auf die bisherige Ableitung keine Rücksicht zu nehmen und von der gewonnenen Formel auszugehen. Die gewöhnlichste Form der Linse ist die bikonvexe; deshalb wird der Bauart der bikonvexen Linse der positive Charakter beigelegt, indem ihre Krümmungsradien beide als positiv angenommen werden. Die Brennweiten für eine gerade Anzahl von Reflexionen werden mit der Richtung des ankommenden Strahles als

positiv gezählt; die Brennweiten für eine ungerade Anzahl von Reflexionen in entgegengesetzter Richtung ebenso positiv, entsprechend der reellen Lage derselben bei der als positiv bezeichneten Konvex-Linse. Die diesen Richtungen jedesmal entgegengesetzte für die bezeichnete Anzahl von Reflexionen ist dann selbstverständlich negativ. Das Gleiche gilt über die Vorzeichen der Krümmungsradien. Demgemäss ergiebt sich, wenn $n > 1$, also die Linse aus einem optisch dichteren Medium besteht als die Umgebung, und $\frac{1}{F_0} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right]$ nach früherem:

Konvex-Linsen:

I. Biconvex-Linsen:

Da r_1 und r_2 positiv sind, so ist F_0 stets positiv und daher auch F_p stets positiv und dem Werte nach:

$$p = 2k \quad \cdots \frac{1}{F_{2k}} = \frac{1}{F_0} \frac{(2k+1)n-1}{n-1};$$

$$p = 2k+1 \cdots \frac{1}{F'_{2k+1}} = \frac{2}{F_0} \cdot \frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{2}{r_1};$$

$$\frac{1}{F''_{2k+1}} = \frac{2}{F_0} \cdot \frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{2}{r_2}.$$

II. Plankonvex-Linsen:

Da r_1 und r_2 auch hier positiv sind, so ist $\cdots \frac{1}{F_p} \cdots$ stets positiv und alles drückt sich hier nur durch einen Radius aus, da der andere $= \infty$, $F_0 = \frac{r}{n-1}$.

1. Lage (hintere Fläche $[r_2]$ eben $\ldots r_2 = \infty$):

$$p = 2k \cdots \quad \frac{1}{F_{2k}} = \frac{1}{F_0} \frac{(2k+1)n-1}{n-1} = \frac{(2k+1)n-1}{r},$$

$$p = 2k+1 \cdots \frac{1}{F''_{2k+1}} = \frac{2}{F_0} \frac{(k+1)n-1}{n-1} = \frac{2}{r}([k+1]n-1);$$

2. Lage (vordere, erste Fläche eben $r_1 = \infty$):

$$p = 2k \cdots \quad \frac{1}{F_{2k}} = \text{ebenso wie oben},$$

$$p = 2k+1 \cdots \frac{1}{F''_{2k+1}} = \frac{2}{F_0} \frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{2}{r}$$

$$= \frac{2}{r}[(k+1)n] = \frac{2}{F_0} \frac{(k+1)n}{n-1}:$$

III. Konkavkonvex-Linsen ($r_2 > r_1$ und r_2 negativ):

1. Da $\frac{1}{F_0} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \cdots$ nach obiger Voraussetzung $r_2 > r_1$ stets positiv, muss zunächst für $p = 2k =$ gerade Zahl die reziproke Brennweite $\cdots \frac{1}{F_{2k}} \cdots$ stets positiv sein und den Wert haben:

$$\frac{1}{F_{2k}} = \frac{1}{F_0}\frac{(2k+1)n-1}{n-1}, \quad (p = 2k).$$

2. Für $p = 2k + 1 =$ ungerade Zahl, ersieht man sofort, dass bei Umkehrung der Linse, wenn also die konkave Seite nach vorne zu liegen kommt und die konvexe nach rückwärts, wodurch das den Zeichenwert allenfalls ändernde zweite Glied in der Formel positiv bleibt, die reziproke Brennweite ...

$$\frac{1}{F'_{2k+1}} = \frac{2}{F_0}\frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{2}{r_1} \cdots$$

wieder stets positiv wird.

3. Ist dagegen die hintere Fläche die konkave, so zeigt sich für $p = 2k + 1$ folgendes. Es ist der Ausdruck zu untersuchen:

$$\frac{1}{F''_{2k+1}} = 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)[(k+1)n - 1] - \frac{2}{r_2}$$

$$= \frac{2}{r_2}\left[\frac{r_2}{r_1}[(k+1)n - 1] - (k+1)n\right].$$

Damit nun der Ausdruck wieder positiv wird, muss:

$$\frac{r_2}{r_1} > \frac{(k+1)n}{(k+1)n-1} \geq 1 + \frac{1}{(k+1)n-1}.$$

Daraus ist ersichtlich, dass jetzt die Brennweite nicht immer positiv sein muss. Ist die Verhältniszahl der beiden Krümmungsradien kleiner wie die berechnete Zahl, so ist die Brennweite negativ und der Brennpunkt virtuell, d. h. die reflektierten Strahlen geben keinen reellen Bildpunkt. Für ein grosses n (stark brechende Substanz) darf sich der Wert von r_2 dem Werte von r_1 nähern. Damit alle Brennweiten positiv werden, muss mindestens:

$$\frac{r_2}{r_1} = 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1} \quad (\text{für } k = 0),$$

also z. B. für Glas vom Brechungsindex $n = 1{,}5$

$$n = 1{,}5 \cdots \frac{r_2}{r_1} = 3,$$

$$n = 1{,}7 \cdots \frac{r_2}{r_1} = 2{,}4,$$

denn für wachsende k ist ja dann die Bedingung stets erfüllt.

Zu bemerken ist noch, dass sich für einen kleineren Grenzwert als $\cdots \frac{n}{n-1} \cdots$ stets ein Wert von k berechnen lässt, unter welchem alle Brennweiten für ungerade Reflexionen negativ, die dagegen über diesem Wert von k liegenden positiv sind.

Dieser Wert von k berechnet sich wie folgt:

Es sei: $\frac{r_2}{r_1} = \frac{n-\alpha}{n-1}$ wobei α = echter Bruch, so:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{n-\alpha}{n-1} \geq \frac{(k+1)n}{(k+1)n-1};$$

daraus berechnet sich der Wert von k...

$$k \geq \frac{\alpha(n-1)}{n(1-\alpha)}.$$

Beispiele:

Wenn:

$$n = 1{,}5, \quad \alpha = 0{,}1 \quad \text{so:} \quad k \geq \frac{1}{27}$$

d. h. in diesem Falle ist die erste Brennweite $k = 0$ ... negativ, alle anderen wieder positiv.

Wenn: $n = 1{,}5 \ldots \alpha = 0{,}9 \ldots$ so: $k \geq 3$

d. h. jetzt sind die Brennweiten für eine ungerade Anzahl von Reflexionen $p = 2k+1$ ... für die Werte von $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ bereits negativ, von $k = 3$ ab aber positiv. Dabei gälte bezüglich der Radien ... $5r_2 = 6r_1$.

Wenn: $\alpha = 1 - \varepsilon$, $\lim \varepsilon = 0$, so: $k = \frac{1(n-1)}{n \cdot \varepsilon} = \infty$

d. h. in diesem Falle sind sämtliche Brennweiten negativ für $p = 2k+1$; hier ist ... $r_2 = r_1$, was den Grenzfall einer konkav-konvexen Linse bedeutet.

Definition der Konvex-Linse.

Es zeigt sich also, dass mit Ausnahme des in Nr. III 3 behandelten Falles, wenn $\frac{r_2}{r_1} < \frac{n}{n-1}$, in welchem Falle dann einige Brennweiten negativ und virtuell werden müssen, alle übrigen Brennweiten bei den Konvexlinsen für p = beliebige Anzahl von Reflexionen stets positiver, reeller Natur sind. Somit kann umgekehrt eine Konvex-Linse definiert werden als eine Linse, deren sämtliche Brennweiten für eine gerade und ungerade Anzahl von Reflexionen innerhalb der Linse immer positiv und reell sind, also:

Konvex-Linse ... sämtliche Brennpunkte reell.

(Eine Bemerkung erübrigt noch bezüglich der Reflexionen an der ersten Fläche der Linse ausserhalb der Linse: Die daraus sich er-

gebenden Brennweiten sind alle negativ, nur bei der konkav-konvexen Linse, wenn die vordere Linsenfläche die konkave ist, ergiebt sich eine positive Brennweite.)

Konkav-Linsen.

I. Bikonkav-Linsen: r_1 und r_2 beliebig, beide negativ, so wird F^0 auch negativ und daher F_p für alle Werte von p ... negativ,

$$p = 2k \quad \cdots \quad \frac{1}{F_p} = \frac{1}{F_{2k}} = -\frac{1}{F_0}\frac{(2k+1)n-1}{n-1};$$

$$p = 2k+1 \cdots \frac{1}{F'_{2k+1}} = -2\left[\frac{1}{F_0}\frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{1}{r_1}\right];$$

$$\frac{1}{F''_{2k+1}} = -2\left[\frac{1}{F_0}\frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{1}{r_2}\right];$$

($r_1 r_2$ und F_0 absolut genommen).

II. Plankonkav-Linsen: Die Brennweite ist für alle p, ob gerade oder ungerade, stets negativ und besitzt, absolut genommen, genau dieselben Werte, die bereits bei den Plankonvex-Linsen abgeleitet wurden.

III. Konvexkonkav-Linsen: $r_2 < r_1$ und r_2 negativ. Die Betrachtung ist ähnlich der bei den Konkavkonvex-Linsen.

1. Da $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{F_0} \cdots$ stets negativ ist, so muss für ... $p = 2k$ = gerade Zahl ... der Wert von F_{2k} der Formel entsprechend ebenfalls stets negativ sein und den Wert besitzen:

$$\frac{1}{F_{2k}} = -\frac{1}{F_0}\frac{(2k+1)n-1}{n-1};$$

(F_0 absolut genommen).

2. Für $p = 2k+1$ = ungerade Zahl zeigt die Formel sofort, dass, wenn die konkave Fläche nach hinten liegt, das zweite Glied der allgemeinen Formel negativ wird und dadurch der ganze Ausdruck für $\frac{1}{F''_{2k+1}} \cdots$ wieder negativ bleibt.

$$\frac{1}{F''_{2k+1}} = -\left[\frac{2}{F_0}\cdot\frac{(k+1)n-1}{n-1} + \frac{2}{r_2}\right],$$

(F_0 und r_2 absolut genommen).

3. Dreht man die Linse um, so bleibt zunächst für gerade $p = 2k$ der Ausdruck völlig unverändert, für $p = 2k+1$ = ungerade Zahl hingegen ist der Ausdruck zu untersuchen:

$$\frac{1}{F'_{2k+1}} = 2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\Big[(k+1)n - 1\Big] + \frac{2}{r_1}$$
$$= \frac{2}{r_1}\Big[(k+1)n - \frac{r_1}{r_2}[(k+1)n - 1]\Big].$$

Dieser Ausdruck wird nur dann negativ, wenn:

$$[k+1)n \leq \frac{r_1}{r_2}[(k+1)n - 1];$$

d. h.

$$\frac{r_1}{r_2} \geq \frac{(k+1)n}{(k+1)n-1}.$$

Aus diesem Resultat erhellt, dass r_1 nunmehr dieselbe Rolle spielt wie bei den Konkavkonvex-Linsen die Grösse r_2.

Damit alle Brennweiten daher negativ sind, muss für $k = 0 \ldots$ das Verhältnis von $\cdots \frac{r_1}{r_2}$ mindestens $= \frac{n}{n-1}$ sein.

Ist $\frac{r_1}{r_2} < \frac{n}{n-1}$, also kleiner als der berechnete Grenzwert, so lässt sich sofort wieder ein Wert von k angeben, über welchem alle Brennweiten negativ sind, während die darunterliegenden sogar positiv werden. Dieser Wert von k berechnet sich:

$$\text{Wenn } \cdots \frac{r_1}{r_2} = \frac{n-\alpha}{n-1}, \text{ wo } \alpha = \text{echter Bruch},$$

$$\text{so } \quad \cdots \frac{r_1}{r_2} = \frac{n-\alpha}{n-1} \geq \frac{(k+1)n}{(k+1)n-1}.$$

Daraus ergiebt sich $k \ldots$

$$k \geq \frac{\alpha(n-1)}{n(1-\alpha)}.$$

Für alle ganzen Zahlen, die nun unter diesem berechneten Wert von k liegen, wird dann die Brennweite reell und positiv, für die übrigen aber negativ und virtuell.

Beispiel: $n = 1{,}5 \cdots k = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}5}{1{,}5 \cdot 0{,}1} = 3;$
$\alpha = 0{,}9.$

d. h für $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ sind jetzt die Brennweiten nach vorne und daher positiv, für $k = 3$ ist die Brennweite

$$\cdots \pm \infty \cdots$$

und für die übrigen negativ. Für $\alpha = 0$ sind alle Brennweiten negativ.

Definition der Konkav-Linse.

Sämtliche Konkav-Linsen haben demzufolge die Eigenschaft, dass alle ihre Brennpunkte sowohl für eine gerade als auch ungerade Anzahl von Reflexionen innerhalb der Linse negativ und virtuell sind. Eine Ausnahme besteht nur für die Konvexkonkav-Linse insofern, als wenn das Verhältnis der Krümmungsradien kleiner als $\frac{n}{n-1}$ genommen wird und die konkave Fläche nach vorne gekehrt ist, die Brennweiten für eine ungerade Anzahl von Reflexionen zum Teil positiv werden. Demgemäss kann man bei Ausschliessung des erwähnten Ausnahmefalles die Konkav-Linse als eine Linse definieren, deren sämtliche Brennpunkte für jedes p negativ und virtuell sind. Daher:

Konkav-Linse . . . sämtliche Brennpunkte virtuell.

(Die Reflexion der Strahlen ausserhalb der Linse ist genau entgegengesetzt der bei den Konvex-Linsen.)

In kurzer Übersicht ergiebt sich den bisherigen Betrachtungen gemäss folgende Tabelle, für welche nunmehr folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Es stelle . . . Φ . . . die Brennweite dar für direkte Reflexion an der ersten vom Lichtstrahl getroffenen Linsenfläche; dieselbe heisse:

„Φ = Brennweite der I. Gruppe."

Die Bezeichnung F_p stellt die Brennweiten dar für zweimalige Brechung durch die Linse und beliebig viele dem Werte von p von 0 bis ∞ entsprechende Reflexionen an den Grenzflächen in der Linse. Da aber, wie aus der allgemeinen Formel erhellt, ein grosser Unterschied besteht zwischen den F_p für gerade und ungerade p, so drücke sich dieser Unterschied auch in der zu wählenden Bezeichnung aus, indem die für $p = 2k$ geltenden Werte mit:

„$F_p = F_{2k}$ = Brennweiten II. Gruppe,"

während die sich für $p = 2k + 1$ ergebenden Brennweiten mit:

„$F_p = F_{2k+1}$ = Brennweiten III. Gruppe",

benannt werden. Durchläuft k alle Zahlen von 0 bis ∞, so drücke sich die entsprechende Brennweite durch den Beisatz: . . . „k. Ordnung" . . . aus. Die Brennweiten I. und III. Gruppe sind vor der Linse positiv genommen, diejenigen II. Gruppe hinter der Linse positiv zu zählen.

Tabelle.

$$\text{Allgemeine Formel: } \frac{1}{F''_p} = \frac{1}{F_0} \cdot \frac{(p+1)n - \frac{3-(-1)^p}{2}}{n-1} + [1-(-1)^p]\frac{1}{r_2};$$

Name		r_1	r_2	abs. Grösse	Φ	F_{2k}	F_{2k+1}	Bemerkung
Konvex-Linsen (Positive Linsen)	Bikonvex	+	+	beliebig	−	+	+	keine
	Plankonvex	+	+	$\begin{cases} r_1 = \text{bel.} \\ r_2 = \infty \end{cases}$	−	+	+	„
	„	+	+	$\begin{cases} r_2 = \text{bel.} \\ r_1 = \infty \end{cases}$	$\pm\infty$	+	+	„
	Konkavkonvex	−	+	$r_1 > r_2$	+	+	+	„
	„	+	−	$\begin{cases} r_2 > r_1 \\ \frac{r_2}{r_1} \geq \frac{n-\alpha}{n-1} \end{cases}$	−	+	+	„
	„	+	−	$\begin{cases} r_2 > r_1 \\ \frac{r_2}{r_1} = \frac{n-\alpha}{n-1} \end{cases}$	−	+	$\begin{cases} - \\ + \end{cases}$	bis $k \leq \frac{\alpha(n-1)}{n(1-\alpha)}$ von $k \geq \frac{\alpha(n-1)}{n(1-\alpha)}$
Konkav-Linsen (Negative Linsen)	Bikonkav	−	−	beliebig	+	−	−	keine
	Plankonkav	−	−	$\begin{cases} r_1 = \text{bel.} \\ r_2 = \infty \end{cases}$	+	−	−	„
	„	−	−	$\begin{cases} r_2 = \text{bel.} \\ r_1 = \infty \end{cases}$	$\pm\infty$	−	−	„
	Konvexkonkav	+	−	$r_2 < r_1$	−	−	−	„
	„	−	+	$\begin{cases} r_1 < r_2 \\ \frac{r_2}{r_1} > \frac{n}{n-1} \end{cases}$	+	−	−	„
	„	−	+	$\begin{cases} r_1 < r_2 \\ \frac{r_2}{r_1} = \frac{n-\alpha}{n-1} \end{cases}$	+	−	$\begin{cases} + \\ - \end{cases}$	bis $k \leq \frac{\alpha(n-1)}{n(1-\alpha)}$ von $k \geq \frac{\alpha(n-1)}{n(1-\alpha)}$

Die weitere Spezialisierung und Behandlung der Brennpunkte für den Fall $n < 1$ bietet keine besonderen Schwierigkeiten, indes ist sie von geringer Bedeutung, da man ja gewöhnlich nur mit Linsen von optisch dichteren Medien, als die Umgebung der Linse ist, es zu thun hat. Für einen bestimmt gegebenen Fall ist die Diskussion leicht auszuführen.

Die weiteren Gesetze bezüglich der Grösse des Bildes, Konstruktion des Bildes, ebenso die Diskussion der Bildgleichung

$$\ldots \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_p}, \ldots$$

ergeben sich unmittelbar und genau ebenso wie für $\ldots F_0 \ldots$ bereits

bekannt, und werden nur durch die Grösse von F_p, das einmal Brennweite I. oder II. oder III. Gruppe ist, modifiziert. So ist z. B.

$$\text{Bildgrösse} = \frac{F_p}{a - F_p} \cdot \text{Gegenstandsgrösse.}$$

Ein Fall erübrigt noch zur Besprechung, wie sich nämlich die Rechnung stellt, wenn hinter der Linse ein anderes Medium sich befindet als vor der Linse. Es sei n_1 = Brechungsindex dieses neuen Mediums gegen das Mittel, aus welchem die Linse besteht, so ersieht man, dass zunächst alle Brennweiten erster und dritter Gruppe als unabhängig von n_1 dieselben bleiben, da die diese Brennpunkte erzeugenden Strahlen mit dem Brechungsindex n_1 keine Beziehung haben. Anders verhält es sich mit den Brennweiten der zweiten Gruppe, die durch n_1 sehr beeinflusst werden. Die Rechnung ergiebt, wenn die neue Brennweite mit $\mathfrak{F}$ bezeichnet wird:

$$\frac{n_1}{a} + \frac{n}{b} = \frac{n_1(n-1)}{r_1} + \frac{n(n_1-1)}{r_2} \equiv \frac{1}{\mathfrak{F}_0} \quad \text{oder:} \quad \frac{1}{\mathfrak{F}_0} = \frac{n r_1 (n_1 - 1) + n_1 r_2 (n-1)}{r_1 r_2}.$$

Ähnlich rechnet sich $\mathfrak{F}_{2k} \ldots$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_2} = \frac{1}{\mathfrak{F}_0} + 2n_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}_4} = \frac{1}{\mathfrak{F}_0} + 2 \cdot 2n_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \text{u. s. w.}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

II. Brennweiten bei Berücksichtigung der Linsendicke. Höhen des austretenden Strahles.

Es falle auf eine Konvex-Linse, deren Krümmungsradien r_1 und r_2 seien, ein Lichtstrahl. Die Dicke der Linse betrage d = Abstand der beiden Scheitelpunkte der Kugelflächen. Der Lichtstrahl gehe unter einem Winkel φ von einem Punkte A der optischen Axe aus und treffe die Vorderfläche der Linse in der Höhe h. Winkel φ soll bezüglich seiner Grösse die Bedingungen erfüllen, welche bei Ableitung der einfachen Linsenformeln zu Grunde gelegt werden, also sehr klein sein. Gegenstandsweite sei ... a. Es ergeben sich folgende Beziehungen (Fig. 2):

1. Brechung in B.

$$\frac{1}{a} + \frac{n}{b_0} = \frac{n-1}{r_1};$$

$$b_0 = \frac{n r_1 a}{(n-1)a - r_1}.$$

Dieser gebrochene Strahl BC trifft in C auf die hintere Linsenfläche. Die Höhe, in welcher dies geschieht, sei H_0. Diese Höhe berechnet sich leicht aus dem Verhältnisse (Fig. 3):

$$h : H_0 = b_0 : (b_0 - d);$$

[wobei statt d allerdings in erster Annäherung

$$d-\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{r_1}+\frac{H_0^2}{r_2}\right)\cdots$$

zu setzen wäre, wofür sich aber, da ... h und H_0 als klein und r_1 und r_2 als verhältnismässig gross vorausgesetzt sind, einfach ... d schreiben lässt.]

Demnach ist:

$$H_0=h\left(1-\frac{d}{b_0}\right);$$

also:

$$b_0=\frac{anr_1}{a(n-1)-r_1};$$

$$H_0=h\left(1-\frac{d}{b_0}\right)=h\frac{(b_0-d)}{b_0}.$$

2. **Brechung** in C. Der Lichtstrahl BC wird in C von der hinteren Linsenfläche gebrochen. Die Formel ergiebt:

$$\frac{n}{-(b_0-d)}+\frac{1}{B_0}=\frac{n-1}{r_2};$$

$$B_0=\frac{r_2(b_0-d)}{(n-1)(b_0-d)+nr_2};$$

$$H_0=h\cdot\frac{(b_0-d)}{b_0}.$$

Die Höhe des austretenden Strahles ist H_0, der Winkel mit der optischen Axe A_0

$$\operatorname{tg} A_0=\frac{H_0}{B_0}.$$

3. **Reflexion** in C. Der gebrochene Lichtstrahl BC wird in C reflektiert und nach dem Gesetze (Fig. 4):

$$\frac{1}{-(b_0-d)}+\frac{1}{b_1}=\frac{2}{r_2}.$$

Daraus

$$b_1=\frac{r_2(b_0-d)}{2(b_0-d)+r_2};$$

$$H_1=H_0\left(1-\frac{d}{b_1}\right)=h\cdot\frac{(b_0-d)}{b_0}\cdot\frac{b_1-d}{b_1},$$

$$=h\cdot\frac{[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]}{b_0\cdot r_2}.$$

4. **Brechung** in D. Der reflektierte Lichtstrahl in D nach vorne gebrochen nach dem Gesetze:

$$\frac{n}{-(b_1-d)}+\frac{1}{B_1}=\frac{n-1}{r_1},$$

$$B_1=\frac{r_1[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]}{(n-1)[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]+nr_1[2(b_0-d)+r_2]},$$

$$H_1=h\cdot\frac{[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]}{b_0\cdot r_2}.$$

Die Höhe des austretenden Strahles giebt H_1 an, der Winkel des Strahles mit der optischen Axe ist A_1

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{H_1}{B_1}.$$

5. Reflexion in D. Der Lichtstrahl wird in der Linse wieder reflektiert nach Punkt E (Fig. 5):

$$\frac{1}{-(b_1-d)} + \frac{1}{b_2} = \frac{2}{r_1}, \quad b_2 = \frac{r_1(b_1-d)}{2(b_1-d)+r_1},$$

$$b_2 = \frac{r_1[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]}{2[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]+r_1[2(b_0-d)+r_2]},$$

$$H_2 = h\left(1-\frac{d}{b_0}\right)\left(1-\frac{d}{b_1}\right)\left(1-\frac{d}{b_2}\right)$$

$$= h \cdot \frac{[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2](r_1-2d)-dr_1[2(b_0-d)+r_2]}{b_0 \cdot r_1 r_2}.$$

6. Brechung in E. Der Lichtstrahl DE wird in E gebrochen nach dem Gesetze:

$$\frac{n}{-(b_2-d)} + \frac{1}{B_1} = \frac{n-1}{r_2}, \quad B_2 = \frac{r_2(b_2-d)}{nr_2+(n-1)(b_2-d)},$$

$$B_2 = \frac{r_2\{[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2](r_1-2d)-dr_1[2(b_0-d)+r_2]\}}{(n-1)\{[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2](r_1-2d)-dr_1[2(b_0-d)+r_2]\}+nr_2\{2[(b_0-d)(r_2-2d)-dr_2]+r_1[2(b_0-d)+r_2]\}}$$

Die Höhe des in E austretenden Strahles ist ... H_2. Die Winkelgrösse, welche der Strahl mit der optischen Axe bildet, ist gegeben durch

$$\operatorname{tang} A_2 = \frac{H_2}{B_2}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$x = (b_0 - d);$$
$$y = [x(r_2 - 2d) - dr_2];$$
$$z = [y(r_1 - 2d) - dr_1(2x + r_2)];$$

so:

$$B_0 = \frac{r_2 x}{(n-1)x + nr_2}, \qquad H_2 = h \cdot \frac{x}{b_0},$$

$$B_1 = \frac{r_1 y}{(n-1)y + nr_1(2x+r_2)}, \qquad H_1 = h \cdot \frac{y}{b_0 r_2},$$

$$B_2 = \frac{r_2 z}{(n-1)z + nr_2[2y + r_1(2x+r_2)]}, \qquad H_2 = h \cdot \frac{z}{b_0 r_1 r_2},$$

$$H_0 : H_1 : H_2 = x : \frac{y}{r_2} : \frac{z}{r_1 r_2}.$$

Eine weitere allgemeine Betrachtung hat wenig Wert, da sich die Formeln zu sehr komplizieren und, wie später die Experimente zeigen, die weiteren Bildpunkte wegen zu grosser Lichtschwäche teils schon nicht mehr auffindbar, teils sogar nur mehr virtuell sind.

Setzt man nun in den hier gewonnenen Formeln ... $a = \infty$

und statt $B_0, B_1, B_2 \ldots F_0, F_1, F_2$, so sind dies die Bildpunkte für parallel der Axe einfallende Strahlen, d. i. die Brennpunkte. Man darf nur d wieder vernachlässigen, und man erhält nach einigen Umformungen wieder die früheren Formeln.

Um nun zu sehen, inwieweit man bei den folgenden experimentellen Versuchen und Bestimmungen die vorher gewonnenen einfachen Linsenformeln anwenden darf, nämlich mit um so grösserer Genauigkeit, je kleiner die Linsendicke ist und je grösser die Krümmungsradien sind, wollen wir jetzt an einem Beispiel, da die allgemeine Ableitung zu unübersichtlich wird, uns klar machen, wie gross das Korrektionsglied gegenüber den einfachen Linsenformeln ist, wenn man noch Grössen vom Grade d, also Linsendicke, berücksichtigt, indes Grössen von der Ordnung $\frac{d}{r_1}$ und $\frac{d}{r_2}$ vernachlässigt.

Als Beispiel, das diese Korrektionsglieder sehr gut erkennen lässt und zu gleicher Zeit auch der Allgemeinheit nicht entbehrt, diene die Plankonvex-Linse. Zunächst werde der Krümmungsradius der Vorderfläche $= \infty$ gesetzt und alsdann derjenige der hinteren Fläche und jedesmal die allgemeinen Formeln unter Zugrundelegung obiger Gesichtspunkte umgeformt.

Es ergiebt sich nach etlichen einfachen Umformungen folgende Tabelle, wobei der Ausdruck „Einfache Formel“ das Ergebnis aus den früher gewonnenen einfachen Linsenformeln bedeuten soll, während „Formel mit Berücksichtigung der Dicke“ das unter obigen Voraussetzungen erhaltene Resultat kennzeichnet:

	Einfache Formel	Formel mit Berücksichtigung der Dicke.
$r_1 = \infty$	$F_0 = \frac{r_2}{n-1}$	$F_0 = \frac{r_2}{n-1}(1-0)$
	$F_1 = \frac{r_2}{2n}$	$F_1 = \frac{r_2}{2n}\left(1-\frac{2d}{r_2}\right)$
	$F_2 = \frac{r_2}{3n-1}$	$F_2 = \frac{r_2}{3n-1}\left(1-\frac{4d}{r_2}\cdot\frac{2n}{(3n-1)}\right)$
$r_2 = \infty$	$F_0 = \frac{r_1}{n-1}$	$F_0 = \frac{r_1}{n-1}\left(1-\frac{d}{r_1}\,\frac{n-1}{n}\right)$
	$F_1 = \frac{r_1}{2(n-1)}$	$F_1 = \frac{r_1}{2(n-1)}\left(1-\frac{d}{r_2}\,\frac{n-1}{n}\right)$
	$F_2 = \frac{r_1}{3n-1}$	$F_2 = \frac{r_1}{3n-1}\left(1-\frac{4d}{r_1}\,\frac{2n}{3n-1}+\frac{d}{r_1}\,\frac{3-n}{n}\right)$

Aus dieser Tabelle ist sofort ersichtlich, dass Messungen nur dann richtig werden nach den einfachen Formeln, wenn die Krümmungs-

radien möglichst gross sind gegen die Dicke der Linse. Indes zeigen die Formeln, dass der Fehlbetrag, der ja gewöhnlich bei Messungen von F_0 ausser acht gelassen wird, durchaus nicht viel ausmacht und nur ganz kleine Bruchteile, je kleiner d (z. B. in Millimetern) und je grösser r (in Metern) ist. Ferner zeigen obige Resultate, dass die Messgrössen F_1 und F_2 um so genauer werden, wenn man die hintere Linsenfläche als Planfläche nimmt. Dies findet bei Bikonvex-Linsen sinngemässe Anwendung, indem man dort dann die Fläche mit grösserem Radius als hintere Fläche nimmt.

III. Experimentelle Bestätigung der Theorie.

Zur Bestätigung obiger Theorie über die grosse Mannigfaltigkeit der Brennweiten sind folgende Versuche zweckdienlich:

Nimmt man eine Konvex-Linse von ziemlich grossen Krümmungsradien — ein gewöhnliches Konvexbrillenglas eignet sich ganz gut dazu — und hält dasselbe gegen die Sonnenstrahlen, so entsteht ein kleines Bildchen der Sonne im Brennpunkte hinter der Linse, das mit einem Schirme aufgefangen wird. Nähert man nun diesen Schirm mehr und mehr der Linse, so entsteht ein grösser und grösser werdender Lichtkreis als Schnitt des von der Linse ausgehenden und das Sonnenbildchen erzeugenden Lichtkegels mit dem Schirme. Dieser Schnitt ist überall ziemlich gleichmässig hell. Bewegt man den Schirm langsam vorwärts, so entsteht nun plötzlich in einem gewissen Abstande, der theoretisch . . . $F_2 = \frac{n-1}{3n-1} F_0$ . . . gefunden wurde — z. B. bei $n = 1{,}5$ . . . $F_2 = \frac{1}{7} F_0$ — ein sehr kleines helles Sonnenbildchen, viel kleiner als das oben besprochene Bildchen und auch bedeutend lichtschwächer, auf hellem Grunde mitten im Schnitt des erwähnten Lichtkreises. Leicht ersieht man an diesem Bildchen wieder die Lagerung der roten Strahlen nach aussen und der violetten nach innen.

Rückt man nun den Schirm noch weiter der Linse zu, so sieht man abermals in ungefähr $\frac{1}{13} F_0$ das Zusammengehen von austretenden Strahlen, indes konnte ein Zustandekommen eines Bildes nicht mehr bemerkt werden, was wohl seinen Grund in der schon zu schwachen Lichtmenge hat, die diesen Bildpunkt nach viermaliger Reflexion in der Linse zu erzeugen hätte. Versuche mit den verschiedensten Linsen von allen Dimensionen lieferten das gleiche negative Resultat.

Hierauf wurde ein Schirm vor die Linse gestellt, aber so, dass die Sonnenstrahlen noch möglichst auf die Linse fielen, und die Linse zu diesem

Zwecke ein wenig gedreht. Es entstand zunächst ein Zerstreuungskreis auf dem Schirme, herrührend von den durch die Vorderfläche der Linse reflektierten Lichtstrahlen. Rückt man nun den Schirm näher und näher, so kommt plötzlich — aber sehr gut auffindbar — eine Lage des Schirmes, in welcher auf demselben ein helles deutliches Sonnenbildchen auf hellem Grunde entsteht. Rot liegt hier wieder aussen und violett innen. Nähert man den Schirm weiter der Linse, so wird aus dem beschriebenen Bildchen ein grösserer und grösserer Kreis als Durchschnitt mit dem das Bildchen erzeugenden, nach einmaliger Reflexion in der Linse austretenden Strahlenkegel. Bald aber sieht man deutlich wieder in der Mitte ein neues, noch kleineres Sonnenbildchen entstehen, das durch dreimalige Reflexion und zweimalige Brechung entsteht. Es sind also die Brennpunkte F_1'' und F_2'' leicht auffindbar. Weitere Brennpunkte konnten mit grösster Mühe experimentell nicht mehr bestimmt werden. Zugleich wird bemerkt, dass alle diese erwähnten Brennpunkte am leichtesten und schnellsten an der Sonne aufzufinden sind.

Obige Experimente wurden auch im verdunkelten Zimmer angestellt, wobei als Objekt ein stark leuchtender Pfeil verwandt wurde. Deutlich traten auf dem Schirme jedesmal vor wie auch hinter der Linse die Bildpunkte und Bilder $B_0 \ldots B_2$ bezw. B_1'' hervor, so dass sie mit leichter Mühe betrachtet und gemessen werden konnten. Das Bild war, wie aus der Ableitung ersichtlich ist, ein kleiner verkehrter Pfeil. Die Einstellung auf diese Bilder kann sehr genau erfolgen, da bei mangelhafter Einstellung, insbesondere bei $\ldots B_2 \ldots$ das Bildchen sofort verschwindet. Der Spielraum für scharfe Einstellung ist minimal. Durch Umkehren der Linse und Messung wurde ferner das in der Theorie gefundene Resultat bez. Gleichheit u. s. w. der Brennweiten bestätigt.

Die Linsen mit negativer Brennweite, die sich in der Ableitung durchaus als Gegensatz der Konvex-Linsen darstellen, zeigen auch beim Experimente diesen Gegensatz, indem keiner der Brennpunkte zweiter und dritter Gruppe reell und auffindbar ist, sondern alle virtuell sind. Nur die Brennpunkte erster Gruppe, von der Reflexion an der ersten Linsenfläche herrührend, sind hier reell. Indes bemerkt man sehr leicht die verschiedenen Zerstreuungskreise höherer Ordnung sowohl vor als hinter der Linse.

Stellt man mehrere Linsen, z. B. zwei Konvex-Linsen, hintereinander, so zeigt das Experiment sehr schön eine ganze Reihe von Brennpunkten zweiter und dritter Gruppe, die nahe aneinander liegen und herrühren von stets ein- oder zweimaliger Reflexion an den ver-

schiedenen Flächen des zusammengestellten Linsensystems. Hierbei können auch Konkav-Linsen zum Teil verwendet werden.

Eine weitere interessante Eigenschaft bei den Brennpunkten höherer Ordnung zeigt sich auserdem insofern, als bei Anwendung von dünnen aber grossen Linsen diese Brennpunkte, wenn man den Schirm verschiebt, in mehrere Ringe sich auflösen, die alle konzentrisch liegen und schön farbig sind. Insbesondere gilt das für die Brennpunkte vor der Linse und rührt, wie durch teilweises Verdecken der Linse konstatiert wurde, von teilweiser Totalreflexion her.

Die Experimente mit dicken Linsen ergaben ebenso das aus der Theorie für dicke Linsen ersichtliche Resultat, indem die Brennpunkte zweiter und dritter Gruppe allenfalls in ihren höheren Ordnungen nicht mehr auftreten und virtuell sind. Die Strahlen treten dann divergent aus der Linse und die dadurch entstehenden Zerstreuungskreise sind leicht durch ein dicht an die Linse gelegtes Papier nachweisbar.

IV. Anwendungen, Bestimmung der Konstanten der Linse.

Der Nutzen obiger Theorie und obiger Experimente zeigt sich nun in folgenden Anwendungen:

1. Centrierung von Linsen und Blenden.

Einfach und sicher lassen sich die aufgefundenen Thatsachen zur Centrierung von Linsen verwenden, was grosse Bedeutung für die optischen Apparate hat.

Sollen eine oder mehrere Linsen in einem Rohre centriert werden, d. h. die optischen Mittelpunkte der Linsen und die Brennpunkte alle in eine einzige Gerade verlegt werden, in die Axe des Rohres, so ist dies mit den Brennpunkten der dritten Gruppe leicht zu erreichen. Man nimmt am besten einen Schirm, in welchem sich ein kurzer schmaler Spalt befindet, der stark von rückwärts erleuchtet wird. Dieser Spalt wird zunächst verschiebbar so aufgestellt, dass er in die Axe des Rohres fällt. Nun setzt man die zu centrierende Linse in das Rohr und verschiebt den Schirm so lange, bis das Bild (III. Gruppe) deutlich auf dem den Spalt tragenden Schirme entsteht. Nun dreht man die Linse, bis sich der wirkliche Spalt mit seinem von der Linse entworfenen gleich grossen Bilde deckt, was leicht erreichbar ist. Dann hat man eine völlige Centrierung in Bezug auf den leuchtenden Gegenstand, der in der Axe des Rohres liegt.

Dasselbe erreicht man auch mit den Brennpunkten zweiter Gruppe. Man richtet den Rohrmantel parallel zu den Sonnenstrahlen, so dass der Schatten ein Kreis wird, steckt die Linse in das Rohr und betrachtet den Brennpunkt F_2, der im Falle völliger Centrierung ganz genau in der Mitte des den Brennpunkt F_0 erzeugenden vom Schirme aufgefangenen, einen Lichtkreis bildenden Strahlenkegels sich befinden muss. Überraschend einfach werden hierdurch Blenden centriert. Ein kleiner Fehler macht sich sofort bemerkbar, indem der Brennpunkt oder Bildpunkt höherer Ordnung dann sofort aus der Mitte des durch die Blende entworfenen Lichtkreises rückt.

2. Bestimmung der Konstanten der Linse.

Eine weitere wichtige Anwendung der erwähnten Gesetze ist die Bestimmung der Konstanten der Linse. Natürlich können die einfachen Gesetze nur dann Verwendung finden, wie rechnerisch an den Plankonvex-Linsen gezeigt wurde, wenn die Dicke der Linse gegenüber den Krümmungsradien vernachlässigt werden darf. Es haben also die hier folgenden Methoden hauptsächlich die Bestimmung der Konstanten von Linsen mit geringer Dicke und grossen Krümmungsradien, z. B. von Brillengläsern, zur Aufgabe.

1. Bestimmung, ob eine Linse gleiche Krümmungsradien hat.

Hier kommt es nicht darauf an zu messen, sondern bloss obige Frage zu beantworten. In diesem Falle spielt dann auch die Linsendicke keine Rolle und die Methode gilt auch für dicke Linsen.

In den einfachen sowohl als auch in den die Dicke der Linse berücksichtigenden Formeln ergeben sich bei Annahme ... $r_1 = r_2$ ... stets gleiche Formeln für Umkehrung der Linse. Deshalb verfährt man am besten folgendermassen:

Man bestimmt bei Konvex- und Konkav-Linsen:

1. Den Brennpunkt oder Bildpunkt Φ I. Gruppe,
2. " " " " F_0 } II. " ,
3. " " " " F_2 }
4. " " " " F_1 III. " .

Sind die Brennpunkte nicht reell, so tritt an Stelle derselben die Grösse des Zerstreuungskreises in einem beliebigen Abstande auf einem Schirme aufgefangen. Jedesmal dreht man die Linse sofort um und wenn dann jedesmal die Einstellung dieselbe ist, kann man sicher sein, dass die beiden Krümmungsradien die gleichen sind. Bezüglich der Bestimmung in 1. und 4. verwendet man am besten ein leuchtendes

Spaltbild vor der Linse, das solange verschoben wird, bis neben dem leuchtenden Spalte das gleich grosse Bild B_1 entsteht.

2. Brechungsindex der Linse.

Auf irgend eine der bekannten Arten wird zuerst die Brennweite F_0 bestimmt. Am besten wird man dies an der Sonne thun und ebenso die folgende Bestimmung. Man befestigt die Linse auf einem genau geteilten Maßstab und bestimmt die Lage von F_0 und F_2, also die Brennpunkte zweiter Gruppe 0. und 2. Ordnung.

Hierauf misst man genau die Strecke $F_0 F_2$ ab. Bezeichnet $a = F_0 F_2$, so ergiebt sich nach den gefundenen Gesetzen:

$$\text{Strecke } (F_0 F_2) = a = F_0 - \frac{n-1}{3n-1} F_0 = F_0 \cdot \frac{2n}{3n-1};$$

oder

$$n = \frac{a}{3a - 2F_0}.$$

Hierbei ist also eine Messung bis zur Linse hin, wenn man F_0 schon vorher bestimmt hat, gar nicht nötig, wodurch die Messung von a bedeutend erleichtert wird.

Misst man SF_2 direkt ab, so findet man:

$$\text{Strecke } SF_2 = F_2 \quad \text{und} \quad n = \frac{F_0 - F_2}{F_0 - 3F_2}.$$

Eine dritte Art der Bestimmung von n beruht auf der Vergleichung (Verhältnis) der von ein- und demselben leuchtenden Objekt hinter Linse entworfenen Bildern zweiter Gruppe 0. und 2. Ordnung.

Bezeichnet: B_0 = Bildgrösse, G = Gegenstandsgrösse,
B_2 = Bildgrösse 2. Ordnung,

so ist:

$$1.\ \frac{B_0}{G} = \frac{F_0}{a - F_0} \qquad 2.\ \frac{B_2}{G} = \frac{F_2}{a - F_2} \qquad \Bigg| \quad \frac{B_0}{B_2} = \frac{F_0 (a - F_2)}{(a - F_0) F_2}.$$

Setzt man $a = \infty$ z. B. für die Sonne und misst mit der Lupe die entstehenden kleinen Sonnenbildchen, so erhält man:

$$v = \frac{B_0}{B_2} = \frac{3n-1}{n-1}, \quad n = \frac{v-1}{v-3}.$$

3. Krümmungsradien der Linse.

Um ϱ_1 und ϱ_2 zu erhalten, sucht man den Brennpunkt F_1' und F_1'' vor der Linse, also am einfachsten durch direktes Abmessen der Entfernung des Sonnenbildchens von der Linse. Es ist nun:

$$2\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_2}\right]=\frac{1}{F_1''}\quad (r_2 \text{ hinterer Radius}),$$

$$2\left[\frac{1}{F_0}+\frac{1}{r_1}\right]=\frac{1}{F_1'}\quad (r_1 \quad " \quad " \quad).$$

Daraus ergiebt sich:

$$r_1=\frac{2F_0F_1'}{F_0-2F_1'},$$

$$r_2=\frac{2F_0F_1''}{F_0-2F_1''}.$$

Eine andere Methode, um r_1 und r_2 zu bestimmen, ergiebt sich folgendermassen: Benützt man einen von rückwärts stark beleuchteten Spalt als Objekt und verschiebt denselben so lange, bis das Bild (III. Gruppe) nach einer Reflexion und zwei Brechungen des erzeugenden Lichtstrahlenbündels vor der Linse wieder auf dem den Spalt tragenden Schirme entsteht, so gilt folgendes:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F_1''},\quad a=b=x,$$

so $F_1''=\frac{x}{2}=$ halbe Entfernung des Spaltes von der Linse.

Daraus:

$$r_2=\frac{F_0\cdot x}{F_0-x};$$

$r_2=$ hinterer Radius. Desgleichen für r_1.

4. Bestimmung der Brennweite F_0 für eine Linse von grossen Krümmungsradien.

Oft kommt es vor, dass man eine Linse mit sehr grossen Krümmungsradien hat und die direkte Messung von $F_0=$ gewöhnliche Brennweite, als zu gross, unmöglich erscheint. In diesem Falle benutzt man am besten die Brennpunkte 2. und 3. Gruppe von der nullten Ordnung. Es ergiebt die Rechnung nach den abgeleiteten Gesetzen:

$$\frac{1}{F_0}=\frac{1}{F_1'}+\frac{1}{F_1''}-\frac{1}{F_2},\quad \left\{\begin{matrix}F_1'\\F_1''\\F_2\end{matrix}\right\} \text{ gemessen.}$$

Für Konkav-Linsen hat man die Grösse der Zerstreuungskreise zu bestimmen, die Krümmungsradien finden sich leicht aus den Brennpunkten der ersten Gruppe, die hier reell sind.

Über Rollkurven und Rollflächen.

Von Dr. M. Disteli,
a. o. Professor a. d. Technischen Hochschule zu Karlsruhe.

Hierzu Tafeln II, Fig. 1—5, III, 6—7, IV, 8—10.

II. Teil.[1])

C. Die Axoide für gekreuzte Axen.

Befinden sich die Axen zweier Wellen in windschiefer oder gekreuzter Lage und sollen zwei Flächen R_1 und R_2 gefunden werden, welche befähigt sind, als Grundkörper unrunder Räder zu dienen, durch welche die Bewegung der einen Welle mit veränderlichem Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten auf die andere Welle übertragen wird, so bilden diese Grundkörper ein Paar geradliniger Flächen, welche den Namen Rollflächen oder Axoide erhalten haben.

Im allgemeinen wird neben der rollenden noch eine gleitende Bewegung beider Axoide längs der momentanen Berührungslinie auftreten. Es ist daher von Interesse, diejenigen Fälle insbesondere ins Auge zu fassen, wo diese Gleitbewegung wegfällt, wo also die Analogie in der Bewegung entsprechender Rollflächen mit den beiden Fällen paralleler und sich schneidender Axen eine möglichst vollkommene ist. Dieser Umstand kann in der That eintreten, sobald beide, oder wenigstens das eine der beiden Axoide gleichzeitig eine Verschiebung längs seiner Axe ausführen kann.

Die eine der beiden Flächen, oder auch beide gleichzeitig, werden also im allgemeinen nach Art der Regelschraubenflächen keine geschlossenen Flächen mehr sein, und man ist genötigt, sie räumlich auf bandförmige Streifen derart zu beschränken, dass keine gegenseitige Durchdringung auftritt und die Bewegung ungehindert stattfinden kann. Durch die Einführung gleichzeitiger Translationsbewegungen wird aber das Problem kinematisch erheblich erweitert, während andererseits die auftretenden Flächenpaare auch geometrisch interessant werden durch die Möglichkeit, sie aufeinander abwickelbar machen zu können.

---

1) Der I. Teil der Arbeit, der die beiden Fälle paralleler und sich schneidender Axen behandelt, erschien unter dem obigen Titel im 1. Heft des 45. Jahrganges dieser Zeitschrift.

Diese Eigenschaft der Axoide ist zwar schon lange bekannt; trotzdem scheinen aber ausser den zunächstliegenden Fällen der Hyperboloide und Schraubenflächen für ein konstantes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten Axoide allgemeiner Art bis jetzt keine Behandlung gefunden zu haben, so dass ein Versuch nach dieser Richtung wohl gerechtfertigt erscheint.

Da eine Rotation verbunden mit einer Translation längs einer Axe die allgemeinste Bewegung ergiebt, deren die Axoide fähig sind, so soll im folgenden der allgemeine Fall vorangestellt werden; die beiden Bewegungsarten, bei denen das eine oder beide Axoide reine Rotationsbewegungen um ihre Axen ausführen, ergeben sich dann von selbst durch zweckmässige Spezialisierung der allgemeinen Ergebnisse.

§ 1. Axoide für konstantes Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten.

Seien Figur 1, Taf. II o_1 und o_2 die beiden windschiefen Axen. Fügt man ihnen ihre gemeinsame Normale $O_1 O_2$ von der Länge $2a$ hinzu, so kann man O_1 und O_2 je zum Ausgangspunkt, die Richtung $O_1 O_2$ zur positiven Halbaxe z_1 resp. z_2, sowie die nach oben gehenden Halbaxen o_1 und o_2 zu den positiven Axen x_1 und x_2 je eines rechtwinkeligen Coordinatensystems gemacht denken, wodurch dann auch die positiven Richtungen der Axen y_1 und y_2 mitbestimmt sind. Ferner bedeute 2β den Winkel der Axen o_1 und o_2, also den Winkel, um welchen die positive Axe x_1 in positivem Sinne gedreht werden muss, bis sie der positiven Axe x_2 parallel läuft. Diesen Winkel 2β wollen wir als spitzen Winkel voraussetzen.

Werden jetzt von O_1 resp. O_2 aus auf den Axen x_1 und x_2 je zwei Strecken ω_1 und h_1 resp. ω_2 und h_2 aufgetragen, so kann man ω_1 und ω_2 als Winkelgeschwindgkeiten, h_1 und h_2 als Windungsparameter zweier Schraubenbewegungen um die Axen o_1 resp. o_2 erklären. Sie mögen kurz durch (o_1, h_1, ω_1) und (o_2, h_2, ω_2) bezeichnet werden und die erste und zweite Schraube heissen.

Trägt man auf o_1 die Strecke ω_1 in entgegengesetztem Sinne auf, so entsteht die negative erste Schraube $(o_1, h_1, -\omega_1)$. Wird diese mit der zweiten Schraube zusammengesetzt, so ist aus der Dynamik starrer Systeme bekannt, dass die resultierende Bewegung durch eine dritte Schraube dargestellt werden kann[1]), von bestimmter Axe g, bekannter

1) Vergleiche: *R. S. Ball:* The Theory of Screws. Dublin 1876. — *W. Schell:* Theorie der Bewegung und der Kräfte. Karlsruhe, II. Aufl. 1879. — *J. Somoff:* Kinematik. Kapitel XIV. 1878. — *E. J. Routh:* Die Dynamik der Systeme starrer Körper. I. Band. 1898. — *G. Koenigs:* Leçons de Cinématique. Paris 1897.

Winkelgeschwindigkeit Ω und bekanntem Windungsparameter H. Man hat also symbolisch die Gleichung:

$$(o_1, h_1, -\omega_1) + (o_2, h_2, \omega_2) = (g, H, \Omega).$$

Von der Axe g ist bekannt, dass sie der resultierenden Winkelgeschwindigkeit Ω aus $-\omega_1$ und $+\omega_2$ parallel ist, und dass sie die Zentrale $O_1 O_2$ rechtwinkelig schneidet. Wird also die Axe g mittels der zweiten Schraube in die unendlich benachbarte Lage g' gebracht, so wird g' durch Anwendung der negativen ersten Schraube in die Lage g zurückgeführt, behaftet mit einer unendlich kleinen Verschiebung in sich selbst, weil das Resultat beider unendlich kleiner Schraubungen eine unendlich kleine Schraubung ist, welche g selbst zur Axe hat. Demnach führen die beiden gegebenen Schrauben die Linie g in die benachbarten Lagen g' und g'' über, die sich der ganzen Ausdehnung nach decken und wobei g' in g'' unendlich wenig verschoben ist; mit anderen Worten: Die beiden durch die unendlich kleinen Schraubungen von g um o_1 und o_2 entstandenen unendlich schmalen windschiefen Flächenelemente sind längs der ganzen Linie g identisch.

Um die Erzeugende g der Lage nach genauer zu bestimmen, beziehen wir die beiden gegebenen Schrauben auf den Punkt O_1 als Reduktionspunkt. Die Winkelgeschwindigkeit ω_2 kann parallel zu sich selbst an den Punkt O_1 verschoben werden, wenn gleichzeitig eine dieser Verschiebung um die Strecke $2a$ entsprechende Translationsgeschwindigkeit in O_1 von der Grösse $2a\,\omega_2$ angebracht wird, deren Richtung mit derjenigen der positiven Axe y_2 übereinstimmend ist. Die Translationsgeschwindigkeit $v_2 = h_2\,\omega_2$ kann parallel nach O_1 verschoben werden. Zu diesen Geschwindigkeiten tritt noch die Winkelgeschwindigkeit $-\omega_1$ längs der Axe x_1 und die Translationsgeschwindigkeit $v_1 = -h_1 \cdot \omega_1$ längs derselben Axe. Bedeutet demnach T die resultierende Translationsgeschwindigkeit, Ω die resultierende Winkelgeschwindigkeit, so sind die Komponenten derselben nach den Axen x_1, y_1, z_1 resp.:

$$(1)\quad \begin{aligned} T_x &= -v_1 + v_2 \cos 2\beta - 2a\,\omega_2 \sin 2\beta, & \Omega_x &= -\omega_1 + \omega_2 \cos 2\beta \\ T_y &= v_2 \sin 2\beta + 2a\,\omega_2 \cos 2\beta, & \Omega_y &= \omega_2 \sin 2\beta \\ T_z &= 0 & \Omega_z &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist

$$(2)\qquad \Omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos 2\beta.$$

Bezeichnen jetzt α_1 und α_2 die Winkel von Ω gegen die Axen o_1 und o_2, beide in positivem Sinne gemessen, so ist

(3) $$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta$$

(4) $$\cos\alpha_1 = \frac{\Omega_x}{\Omega}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{\Omega_y}{\Omega}.$$

Demnach

$$\operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{-\omega_1 + \omega_2\cos 2\beta}{\omega_2 \sin 2\beta}$$

d. h.

(5) $$\omega_1 \sin\alpha_1 - \omega_2 \sin\alpha_2 = 0$$

Verbindet man diese Gleichung mit der zweiten Gleichung (4), so folgt

$$\frac{\omega_2}{\Omega} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin 2\beta},$$

so dass die Proportion besteht:

(6) $$\omega_1 : \omega_2 : \Omega = \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1 : \sin 2\beta,$$

wodurch zunächst die Richtung der resultierenden Schraubenaxe g, als parallel zur Richtung von Ω, bestimmt ist.

Multipliziert man ferner die beiden Gleichungen:

$$\Omega\cos\alpha_1 = \Omega_x = -\omega_1 + \omega_2\cos 2\beta$$
$$\Omega\sin\alpha_1 = \Omega_y = \omega_2 \sin 2\beta$$

resp. mit $\cos\alpha_1$ und $\sin\alpha_1$, so folgt noch durch Addition:

(7) $$\Omega = \omega_2\cos\alpha_2 - \omega_1\cos\alpha_1.$$

Sind jetzt x_1, y_1, z_1 die Koordinaten irgend eines Punktes im Raume, so erhält er durch die resultierende Schraube die Geschwindigkeitskomponenten:

(8) $$\begin{aligned} u_x &= T_x + \Omega_y z_1 - \Omega_z y_1 \\ u_y &= T_y + \Omega_z x_1 - \Omega_x z_1 \\ u_z &= T_z + \Omega_x y_1 - \Omega_y x_1. \end{aligned}$$

Für jeden Punkt von g fällt aber die Richtung seiner Geschwindigkeit mit derjenigen von g selbst zusammen. Da die Richtungscosinusse von g andererseits den Komponenten von Ω proportional sind, so sind die Gleichungen:

(9) $$\frac{u_x}{\Omega_x} = \frac{u_y}{\Omega_y} = \frac{u_z}{\Omega_z}$$

die Gleichungen der Axe g.

Weil aber $\Omega_z = 0$ ist, so muss auch $u_z = 0$ sein, d. h. die Axe g ist der Ebene $(x_1 y_1)$ parallel und ihre Projektion auf diese Ebene hat die Gleichung

(10) $$\Omega_x y_1 - \Omega_y x_1 = 0.$$

Daraus folgt, dass die Axe g die Zentrale in einem Punkte G rechtwinkelig schneidet.

Sind r_1 und r_2 die in positivem Sinne gemessenen Abstände des Punktes G von O_1 und O_2, so dass die Beziehung

(11) $$r_1 - r_2 = 2a$$

besteht und bedeutet V die resultierende Translationsgeschwindigkeit der Schraubenaxe g, so ist diese gleich der Geschwindigkeit des Punktes G; somit ergeben die Gleichungen (8) als Komponenten derselben:

$$u_x = T_x + r_1 \Omega \sin \alpha_1 = V \cos \alpha_1$$
$$u_y = T_y - r_1 \Omega \cos \alpha_1 = V \sin \alpha_1.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

(12) $$\begin{aligned} r_1 \cdot \Omega &= T_y \cos \alpha_1 - T_x \sin \alpha_1 \\ V &= T_x \cos \alpha_1 + T_y \sin \alpha_1. \end{aligned}$$

Setzt man die Werte von T_x, T_y, Ω aus (1) und (7) in die erste dieser Gleichungen ein, so nimmt sie die Form an:

(13) $$r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_1 = r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 + h_2$$

und kann, indem man noch

(14) $$h_1 - h_2 = 2h$$

setzt, in jede der beiden neuen Formen:

(15) $$\begin{aligned} \sin 2\beta\, r_1 &= 2\,(a \cos \alpha_2 + h \sin \alpha_2) \sin \alpha_1 \\ \sin 2\beta\, r_2 &= 2\,(a \cos \alpha_1 + h \sin \alpha_1) \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

gebracht werden.

Durch diese beiden Gleichungen ist jetzt die Lage des Punktes G auf $O_1 O_2$ und damit auch die Lage der gesuchten Schraubenaxe vollständig bestimmt.

Die Einsetzung der Werte von T_x, T_y, Ω in die zweite der Gleichungen (12) ergiebt die resultierende Translationsgeschwindigkeit:

(16) $$V = (2a - h_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_2 \operatorname{cotg} \alpha_2) \sin \alpha_1 \cdot \omega_1$$

und folglich den Windungsparameter der resultierenden Schraube:

(17) $$H = \frac{V}{\Omega} = \frac{h_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - h_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 - 2a}{\operatorname{cotg} \alpha_1 - \operatorname{cotg} \alpha_2},$$

wobei der Nenner nicht verschwinden kann, so lange 2β ein von Null oder zwei Rechten verschiedener Winkel ist.

Wird also die Axe g um o_1 und o_2 geschraubt, so entsteht ein Paar von offenen scharfgängigen Regelschraubenflächen S_1

und S_2. Die vom Punkte G beschriebenen Schraubenlinien sind die Striktionslinien der Schraubenflächen S_1 und S_2, der Punkt G ist also für jede Erzeugende g der Zentralpunkt.

Bezeichnen nun ϑ_1 und ϑ_2 die im positiven Sinne gemessenen Winkel der Tangenten der Striktionslinien gegen die Axen x_1 resp. x_2, so sind die Windungsparameter

$$(18) \qquad h_1 = -r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1, \; h_2 = -r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2$$

und die Bedingungsgleichung (13) nimmt die Form an:

$$(19) \qquad r_1 (\operatorname{cotg} \vartheta_1 - \operatorname{cotg} \alpha_1) = r_2 (\operatorname{cotg} \vartheta_2 - \operatorname{cotg} \alpha_2) = q.$$

Die Grösse q bedeutet aber bekanntlich den Parameter[1]) der Regelschraubenflächen S_1 und S_2 längs der Erzeugenden g.

1) Vergl.: *A. Mannheim:* Géométrie Descriptive. Paris 1886. — *G. Darboux:* Théorie Générale des Surfaces. III Partie. Paris 1894.

Der Parameter jeder Regelfläche hat ein bestimmtes Vorzeichen. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt der Erzeugenden g, so sehe man von diesem nach dem Zentralpunkt hin. Durchläuft jetzt ein Punkt die Strecke vom Zentralpunkt nach P und dreht sich dabei die Tangentialebene des bewegten Punktes in positivem Sinne um g, so heisst der Parameter positiv, im entgegengesetzten Falle negativ. Um das Vorzeichen von q, also des Parameters der Schraubenfläche (20), genau zu bestimmen, verschieben wir das Koordinatensystem von O_1 derart an den Punkt G, dass die neue Axe ξ mit g, die neue Axe ζ mit GO_2 zusammenfällt. Die Transformation geschieht mittels der Formeln

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 \\ \eta &= -x \sin \alpha_1 + y \cos \alpha_1 \\ \zeta &= z - r_1. \end{aligned}$$

Demnach werden die neuen Gleichungen der Schraubenfläche S_1:

$$\begin{aligned} \xi &= \cos \alpha_1 (\cos \alpha_1 \, u + h_1 \varphi_1) + \sin \alpha_1 (\sin \alpha_1 \cos \varphi_1 \, u - r_1 \sin \varphi_1) \\ \eta &= -\sin \alpha_1 (\cos \alpha_1 \, u + h_1 \varphi_1) + \cos \alpha_1 (\sin \alpha_1 \cos \varphi_1 \, u - r_1 \sin \varphi_1) \\ \zeta &= \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 \, u + r_1 \cos \varphi_1 - r_1. \end{aligned}$$

Für jeden Punkt u der Axe ξ ist $\varphi_1 = 0$ und die Tangentialebene bestimmt durch die Tangente der Schraubenlinie, welche durch den Punkt u geht. Die Richtungscosinusse der Tangente sind aber proportional zu den Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{d\varphi_1} &= h_1 \cos \alpha_1 - r_1 \sin \alpha_1 \\ \frac{d\eta}{d\varphi_1} &= -h_1 \sin \alpha_1 - r_1 \cos \alpha_1 \\ \frac{d\zeta}{d\varphi_1} &= \sin \alpha_1 \, u. \end{aligned}$$

Die Ebene $(\xi\eta)$ ist die Zentralebene. Bezeichnet also Θ den Winkel, um welchen sich die Tangentialebene gegen die Zentralebene in positivem Sinne gedreht hat, so ist

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{\sin \alpha_1 \, u}{-h_1 \sin \alpha_1 - r_1 \cos \alpha_1} = \frac{u}{-(h_1 + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1)}.$$

Demnach ist der Parameter der Schraubenfläche S_1 auch dem Zeichen nach

$$q = -(h_1 + r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1) = r_1 (\operatorname{cotg} \vartheta_1 - \operatorname{cotg} \alpha_1).$$

Da die Zentralpunkte beider windschiefer Flächenelemente für g in G zusammenfallen und die Parameter gleich sind, so berühren sich in der That die Flächen S_1 und S_2 längs der ganzen Linie g.

Soll also durch die Schraubenbewegung von der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 und der konstanten Translationsgeschwindigkeit $h_1\omega_1$ an der Axe o_1 eine Winkelgeschwindigkeit ω_2 und eine Translationsgeschwindigkeit $h_2\omega_2$ an der Axe o_2 hervorgebracht werden, so kann dies geschehen durch Rollen zweier Regelschraubenflächen:

$$(20)\quad \begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha_1\, u + h_1\,\varphi_1 & x_2 &= \cos\alpha_2\, u + h_2\,\varphi_2 \\ y_1 &= \sin\alpha_1 \cos\varphi_1\, u - r_1 \sin\varphi_1 & y_2 &= \sin\alpha_2 \cos\varphi_2\, u - r_2 \sin\varphi_2 \\ z_1 &= \sin\alpha_1 \sin\varphi_1\, u + r_1 \cos\varphi_1 & z_2 &= \sin\alpha_2 \sin\varphi_2\, u + r_2 \cos\varphi_2, \end{aligned}$$

deren Richtungskegel durch die Bedingungen:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta,\quad \omega_1 \sin\alpha_1 - \omega_2 \sin\alpha_2 = 0$$

und deren Striktionslinien durch die Bedingungen:

$$r_1 - r_2 = 2a,\quad r_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 - r_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 = h_2 - h_1$$

bestimmt sind.

Werden beide Flächen mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 resp. ω_2 geschraubt, so rollen sie aufeinander mit der relativen Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \omega_2 \cos\alpha_2 - \omega_1 \cos\alpha_1.$$

Ausserdem besitzen sie längs g eine relative Gleitgeschwindigkeit

$$V = (2a - h_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + h_2 \operatorname{cotg}\alpha_2) \sin\alpha_1\,\omega_1,$$

welche man mittels der Beziehungen (18) und (19) auch auf die Form

$$(21)\qquad V = q \cdot \frac{\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 - 2\beta)}{\sin(\vartheta_1 - \alpha_1)\sin(\vartheta_2 - \alpha_2)} \sin\alpha_1 \cdot \omega_1$$

bringen kann. Dabei ist das Verhältnis der Translationsgeschwindigkeiten längs der Axen o_1 resp. o_2 durch die Gleichung

$$(22)\qquad \frac{r_1}{r_2} = \frac{\sin(\vartheta_1 - \alpha_1)\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_2 - \alpha_2)\cos\vartheta_2}$$

dargestellt.

Die relative Gleitgeschwindigkeit verschwindet, d. h. die beiden Regelschraubenflächen rollen aufeinander ohne zu gleiten, wenn die Bedingung:

$$(23)\qquad \vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\beta$$

erfüllt ist, d. h. wenn die Striktionslinien beider Flächen sich in G berühren. Da in diesem Falle

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 \neq 0$$

ist, so lautet jetzt die Parametergleichung:

$$(24) \qquad \frac{r_1}{\sin\alpha_1 \sin\vartheta_1} = \frac{r_2}{\sin\alpha_2 \sin\vartheta_2}$$

oder

$$\frac{r_1\, d\varphi_1}{\sin\vartheta_1} = \frac{r_2\, d\varphi_2}{\sin\vartheta_2},$$

welche in der That aussagt, dass die Linienelemente beider Striktionslinien, die gleichzeitig durch die Zentrale gehen, gleich lang sind, so dass diese und damit auch die Flächen S_1 und S_2 aufeinander rollen. Für das Verhältnis der Translationsgeschwindigkeit ergiebt sich jetzt:

$$(25) \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2}.$$

Dieses Verhältnis ist also nur noch abhängig von den Steigungswinkeln der Striktionslinien der Flächen S_1 und S_2.

Die relative Gleitgeschwindigkeit V kann aber auch verschwinden, wenn der Parameter q gleich Null ist, d. h. wenn beide Schraubenflächen S developpabel sind. Da in diesem Falle

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = 0, \quad \vartheta_2 - \alpha_2 = 0, \quad h_1 = -r_1 \operatorname{cotg}\alpha_1, \quad h_2 = -r_2 \operatorname{cotg}\alpha_2$$

ist, so folgt:

$$V = \left(-\frac{r_1}{\sin^2\alpha_1} + \frac{r_2}{\sin^2\alpha_2}\right)\sin\alpha_1 \cdot \omega_1.$$

Demnach verschwindet V dann, wenn

$$(26) \qquad \frac{r_1}{\sin^2\alpha_1} - \frac{r_2}{\sin^2\alpha_2} = 0$$

ist.

Da also r_1 und r_2 in diesem Falle gleichzeitig positiv oder negativ sind, so kann demnach für developpable Schraubenflächen S Berührung nur von innen stattfinden.

§ 2. Die Axenflächen G, insbesondere diejenigen dritten Grades.

Nach dem Vorangegangenen gehört zu jeder durch die drei Grössen r_1, α_1, ϑ_1 definierten Regelschraubenfläche S_1 eine einzige durch r_2, α_2, ϑ_2 definierte andere Schraubenfläche S_2. Die Gesamtheit dieser Flächenpaare bildet demnach eine dreifache Mannigfaltigkeit. Sind $2a$ und 2β gegeben, so folgt aus den Gleichungen

$$r_1 - r_2 = 2a, \; \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta, \; r_1(\operatorname{cotg}\alpha_1 - \operatorname{cotg}\vartheta_1) = r_2(\operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\vartheta_2)$$

zunächst der Wert von r_2 und von α_2; die letzte Gleichung liefert dann

den noch unbekannten Winkel ϑ_2. Zu seiner Bestimmung gelangen wir am einfachsten auf graphischem Wege.

Durch den Scheitel O des Axenwinkels 2β in Figur 2, Taf. II. legen wir einen Kreis K vom Radius $r_o = \frac{a}{\sin 2\beta}$, der die Schenkel des Winkels in Abschnitten $OO_1 = OO_2$ derart schneidet, dass $O_1 O_2 = 2a$ wird. Irgend ein Strahl g durch O bildet dann mit OO_1 den Winkel α_1, mit OO_2 den Winkel α_2, mit K den Schnittpunkt G_1, mit $O_1 O_2$ den Schnittpunkt A. Es sei ferner G ein Punkt der Sehne $O_1 O_2$, so dass $O_1 G = r_1$ $O_2 G = r_2$ ist, endlich sei G' der Schnittpunkt des Strahles OG mit dem Kreise K.

Durch Angabe des Strahles g und des Punktes G erhalten die vier Grössen α_1, α_2, r_1, r_2 feste Werte. Ist daher t_1 ein Strahl durch O, welcher mit OO_1 den Winkel ϑ_1 einschliesst, t_2 ein weiterer Strahl, der mit OO_2 in gleichem Sinne gemessen den Winkel ϑ_2 bildet, so wird durch die Parametergleichung (19) zwischen t_1 und t_2 eine projektive Beziehung hergestellt. Bezeichnen also T_1 und T_2 die Schnittpunkte von t_1 und t_2 mit K, so besteht zwischen diesen Punktepaaren des Kreises eine projektive Abhängigkeit, die durch folgenden Satz definiert wird:

Die Projektivität zwischen T_1 und T_2 ist auf dem Kreise K vollständig bestimmt durch die Punkte O_1 und O_2 als dem einen Paar und die Gerade $G_1 G = p$ als Axe der Projektivität.

Aus der Gleichung (19) folgt zunächst, dass dem Winkel $\vartheta_1 = 0$ auch der Winkel $\vartheta_2 = 0$ entspricht; O_1, O_2 ist also in der That ein Paar der Projektivität. Für $\vartheta_1 = \alpha_1$ folgt $\vartheta_2 = \alpha_2$; t_1 und t_2 fallen also gleichzeitig mit g zusammen, d. h. G_1 ist das eine Doppelelement der Projektivität. Die Strahlen t_1 und t_2 fallen nun zum zweiten Male zusammen, wenn $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\beta$ ist. Aus der Parametergleichung (24) folgt aber in diesem Falle:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{r_1}{r_2} : \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{O_1 G}{O_2 G} : \frac{O_1 A}{O_2 A} = (O_1 O_2 G A) = (O_1 O_2 G' G_1).$$

Es sei jetzt G_2 der gesuchte zweite Doppelpunkt auf K, B der Schnittpunkt von OG_2 mit $O_1 O_2$, U der unendlich ferne Punkt dieser Geraden. Alsdann ist auch:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{O_1 B}{O_2 B} = \frac{O_1 B}{O_2 B} : \frac{O_1 U}{O_2 U} = (O_1 O_2 B U) = (O_1 O_2 G_2 O).$$

Demnach besteht folgende Gleichheit der Doppelverhältnisse:

(27) $$(O_1 O_2 G' G_1) = (O_1 O_2 G_2 O)$$ d. h.

die drei Punktepaare $O_1 O_2$, $G' O$, $G_1 G_2$ sind drei Paare der nämlichen

Punktinvolution des Kreises, ihre drei Verbindungsgeraden gehen demnach durch den nämlichen Punkt. Es sind also G, G_1, G_2 drei Punkte einer Geraden p, welche als Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte G_1 und G_2 demnach die Perspektivaxe der von den Punktepaaren T_1, T_2 gebildeten Projektivität ist. Die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 sind also derart voneinander abhängig, dass die Linien O_1T_2 und O_2T_1 sich auf der Geraden p schneiden müssen. Solange t_1 von t_2 verschieden ist, findet beim Rollen der zugehörigen Flächen S_1 und S_2 gleichzeitig Gleiten statt. Soll die Gleitgeschwindigkeit verschwinden, so müssen t_1 und t_2 zusammenfallen und gleichzeitig nach dem Punkte G_2 hinlaufen.

Demnach bilden die Elementenpaare S_1S_2 für reines Rollen eine zweifache Mannigfaltigkeit, indem jede Gerade p der Ebene, welche den Kreis K reell schneidet, ein solches Paar bestimmt, und aus dieser zweifachen Mannigfaltigkeit lässt sich wieder leicht eine bestimmte einfache Mannigfaltigkeit von Flächenpaaren S_1S_2 aussondern. Denken wir uns nämlich, die Linie p durchlaufe als Tangente eine beliebige Kurve F in der Ebene des Kreises K, so bestimmt jede Lage derselben auf O_1O_2 einen Punkt G und damit zwei Abschnitte $O_1G = r_1$ und $O_2G = r_2$. Ebenso trifft sie den Kreis K in den Punkten G_1 und G_2, welche mit O zwei Geraden g und g' bestimmen. Bringt man jetzt im Raume ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem an, dessen Anfangspunkt in der Mitte M von O_1O_2 liegt, dessen positive Axe z mit den positiven Axen z_1 und z_2 zusammenfällt, dessen positive Axen x und y aber die Winkelhalbierenden der Axen x_1 und x_2 resp. y_1 und y_2 sind, so denke man sich den Kreis K mit allen Linienpaaren g und g' derart in die Ebene (xy) gebracht, dass O mit M zusammenfällt, OO_1 parallel x_1, OO_2 parallel x_2 wird und dass die Zeichnung dem Punkte O_1 zugewendet erscheint. Zieht man sodann durch jeden Punkt G von O_1O_2 die Parallelen zu den beiden ihm entsprechenden Linien g und g', so erfüllt die Gesamtheit dieser Linienpaare eine bestimmte Regelfläche $\mathfrak{G}$.

Jede Erzeugende g dieser Fläche $\mathfrak{G}$ ist die gemeinsame Berührungslinie zweier Flächen S_1 und S_2, deren Striktionslinien durch die zweite Erzeugende g' als gemeinsamer Tangente in G bestimmt sind und welche ohne Gleiten aufeinander rollen. Dabei können die Linien g und g' mit einander in ihrer Bedeutung vertauscht werden, so dass durch jedes Linienpaar gg' von $\mathfrak{G}$ zwei Paare von Flächen S_1S_2 hindurchgehen. Als Ort der momentanen Berührungslinien einer einfachen Mannigfaltigkeit von Flächenpaaren S_1S_2 wollen wir die Fläche $\mathfrak{G}$ kurz die Axenfläche nennen.

Für jedes durch g und g' bestimmte Flächenpaar $S_1 S_2$ lassen sich nun auch graphisch die Grössen h_1, h_2 und q leicht bestimmen. Sind nämlich in Fig. 3, Taf. II P_1 und P_2 die lotrecht unter O_1 und O_2 gelegenen Punkte des Kreises K, ist ferner $G_1 G_2$ die Linie p, so ist $O_1 G = r_1$, $O_2 G = r_2$ auch dem Vorzeichen nach, indem die positive Richtung von O_1 nach O_2 geht. Die Verbindungslinien von P_1 und P_2 mit G_2 schliessen dann mit den Vertikalen in P_1 und P_2 die Winkel ϑ_1 und ϑ_2 ein. Zieht man daher GH_1 parallel $P_1 G_2$ und GH_2 parallel $P_2 G_2$, so ist:

$$O_1 H_1 = -r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1 = h_1 \text{ und } O_2 H_2 = -r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2 = h_2.$$

Auf beiden Vertikalen geht die positive Richtung nach oben, die negative nach unten, so dass durch die Konstruktion auch das Vorzeichen von h_1 und h_2 bestimmt wird.

Verbindet man jetzt desgleichen P_1 und P_2 mit G_1, so schliessen diese Geraden mit den Vertikalen durch P_1 und P_2 die Winkel α_1 und α_2 ein. Ist somit FG die durch G gehende Vertikale und sind Q_1 und Q_2 ihre Schnittpunkte mit $P_1 G_1$ und $P_1 G_2$, H ihr Schnittpunkt mit $P_2 G_2$, so ist

$$\begin{aligned} FQ_1 &= r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 \\ FQ_2 &= r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1 = -h_1 \\ FH &= r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2 = -h_2. \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} FQ_1 - FQ_2 &= r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_1 = -q \\ FQ_2 - FH &= -h_1 + h_2 = -2h. \end{aligned}$$

Somit

$$Q_1 Q_2 = q, \quad Q_2 H = 2h$$

auch dem Vorzeichen nach.

Fällt man endlich von H_1 das Lot $H_1 V_1$ auf $P_1 G_1$ und von H_2 das Lot $H_2 V_2$ auf $P_2 G_1$, so ist ebenfalls dem Vorzeichen nach:

$$O_1 V_1 = h_1 \operatorname{cotg} \alpha_1, \quad O_2 V_2 = h_2 \operatorname{cotg} \alpha_2.$$

Demnach ist

$$V_1 V_2 = 2a - h_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 + h_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = o$$

und es fallen daher die Punkte V_1 und V_2 zusammen. Man wird in dem Zutreffen dieser Eigenschaft der Punkte V_1 und V_2 somit eine einfache Kontrole für das richtige Auftragen der Strecken besitzen.

Indem wir im weiteren zunächst voraussetzen, dass die Bedingung

$$V = 0$$

erfüllt ist, wollen wir einige der einfachsten Axenflächen $\mathfrak{G}$ genauer

ermitteln. Die Enveloppe aller Linien p bestimmen wir am einfachsten durch eine Gleichung

$$F(\alpha, \vartheta) = 0$$

zwischen den Koordinaten α und ϑ der Linie p. Die Gleichung der Fläche $\mathfrak{G}$ selbst soll bezogen werden auf das Mittelpunktkoordinatensystem M (x, y, z). Die einfachsten Fälle einer Enveloppe der Linien p, die sich darbieten, sind diejenigen, in welchen diese Linien ein Strahlenbüschel bilden; es ist dann geometrisch klar, dass alle Axenflächen $\mathfrak{G}$ durchweg Flächen dritten Grades werden, welche die Linie $O_1 O_2$ zur Doppelgeraden haben.

Setzt man also:

$$(28) \qquad \begin{matrix} r_1 = \varrho + a, & \alpha_1 = \alpha + \beta, & \vartheta_1 = \vartheta + \beta \\ r_2 = \varrho - a, & \alpha_2 = \alpha - \beta, & \vartheta_2 = \vartheta - \beta \end{matrix}$$

so folgt aus der Parametergleichung (19):

$$(29) \qquad \frac{\varrho}{a} = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \vartheta + \operatorname{cotg}^2 \beta}{\operatorname{cotg} \beta \, (\operatorname{cotg} \alpha + \operatorname{cotg} \vartheta)}.$$

Eliminiert man demnach aus dieser Gleichung und derjenigen der Enveloppe, d. h.

$$F(\alpha, \vartheta) = 0$$

das Argument ϑ und setzt man in der erhaltenen Gleichung

$$\varrho = z, \ \operatorname{cotg} \alpha = \frac{x}{y},$$

so erhält man die Gleichung der gewünschten Axenfläche.

a) Die Enveloppe F sei das Strahlenbüschel am Mittelpunkt M_0 des Kreises K. Fig. 4, Taf. II. Dieses Durchmesserbüschel hat die Gleichung

$$(30) \qquad F(\alpha, \vartheta) = \vartheta - \alpha - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Die beiden Erzeugenden g und g' stehen also in jedem Punkte G von $O_1 O_2$ auf einander senkrecht; man kann daher $\mathfrak{G}$ die orthogonale Axenfläche nennen; ihre Gleichung wird:

$$(31) \qquad z = \frac{2a}{\operatorname{tg} 2\beta} \frac{xy}{x^2 - y^2}.$$

b) Ein ausgezeichneter Punkt der Ebene ist der Pol O' der Zentralen $O_1 O_2$ in Bezug auf den Kreis K. Da jetzt jedes Linienpaar gg' durch die Axen O_1 und O_2 harmonisch getrennt wird, so kann man die Axenfläche die harmonische nennen. Die Gleichung des Strahlenbüschels ist:

$$(32) \qquad F(\alpha, \vartheta) = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \vartheta - \operatorname{cotg}^2 \beta = 0$$

und die Gleichung der harmonischen Axenfläche:

(33) $$z = a \sin 2\beta \frac{xy}{x^2 \sin^2\beta + y^2 \cos^2\beta}.$$

c) Die Linien p sollen ein Büschel paralleler Geraden von irgend welcher Richtung bilden. Die Gleichung dieses Büschels wird:

(34) $$F(\alpha, \vartheta) = \vartheta + \alpha - \text{konst.} = 0.$$

Um zunächst die Bedeutung der Konstanten zu erfahren, gehen wir aus von der Parametergleichung (19):

$$r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = -2h = r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1 - r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2.$$

Nach Gleichung (15) besteht daher die Doppelgleichung:

$$r_1 \sin 2\beta = 2(a \cos \alpha_2 + h \sin \alpha_2) \sin \alpha_1 = 2(a \cos \vartheta_2 + h \sin \vartheta_2) \sin \vartheta_1$$

oder

$$a(\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 - \cos \vartheta_2 \sin \vartheta_1) = -h(\sin \alpha_2 \sin \alpha_1 - \sin \vartheta_2 \sin \vartheta_1)$$

also unter Einführung der Winkel α und ϑ nach (28):

$$a(\sin 2\alpha - \sin 2\vartheta) = h(\cos 2\alpha - \cos 2\vartheta)$$

und somit:

(35) $$\operatorname{cotg}(\alpha + \vartheta) = -\frac{h}{a}.$$

Jedem Parallelbüschel von Linien p entspricht demnach eine Axenfläche G_h, deren zugehörige Schraubenflächenpaare $S_1 S_2$ eine konstante Differenz $2h$ ihrer Windungsparameter h_1 und h_2 besitzen. Führt man nun die Werte der Gleichungen (28) in die Gleichung

$$r_1 \sin 2\beta = 2(a \cos \alpha_2 + h \sin \alpha_2) \sin \alpha_1$$

ein, so folgt:

(36) $$\varrho \sin 2\beta = a \sin 2\alpha - h(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)$$

und demnach als Gleichung der Fläche G_h:

$$z = \frac{2axy - 2h(x^2 \sin^2\beta - y^2 \cos^2\beta)}{\sin 2\beta\,(x^2 + y^2)}.$$

Für $h = 0$ oder $\alpha + \vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhält man ein Büschel vertikaler Linien p und als Axenfläche das durch die Axen o_1 und o_2 bestimmte Plückersche Konoid G_0:

(37) $$z = \frac{2a}{\sin 2\beta} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Um die Bedeutung der Fläche G_h zu erkennen, schreiben wir die Gleichung (36) in der Form:

$$\varrho - h \operatorname{cotg} 2\beta = \frac{a \sin 2\alpha - h \cos 2\alpha}{\sin 2\beta}.$$

Setzt man nun:

(38)
$$\varrho - h \operatorname{cotg} 2\beta = \varrho'$$
$$-\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \varepsilon$$

so wird

$$\varrho' = a \frac{\sin(2\alpha + \varepsilon)}{\sin 2\beta \cos \varepsilon} = \sqrt{a^2 + h^2} \frac{\sin 2\alpha'}{\sin 2\beta}$$

und indem man wieder $\operatorname{tg} \alpha' = \frac{y'}{x'}$ setzt, die Gleichung von G_h in Bezug auf das Koordinatensystem $M_h(x', y', z')$:

(39)
$$z' = \frac{2\sqrt{a^2 + h^2}}{\sin 2\beta} \frac{x' y'}{x'^2 + y'^2}$$

Jede Fläche G_h ist demnach ein Plückersches Konoid, dessen Mittelpunkt M_h um den Betrag $h \operatorname{cotg} 2\beta$ gegen M verschoben und dessen durch M_h gehende Axen x' und y' um den Winkel $(\vartheta + \alpha - \frac{\pi}{2})$ in positivem Sinne gegen die Axen x und y gedreht sind, wie die Fig. 5, Taf. II zur Anschauung bringt. Sämtliche Flächen G_h haben die Doppelgerade $O_1 O_2$, die drei unendlich fernen Erzeugenden, sowie die Axen o_1 und o_2 gemeinsam, d. h.:

Die sämtlichen Flächen G_h bilden ein Büschel Plückerscher Konoide.

d) Wird endlich der Kreis K selbst als Enveloppe aller Linien p gewählt, so heisst seine Gleichung:

$$F(\alpha, \vartheta) = \vartheta - \alpha = 0.$$

Die Flächen S_1 und S_2 werden jetzt developpable Schraubenflächen; als zugehörige Axenfläche G ergiebt sich die doppelt gedachte Fläche dritten Grades:

(40)
$$z = \frac{a}{\sin 2\beta} \frac{x^2 \sin^2 \beta + y^2 \cos^2 \beta}{xy}.$$

Werden im allgemeinen Falle auch Flächenpaare für gleitendes Rollen zugelassen, so tritt zu jeder Axenfläche G noch eine zweite analog gebildete Regelfläche G' hinzu, welche gebildet wird von allen Tangentenpaaren t_1, t_2, welche man in den Punkten G der Zentrale an die Striktionslinien der Flächen S_1 und S_2 legen kann. Die eine der beiden Linien t ist dabei willkürlich, die zweite dagegen durch die Doppelverhältnisgleichheit

$$(g g' t_1 t_2) = (g g' o_1 o_2)$$

bestimmt. Im Falle reinen Rollens ist die Fläche G' identisch mit G,

indem die eine der beiden Linien g oder g' als die Vereinigung der Linien t_1 und t_2 anzusehen ist. Fig. 6, Taf. III zeigt z. B. den Aufriss zweier Regelschraubenflächen S_1 und S_2 für den Axenwinkel $2\beta = 60^0$. Beide Flächen sind aufeinander abwickelbar; sie vollenden gleichzeitig eine volle Umdrehung, wobei die mit gleichen Ziffern bezeichneten Erzeugenden beider Flächen nacheinander längs g zur Deckung gelangen. Der Deutlichkeit halber ist von der Fläche S_2 nur die eine Hälfte gezeichnet; die graphische Ermittelung der Grössen $r_1, r_2, \alpha_1, \alpha_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ mittelst der Linie p zeigt Figur 6a.

§ 3. Darstellung der allgemeinen Axoide mit und ohne Gleitbewegung.

Denken wir uns zwei Regelschraubenflächen S_1 und S_2 durch ihre Gleichungen (20) gegeben, so sind ihre Richtungskegel Kreiskegel, welche durch die beiden Gleichungen

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta, \ \omega_1 \sin\alpha_1 - \omega_2 \sin\alpha_2 = 0$$

vollständig bestimmt sind und bei der Bewegung um die Axen o_1 und o_2 mit ihren unendlich fernen Querschnitten ohne Gleiten aufeinander rollen. Tritt jetzt zu diesen beiden Gleichungen eine willkürliche Gleichung zwischen φ_1 und φ_2 hinzu, mit der Beschränkung, dass dem Winkel $\varphi_1 = 0$ auch der Winkel $\varphi_2 = 0$ entspreche, so gehen die Kreiskegel in allgemeine Kegel K_1 und K_2 über, welche durch die Gleichungen

$$(41) \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta, \ \sin\alpha_1\, d\varphi_1 - \sin\alpha_2\, d\varphi_2 = 0, \ \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \ \Phi(o, o) = 0$$

vollständig bestimmt sind. Diese Gleichungen definieren aber zwei allgemeine entsprechende **Rollkegel**[1]), d. h. zwei Kegel, deren unendlich ferne Querschnitte bei ihren Drehungen um o_1 und o_2 fortgesetzt aufeinander rollen. Nehmen wir überdies an, dass auch die Windungsparameter h_1 und h_2 gegebene Funktionen von φ_1 und φ_2 sind, so stellen die Gleichungen:

$$(42) \quad \begin{aligned} x_1 &= \cos\alpha_1\, u + \int_0^{\varphi_1} h_1\, d\varphi_1 & x_2 &= \cos\alpha_2\, u + \int_0^{\varphi_2} h_2\, d\varphi_2 \\ y_1 &= \sin\alpha_1 \cos\varphi_1\, u - r_1 \sin\varphi_1 & y_2 &= \sin\alpha_2 \cos\varphi_2\, u - r_2 \sin\varphi_2 \\ z_1 &= \sin\alpha_1 \sin\varphi_1\, u + r_1 \cos\varphi_1 & z_2 &= \sin\alpha_2 \sin\varphi_2\, u + r_2 \cos\varphi_2 \end{aligned}$$

wo r_1 und r_2 durch die Gleichungen (15) als Funktionen von φ_1 und φ_2 erklärt sind, zwei allgemeine Regelflächen R_1 und R_2 dar, deren Richtungskegel entsprechende Rollkegel sind.

1) Vergl. den I. Teil dieser Arbeit a. a. O. S. 30.

Zu einer deutlichen Vorstellung dieser Flächen gelangen wir nun auf fogende Weise: Sei e eine Gerade, welche die Axe o_1, d. h. x_1, rechtwinklig schneidet. Diese Linie e drehe sich von der Anfangslage $O_1 O_2$ aus um x_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 und verschiebe sich gleichzeitig längs x_1 mit der Geschwindigkeit $v_1 = h_1 \cdot \omega_1$. Sie beschreibt also eine gewisse Regelfläche H_1 nach Art der geschlossenen flachgängigen Regelschraubenflächen, welche, da $\frac{d x_1}{d \varphi_1} = h_1$ ist, längs jeder Erzeugenden e den Parameter $(-h_1)$ besitzt. Auf jeder Erzeugenden e von H_1 werde jetzt ein Punkt G aufgetragen, dessen Abstand von der Axe x_1 gleich r_1 sein möge, alsdann erfüllen alle Punkte G eine auf der Fläche H_1 liegende Raumkurve, welche nichts anderes ist, als die Linie $u = 0$ der Regelfläche R_1.

Ziehen wir jetzt durch jeden Punkt G dieser Linie $u = 0$ eine Gerade g_1 normal zu e und unter demjenigen Winkel α_1 gegen die Axe x_1, welcher dem zu G gehörigen Winkel φ_1 entspricht, d. h. parallel zu einer bestimmten Erzeugenden des Kegels K_1, so erfüllt die Gesamtheit der Linien g die Regelfläche R_1.

In analoger Weise kann die Fläche R_2 hergestellt werden.

Durch die Gleichung $\Phi = 0$ wird nun jeder Erzeugenden g_1 von R_1 eine bestimmte Erzeugende g_2 von R_2 zugeordnet, und indem man jetzt die Flächen R_1 und R_2 um ihre Axen o_1 und o_2 so schraubt, dass ihre unendlich fernen Querschnitte aufeinander rollen und die entsprechenden Erzeugenden e_1 und e_2 beider Flächen H_1 und H_2 successive durch die Zentrale $O_1 O_2$ gehen, so ist klar, dass alle entsprechenden Erzeugenden g_1 und g_2 nacheinander zur Deckung gelangen, sobald ihre Fusspunkte G die Zentrale $O_1 O_2$ passieren. Die Gesamtheit der in dieser Weise zusammengetretenen Erzeugenden g_1 und g_2 erfüllt dabei eine bestimmte Axenfläche G, welche zu den Flächen R_1 und R_2 gehört.

Soll die gegenseitige Bewegung beider Regelflächen R_1 und R_2 nun in einem Rollen und Gleiten längs der gemeinschaftlichen Erzeugenden bestehen, so müssen R_1 und R_2 sich fortwährend längs der augenblicklich gemeinsamen Erzeugenden berühren; d. h. es müssen beim Zusammentreten von g_1 und g_2 die Zentralpunkte C_1 und C_2 dieser Erzeugenden zur Deckung gelangen und überdies müssen die Parameter Q_1 und Q_2 beider Flächen längs g_1 und g_2 einander gleich sein.

Sind ungekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt, so sind, falls die räumliche Ausdehnung der Bewegung nicht im Wege steht, die Regelflächen R_1 und R_2 zwei entsprechende allgemeine Axoide und die von der gemeinsamen Berührungserzeugenden g beschriebene Fläche G ist ihre Axenfläche.

Sind jetzt allgemein:

$$x = a_1 u + b_1$$
$$y = a_2 u + b_2$$
$$z = a_3 u + b_3,$$

wo die a und b gegebene Funktionen des Argumentes φ_1 sein sollen, die Gleichungen irgend einer Regelfläche und sind a_1, a_2, a_3 die Richtungscosinus ihrer Erzeugenden g, so dass die Bedingung

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

besteht, welche in der That für die Fläche R_1 nach den Gleichungen (42) erfüllt ist, so lässt sich das Linienelement der Fläche bekanntlich auf die Form bringen:

$$(43) \qquad ds^2 = du^2 + 2D\,du\,d\varphi_1 + (Au^2 + 2Bu + C)\,d\varphi_1^2.$$

Dabei haben die Grössen A, B, C, D für den Fall der Fläche R_1 die folgenden Werte:

$$(44) \qquad \begin{aligned} D &= a_1 b_1' + a_2 b_2' + a_3 b_3' = h_1 \cos\alpha_1 - r_1 \sin\alpha_1 \\ A &= a_1'^2 + a_2'^2 + a_3'^2 = \sin^2\alpha_1 + \alpha_1'^2 \\ B &= a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' = \sin\alpha_1\,(r_1' + q\alpha_1') \\ C &= b_1'^2 + b_2'^2 + b_3'^2 = h_1^2 + r_1^2 + r_1'^2. \end{aligned}$$

Die Länge des Bogenelements ds hängt nun ab von den beiden unabhängigen Argumenten u und du und es wird daher ds mit dem kürzesten Abstand dn zwischen g_1 und der unendlich benachbarten Erzeugenden g_1' von R_1 zusammenfallen, falls jeder der beiden Ausdrücke:

$$du^2 + 2D\,du\,d\varphi_1 \quad \text{und} \quad Au^2 + 2Bu + C$$

für sich ein Minimum ist. Dies giebt für die Argumente du und u die besonderen Werte:

$$(45) \qquad du = -D\,d\varphi_1 \quad \text{und} \quad u = -\frac{B}{A}.$$

Bezeichnen wir den durch diese Gleichung definierten speziellen Wert von u mit u_1, so stellt u_1 die Entfernung des kürzesten Abstandes dn vom Punkte G, d. h. vom Punkte $u = 0$ dar. Es ist also u_1 der gesuchte Abstand des Zentralpunktes C_1 vom Punkte $u = 0$, d. h. es ist

$$(46) \qquad u_1 = -\frac{\dfrac{r_1'}{\sin\alpha_1} + q\dfrac{\alpha_1'}{\sin\alpha_1}}{1 + \left(\dfrac{\alpha_1'}{\sin\alpha_1}\right)^2}.$$

Setzt man andererseits die Werte von du und u aus (45) in die

Gleichung (43) ein, so geht das Linienelement ds in den kürzesten Abstand dn selber über. Man erhält demnach für das Quadrat dieses Abstandes:

$$(47)\qquad dn^2 = \frac{AC - B^2 - AD^2}{A}\,d\varphi_1^{\,2} = \frac{(q\sin^2\alpha_1 - \alpha_1' r_1')^2}{\sin^2\alpha_1 + \alpha_1'^{\,2}}\,d\varphi_1^{\,2}$$

also

$$dn = \pm\frac{q\sin^2\alpha_1 - \alpha_1' r_1'}{\sqrt{\sin^2\alpha_1 + \alpha_1'^{\,2}}}\,d\varphi_1 .$$

Setzt man andererseits

$$\sqrt{\sin^2\alpha_1 + \alpha_1'^{\,2}}\cdot d\varphi_1 = d\psi,$$

so bedeutet $d\psi$ den unendlich schmalen Winkel zwischen den aufeinanderfolgenden Erzeugenden g_1 und g_1'. Demnach ist der verlangte Parameter Q_1 längs der Erzeugenden g_1 von R_1:

$$Q_1 = \frac{dn}{d\psi} = \pm\frac{q\sin^2\alpha_1 - \alpha_1' r_1'}{\sin^2\alpha_1 + \alpha_1'^{\,2}} .$$

Um das Vorzeichen dieses Quotienten zu bestimmen, beachten wir, dass für α_1 und r_1 als Konstanten die Fläche R_1 übergeht in die Schraubenfläche S_1, welche den Parameter $+q$ besitzt. Es ist demnach das positive Vorzeichen zu wählen. Der Parameter Q_1 hat also den Wert:

$$(48)\qquad Q_1 = \frac{q - \dfrac{\alpha_1'}{\sin\alpha_1}\cdot\dfrac{r_1'}{\sin\alpha_1}}{1 + \left(\dfrac{\alpha_1'}{\sin\alpha_1}\right)^2} .$$

Durch ganz analoge Rechnung ergeben sich für den Abstand u_2 des Zentralpunktes C_2 vom Punkte $u = 0$ und für den Parameter Q_2 der Regelfläche R_2 die beiden Werte:

$$(49)\qquad u_2 = -\frac{\dfrac{r_2'}{\sin\alpha_2} + q\dfrac{\alpha_2'}{\sin\alpha_2}}{1 + \left(\dfrac{\alpha_2'}{\sin\alpha_2}\right)^2}\ \text{ und }\ Q_2 = \frac{q - \dfrac{\alpha_2'}{\sin\alpha_2}\cdot\dfrac{r_2'}{\sin\alpha_2}}{1 + \left(\dfrac{\alpha_2'}{\sin\alpha_2}\right)^2} .$$

Nun bestehen aber für zwei entsprechende Geraden g_1 und g_2 die beiden Bedingungsgleichungen:

$$r_1 - r_2 = 2a,\ \text{also}\ r_1'\,d\varphi_1 - r_2'\,d\varphi_2 = 0$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta,\ \text{also}\ \alpha_1'\,d\varphi_1 - \alpha_2'\,d\varphi_2 = 0;$$

ferner ist nach (41)

$$\sin\alpha_1\,d\varphi_1 - \sin\alpha_2\,d\varphi_2 = 0$$

d. h. es ist:

$$(50)\qquad \frac{r_1'}{\sin\alpha_1} = \frac{r_2'}{\sin\alpha_2}\ \text{ und }\ \frac{\alpha_1'}{\sin\alpha_1} = \frac{\alpha_2'}{\sin\alpha_2} .$$

Diese Gleichungen lassen erkennen, dass in der That

$$(51) \qquad u_1 = u_2 \text{ und } Q_1 = Q_2$$

ist.

Die Flächen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ sind demnach entsprechende Axoide und wir können daher das folgende Ergebnis aussprechen:

Sind die Richtungskegel zweier Axoide als entsprechende Rollkegel nach den Gleichungen (41) gegeben, sind ferner h_1 und h_2 gegebene Funktionen von φ_1, resp. φ_2, sind endlich r_1 und r_2 nach Massgabe der Gleichungen (15) bestimmt, so stellen die Gleichungen (42) zwei entsprechende Axoide für gleitendes Rollen dar.

Sind r_1, α_1 und h_1 als Funktionen von φ_1 gegeben, so lassen sich r_2, α_2 und h_2 eindeutig darstellen als Funktionen von φ_2, d. h.

Zu jeder beliebigen Regelfläche $\mathfrak{R}_1$, welche ohne Singularitäten die Axe o_1 umschliesst, ohne diese oder die Axe o_2 zu schneiden, kann im allgemeinen eine entsprechende Rollfläche $\mathfrak{R}_2$ für gleitendes Rollen gefunden werden. Die Bewegung findet derart statt, dass die unendlich fernen Querschnitte beider Flächen ohne Gleiten aufeinander rollen.

Stellen wir uns jetzt vor, die Axenfläche $\mathfrak{G}$ sei gegeben und ebenso die zu ihr gehörige Fläche $\mathfrak{G}'$, dann gehören zu jeder Erzeugenden g der Axenfläche drei ganz bestimmte Wertepaare α_1, α_2; r_1, r_2; h_1, h_2, d. h. ein bestimmtes Paar von Flächen $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$. Mit Hilfe dieser einfachen Mannigfaltigkeit von Flächenpaaren gelangt man nun auch leicht zu einer kinematischen Erzeugung der allgemeinen Axoide.

Während einer unendlich kurzen Dauer der Bewegung stimmt die gegenseitige Bewegung der Axoide $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ mit derjenigen der beiden Flächen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ überein, welche durch dieselbe Erzeugende g gehen. Im folgenden Zeitteilchen berühren sich $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ nach der g unendlich benachbarten Erzeugenden g' von $\mathfrak{G}$, und die Bewegung beider Axoide findet momentan so statt, als ob die durch g' bestimmten Schraubenflächen $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2$ aufeinander rollten.

Die Axenfläche $\mathfrak{G}$ halten wir jetzt im Raume fest. Den Raum selbst denken wir als aus zwei in einander liegenden Räumen bestehend, von denen der eine um die Axe o_1, der andere um die Axe o_2 um unendlich wenig so geschraubt werde, als ob die beiden durch die Erzeugende g der Axenfläche bestimmten Schraubenflächen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ aufeinander rollten. Wird nun gleichzeitig die Erzeugende g um unendlich wenig über die Axenfläche nach g' hingeführt, dann beschreibt sie in beiden bewegten Räumen zwei unendlich schmale windschiefe

Flächenelemente, von denen wir jetzt zeigen wollen, dass sie den Axoiden $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ angehören müssen.

Wählen wir G als Reduktionspunkt der beiden gegebenen Schraubenbewegungen und gleichzeitig als Anfangspunkt eines Koordinatensystems, dessen positive Axe ξ mit g und dessen Axe ζ mit z_1 zusammenfällt, so ist in Bezug auf dieses die erste Schraube bestimmt durch die 6 Komponenten:

$$\begin{aligned} v_{1\xi} &= (h_1 \cos\alpha_1 - r_1 \sin\alpha_1)\,\omega_1, & \omega_{1\xi} &= \cos\alpha_1 \cdot \omega_1 \\ v_{1\eta} &= -(h_1 \sin\alpha_1 + r_1 \cos\alpha_1)\,\omega_1, & \omega_{1\eta} &= -\sin\alpha_1 \cdot \omega_1 \\ v_{1\zeta} &= 0, & \omega_{1\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Infolge der Verschiebung von g auf $\mathfrak{G}$ kommen die 6 Komponenten dieser Verschiebung, nämlich:

$$\begin{aligned} v_\xi &= k & \omega_\xi &= 0 \\ v_\eta &= 0 & \omega_\eta &= 0 \\ v_\zeta &= r_1' \cdot \omega_1 & \omega_\zeta &= \alpha_1' \cdot \omega_1 \end{aligned}$$

hinzu. Ist also P ein Punkt auf g im Abstande u von G, so erhält er demnach eine Geschwindigkeit w_1, deren Komponenten in Bezug auf das System G (ξ, η, ζ) nach den Formeln (8) gleich sind mit:

$$(52)\quad \begin{aligned} w_{1\xi} &= (h_1 \cos\alpha_1 - r_1 \sin\alpha_1)\,\omega_1 + k \\ w_{1\eta} &= -(h_1 \sin\alpha_1 + r_1 \cos\alpha_1 - \alpha_1' \cdot u)\,\omega_1 = (q \sin\alpha_1 + \alpha_1' u)\,\omega_1 \\ w_{1\zeta} &= (u \sin\alpha_1 + r_1')\,\omega_1. \end{aligned}$$

Infolge der zweiten Schraubung und der Verschiebung von g auf $\mathfrak{G}$ erhält derselbe Punkt eine zweite Geschwindigkeit w_2 mit den Komponenten:

$$(53)\quad \begin{aligned} w_{2\xi} &= (h_2 \cos\alpha_2 - r_2 \sin\alpha_2)\,\omega_2 + k \\ w_{2\eta} &= -(h_2 \sin\alpha_2 + r_2 \cos\alpha_2 - \alpha_2' u)\,\omega_2 = (q \sin\alpha_2 + \alpha_2' u)\,\omega_2 \\ w_{2\zeta} &= (u \sin\alpha_2 + r_2')\,\omega_2. \end{aligned}$$

Aber in Rücksicht auf die Gleichungen (50) wird:

$$(54)\quad \begin{aligned} w_{2\xi} - w_{1\xi} &= (2a - h_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + h_2 \operatorname{cotg}\alpha_2) \sin\alpha_1 \cdot \omega_1 = V \\ w_{2\eta} - w_{1\eta} &= 0 \\ w_{2\zeta} - w_{1\zeta} &= 0. \end{aligned}$$

Demnach liegen die beiden Geschwindigkeiten w_1 und w_2 stets in einer durch g gehenden Ebene, die Verbindungslinie ihrer Endpunkte ist stets parallel mit g und gleich der Gleitgeschwindigkeit V der Paare $\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2$.

Die beiden erzeugten Flächenelemente haben also in jedem Punkt von g dieselbe Tangentialebene.

Bezeichnet jetzt w_{1n} die zu g normale Komponente von w_1, so ergiebt sich:

$$(w_{1n})^2 = [(\sin\alpha_1 u + r_1')^2 + (\alpha_1' u + q\sin\alpha_1)^2]\,\omega_1^2$$

oder

$$\left(\frac{w_{1n}}{\omega_1}\right)^2 = (\sin^2\alpha_1 + \alpha_1'^2)\,u^2 + 2\sin\alpha_1\,(r_1' + q\,\alpha_1')\,u + r_1'^2 + q^2\sin^2\alpha_1,$$

oder in Rücksicht auf die Gleichungen (44):

$$(55)\qquad \left(\frac{w_{1n}}{\omega_1}\right)^2 = A u^2 + 2Bu + C - D^2.$$

An der Stelle $u = -\frac{B}{A}$ wird also w_{1n} ein Minimum. Dieser Punkt ist also derjenige, der sich am wenigsten von g entfernt, d. h. er ist der Zentralpunkt C_1 des erzeugten Flächenelementes. Dieses Flächenelement hat also mit demjenigen von $\mathfrak{R}_1$ den Zentralpunkt gemeinschaftlich.

Setzt man andererseits den Wert $u = -\frac{B}{A}$ in den Ausdruck für w_{1n} ein, so erhält man die minimale Komponente w_{1n}'. Somit stellt $w_{1n}' \cdot dt$ den kürzesten Abstand dn zwischen g und der unendlich benachbarten Linie g' dar. Es ist aber:

$$w_{1n}'^2 = \frac{AC - B^2 - AD^2}{A}\,\omega_1^2$$

somit

$$dn^2 = \frac{AC - B^2 - AD^2}{A}\,d\varphi_1^2$$

und da andererseits der Winkel zwischen g und der Nachbarlinie g'

$$d\psi = \sqrt{A}\,d\varphi_1$$

ist, so ist der Parameter Q des erzeugten Flächenelementes bestimmt durch die Gleichung:

$$(56)\qquad Q^2 = \frac{AC - B^2 - AD^2}{A^2} = Q_1^2.$$

Da dieser Parameter mit demjenigen des Flächenelementes von $\mathfrak{R}_1$ gleich ist, so ist das erzeugte Flächenelement selbst mit demjenigen von $\mathfrak{R}_1$ identisch.

Anologes gilt für das zweite Flächenelement.

Wir erhalten demnach folgendes Ergebnis:

Ist eine einfache Mannigfaltigkeit von Schraubenflächenpaaren $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2$ gegeben, deren Berührungserzeugende g eine bestimmte Axenfläche $\mathfrak{G}$ erfüllen und deren Windungsparameter h_1 und h_2 sich mit g stetig ändern und werden jetzt die

in einander liegenden mit den Axen o_1 und o_2 fest verbundenen Räume derart um diese Axen geschraubt, als ob die momentan durch g gehenden Regelschraubenflächen S_1 und S_2 auf einander rollten, indessen sich die Gerade g nach einem beliebigen Gesetz über die Fläche G hinbewegt, dann beschreibt g in beiden bewegten Räumen zwei entsprechende Axoide R_1 und R_2.

Die Gleitgeschwindigkeit V der Axoide R_1 und R_2 ist nach (54) für jede Lage von g gleich derjenigen von S_1 und S_2, d. h.:

Zwei Axoide R_1 und R_2 rollen nur dann ohne zu gleiten aufeinander, wenn sie aus einem System aufeinander rollender Flächenpaare $S_1 S_2$ hervorgegangen sind.

Mit Hilfe des Abstandes u_1 des Zentralpunktes vom Punkte $u = 0$ und des Parameters Q_1 lässt sich jetzt das Linienelement des Axoides R_1 auf die Form bringen:

$$ds_1^2 = du^2 + 2\,D_1\,du\,d\varphi_1 + (A_1(u - u_1)^2 + Q_1^2 + D_1^2)\,d\varphi_1^2. \tag{57}$$

Desgleichen ergiebt sich für das Linienelement des Axoides R_2:

$$ds_2^2 = du^2 + 2\,D_2\,du\,d\varphi_2 + (A_2(u - u_2)^2 + Q_2^2 + D_2^2)\,d\varphi_2^2, \tag{58}$$

wo die Grössen A, B, C, D die früheren Werte (44) haben. Nun folgt aus den Gleichungen (50), dass

$$A_1\,d\varphi_1^2 = A_2\,d\varphi_2^2 \tag{59}$$

und es werden daher entsprechende Linienelemente gleich lang, also

$$ds_1 = ds_2,$$

sobald die Bedingung:

$$D_1\,d\varphi_1 - D_2\,d\varphi_2 = 0 \tag{60}$$

erfüllt ist. Es muss daher die Gleichung bestehen:

$$(h_1 \cos\alpha_1 - r_1 \sin\alpha_1)\sin\alpha_2 - (h_2 \cos\alpha_2 - r_2 \sin\alpha_2)\sin\alpha_1 = 0$$

oder es muss:

$$2a - h_1 \operatorname{cotg}\alpha_1 + h_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 = 0,$$

somit

$$V = 0$$

sein.

Wenn also die beiden Axoide R_1 und R_2 aufeinander abwickelbar sind, so rollen sie im eigentlichen Sinne ohne zu gleiten, und umgekehrt sind die Axoide aufeinander abwickelbar, sobald die Gleitgeschwindigkeit V verschwindet.

Die Bedingung (60) ist insbesondere dann stets erfüllt, wenn speziell

(61) $$D_1 = D_2 = o$$

ist. Es ist dann:

$$h_1 \cdot \operatorname{cotg} \alpha_1 - r_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg} \alpha_1 \cdot \operatorname{cotg} \vartheta_1 + 1 = 0$$

$$h_2 \cdot \operatorname{cotg} \alpha_2 - r_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{cotg} \alpha_2 \cdot \operatorname{cotg} \vartheta_2 + 1 = 0$$

d. h.:

$$\vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

oder

(62) $$\vartheta - \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn also die Linien $u = \text{const.}$ orthogonale Trajektorien der Erzeugenden sind, so rollen die Axoide aufeinander ohne zu gleiten. Alle diese Axoide haben die orthogonale zur gemeinschaftlichen Axenfläche.

Wenn insbesondere

$$Q_1 = Q_2 = 0$$

ist, so sind beide Axoide developpabel. Denkt man sich die Erzeugenden vom Berührungspunkt mit der Rückkehrkurve nur nach der einen Seite gezogen, so rollen die Axoide im allgemeinen mit Gleiten, indem zwar die beiden Rückkehrkurven die Linie g im gemeinsamen Zentralpunkt berühren, die Linien $u = 0$ dagegen in G verschiedene Tangenten haben. Erst wenn diese beiden Tangenten sich noch decken, rollen die Axoide ohne Gleiten aufeinander.

Betrachten wir überhaupt jetzt den allgemeinen Fall zweier Axoide näher, welche ohne Gleiten aufeinander rollen, so kann die Fläche $\mathfrak{R}_1$ nicht mehr willkürlich gegeben werden. Wir gehen hier zweckmässiger aus von der Axenfläche $\mathfrak{G}$ als dem Gegebenen, welche durch die Gleichung

$$F(\alpha, \vartheta) = 0$$

bestimmt sein möge. Alsdann lassen sich mittelst der Parametergleichung (29) sämtliche Grössen durch die zwei Argumente α und ϑ ausdrücken. Man findet nämlich:

$$r_1 = \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\vartheta + \beta)}{\sin(\alpha + \vartheta)}; \quad r_2 = \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\vartheta - \beta)}{\sin(\alpha + \vartheta)}$$

$$h_1 = -\frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos(\vartheta + \beta)}{\sin(\alpha + \vartheta)}; \quad h_2 = -\frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha - \beta) \cos(\vartheta - \beta)}{\sin(\alpha + \vartheta)}$$

(63) $$q = \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin(\alpha + \vartheta)}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}; \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\cos(\vartheta - \beta)}, \quad V = 0.$$

Ist also α und daher auch ϑ eine bestimmte Funktion von φ_1 und φ_2, so sind alle Grössen und damit auch die Axoide selbst vollständig bestimmt.

Bei gegebener Axenfläche G gehören somit zu jedem gegegebenen Paar von Rollkegeln als Richtungskegel zwei bestimmte Axoide $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, welche aufeinander geometrisch abwickelbar und durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
x &= \cos(\alpha \pm \beta) \cdot u - \frac{2a}{\sin 2\beta} \int_o^{\varphi} \frac{\sin(\alpha \pm \beta)\cos(\vartheta \pm \beta)}{\sin(\alpha + \vartheta)}\, d\varphi \\
(64) \quad y &= \sin(\alpha \pm \beta)\cos\varphi \cdot u - \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha \pm \beta)\sin(\vartheta \pm \beta)}{(\sin \alpha + \vartheta)} \sin\varphi \\
z &= \sin(\alpha \pm \beta)\sin\varphi \cdot u + \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha \pm \beta)\sin(\vartheta \pm \beta)}{\sin(\alpha + \vartheta)} \cos\varphi \\
& \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad \Phi(o, o) = 0
\end{aligned}
$$

bestimmt sind und welche ohne Gleiten rollen, wenn in obigen Formeln gleichzeitig mit allen obern Zeichen $\varphi = \varphi_1$, gleichzeitig mit allen untern $\varphi = \varphi_2$ gesetzt wird.

Die beiden allgemeinen Darstellungen (42) und (64) sollen zunächst auf zwei spezielle Beispiele angewendet werden.

1. Es sollen die beiden Axoide aufgestellt werden, welche mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit um ihre Axen rotieren und längs ihrer Axen periodische Translationsbewegungen ausführen, mit den Geschwindigkeiten:

$$v_1 = -e\cos\varphi_1 \cdot \omega_1, \quad v_2 = +e\cos\varphi_2 \cdot \omega_2,$$

wo e eine positive Konstante bedeutet.

Setzt man

$$\omega_1 = \omega,\ \omega_2 = -\omega, \text{ so ist } \varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = -\varphi,\ \alpha_1 = \beta,\ \alpha_2 = -\beta,$$
$$h_1 = -e\cos\varphi,\ h_2 = +e\cos\varphi.$$

Die Gleichungen (15) liefern zunächst:

$$r_1 = a + e \operatorname{tg}\beta\cos\varphi, \quad r_2 = -a + e\operatorname{tg}\beta\cos\varphi$$

und es ergeben sich demnach nach (42) als Gleichungen der gesuchten Axoide:

$$
\begin{aligned}
x &= \cos\beta \cdot u - e\sin\varphi \\
y &= \pm\sin\beta\cos\varphi \cdot u \mp (e\operatorname{tg}\beta\cos\varphi \pm a)\sin\varphi \\
z &= \quad \sin\beta\sin\varphi \cdot u + (e\operatorname{tg}\beta\cos\varphi \pm a)\cos\varphi,
\end{aligned}
$$

wo alle oberen Zeichen für die Fläche $\mathfrak{R}_1$, alle unteren für $\mathfrak{R}_2$ gelten.

Die beiden gesuchten Axoide sind demnach kongruente Rotationshyperboloide, deren Rotationsaxen im Abstande $e \operatorname{tg} \beta$ zu den Axen o_1 und o_2 respektive parallel laufen. Der Kehlkreis der Hyperboloide hat den Radius a, ihre Richtungskegel den halben Öffnungswinkel β.

Sollen beide Flächen die Axen o nicht schneiden, so muss

$$e \operatorname{tg} \beta < a$$

vorausgesetzt werden. Auf jeder Erzeugenden g liegt der Zentralpunkt im Abstande

$$u_1 = u_2 = \frac{e \sin \varphi}{\cos \beta}$$

d. h. aber in der Ebene $x = 0$. Die Striktionslinien beider Axoide werden also von ihren Kehlkreisen gebildet.

Die Flächen H_1 und H_2 haben die Gleichungen

$$x^2 = \frac{e^2 y^2}{y^2 + z^2}$$

sind also Regelflächen 4. Ordnung, welche das zugehörige Hyperboloid nach zwei Raumkurven 4. Ordnung erster Spezies durchsetzen, von denen die eine die Linien $u = 0$, die andere ihr Spiegelbild bezüglich der Axe o ist. Die orthogonalen Projektionen der Linien $u = 0$ auf die Kehlkreisebenen sind Pascalsche Schnecken, nämlich die Fusspunktkurven der Kehlkreise für den Punkt O_1 resp. O_2 als Pol.

Beide Axoide rollen aufeinander mit der relativen Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \omega_2 \cos \alpha_2 - \omega_1 \cos \alpha_1 = -2\omega \cos \beta$$

und gleiten längs einander mit der relativen Gleitgeschwindigkeit

$$V = (2a + h_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 - h_1 \operatorname{cotg} \alpha_1) \sin \alpha_1 \cdot \omega_1 = 2a\omega \cdot \sin \beta.$$

Es ist also V eine nicht verschwindende, von e unabhängige Konstante. Sie bleibt also die nämliche, falls beide Hyperboloide parallel verschoben werden, bis ihre Drehaxen resp. mit den Axen o_1 und o_2 zusammenfallen. Mit $e = 0$ verschwinden aber auch die Translationsgeschwindigkeiten v_1 und v_2, so dass dann die Hyperboloide um die Axen o_1 und o_2 nicht mehr geschraubt, sondern nur noch gedreht werden müssen.

Das Gleichungssystem (64) soll durch folgende Aufgabe illustriert werden:

2. Für zwei zu einander rechtwinkelige Axen o_1 und o_2 sollen diejenigen Axoide für reines Rollen ermittelt werden,

für welche die Linien $u = 0$ orthogonale Trajektorien ihrer Erzeugenden sind und welche sich in entgegengesetztem Sinne derart drehen, dass das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten, absolut genommen, stets durch die Gleichung

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin \varkappa \varphi_1}{\sin \varkappa \varphi_2}$$

bestimmt wird.

Ermitteln wir zunächst die Gleichungen der sphärischen Rollkurven auf der Einheitskugel, welche durch ihre Verbindung mit dem Kugelmittelpunkt die Richtungskegel ergeben.

Aus der Beziehung zwischen den Winkelgeschwindigkeiten folgt zunächst die Gleichung:

$$\Phi(\varphi_1 \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa \varphi_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa \varphi_2}{2}\right)} + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right) = 0,$$

wo δ eine beliebige Konstante bedeutet. Sollen ω_1 und ω_2 entgegengesetztes Zeichen erhalten, so muss

$$0 < \delta < \frac{\pi}{4}$$

genommen werden; dem Winkel $\varphi_1 = 0$ entspricht der Winkel $\varphi_2 = 0$. Da ferner: $2\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ist, so folgt

$$\sin \alpha_1 = + \cos \alpha_2, \; \sin \alpha_2 = - \cos \alpha_1$$

also

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = - \operatorname{tg} \alpha_1 = + \frac{\sin \varkappa \varphi_2}{\sin \varkappa \varphi_1}; \; \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \operatorname{tg} \alpha_2 = + \frac{\sin \varkappa \varphi_1}{\sin \varkappa \varphi_2}.$$

Fasst man diese Gleichungen zusammen mit der Gleichung $\Phi = 0$, so erhält man als Gleichungen der sphärischen Rollkurven:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\cos 2\delta}{1 - \sin 2\delta \cos \varkappa \varphi_1}; \; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{- \cos 2\delta}{1 + \sin 2\delta \cos \varkappa \varphi_2},$$

wodurch zunächst die Richtungskegel der gesuchten Axoide bestimmt sind. Da im weiteren die Linien $u = 0$ orthogonale Trajektorien sein sollen, so besteht zwischen α und ϑ die Gleichung:

$$F(\alpha, \vartheta) = \vartheta - \alpha - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Somit wird

$$\vartheta_1 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}, \; \vartheta_2 = \alpha_2 + \frac{\pi}{2}, \; \ddot{\varrho} = a \frac{\cos(\vartheta - \alpha)}{\sin(\vartheta + \alpha)} = 0,$$

d. h.

$$r_1 = + a, \; r_2 = - a, \; h_1 = - r_1 \operatorname{cotg} \vartheta_1 = a \operatorname{tg} \alpha_1, \; h_2 = - r_2 \operatorname{cotg} \vartheta_2 = - a \operatorname{tg} \alpha_2.$$

Demnach haben die verlangten Axoide die Gleichungen

$$x = \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) u + \frac{2a}{\varkappa} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \delta\right) \operatorname{tg} \frac{\varkappa\varphi}{2}\right)$$

$$y = \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) \cos\varphi\, u \mp a \sin\varphi$$

$$z = \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) \sin\varphi\, u \pm a \cos\varphi$$

$$\operatorname{tg}\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pm \cos 2\delta}{1 \mp \sin 2\delta \cos\varkappa\varphi}; \quad \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa\varphi_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\varkappa\varphi_2}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\pi}{4}\right).$$

Für alle oberen Zeichen ist $\varphi = \varphi_1$, für alle unteren $\varphi = \varphi_2$ zu setzen. Die Linien $u = 0$ liegen demnach für beide Axoide auf einem Rotationscylinder vom Radius a. Werden beide Cylinder längs derjenigen Erzeugenden aufgeschnitten, welche die Axe z_1 resp. z_2 in G schneiden, so haben die Abwickelungen der Linien $u = 0$ resp. die Gleichungen:

$$x = \frac{2a}{\varkappa} \operatorname{arctg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} \mp \delta\right) \operatorname{tg} \frac{\varkappa\varphi}{2}\right), \quad z = a\varphi,$$

sind also kongruente Kurven in Deckung. Werden sie mit dem Mantel auf die Cylinder aufgewickelt, so sind die Erzeugenden der beiden Axoide diejenigen Normalen dieser Aufwickelungen, welche die Cylinder berühren.

Die Axenfläche G degeneriert in eine Doppelebene, welche im Mittelpunkt M von $O_1 O_2$ zu dieser Strecke normal steht. In dieser Ebene erfüllen die Linienpaare gg' am Punkte M eine Rechtwinkelinvolution. Würden die Linien g mit den Linien g' vertauscht, so würden zwei Axoide entstehen, für welche das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten absolut das nämliche bleibt; beide Flächen werden sich aber jetzt im gleichen Sinne drehen.

Aus den Werten von ϑ_1 und ϑ_2 folgt ohne weiteres:

$$\frac{\cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}, \text{ d. h. } \frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Die Bewegung beider Axoide findet also derart statt, dass sich in jedem Augenblicke die Translationsgeschwindigkeiten längs der Axen umgekehrt verhalten, wie die Rotationsgeschwindigkeiten um die Axen.

Für $\varkappa = 1$ werden die Richtungskegel speziell kongruente Kegel zweiten Grades, welche sich um homologe Fokalstrahlen drehen. Figur 7 Taf. III zeigt die Aufrisse der beiden Axoide R_1 und R_2; Figur 7a die Abwickelung der Linien $u = 0$, die Figur 7b die korrespondierenden

12 Erzeugenden des Richtungskegels K_1 nach Richtung und Länge so bemessen, dass beide Flächen durch zwei Linien $u =$ konst. begrenzt sind. Die mit gleichen Ziffern bezeichneten Erzeugenden beider Axoide gelangen bei der Bewegung einmal zur Deckung.

§ 4. Die Elementarflächen längs einer gemeinsamen Erzeugenden.

Zu weiteren allgemeinen Eigenschaften der Axoide gelangt man nun durch Betrachtung aller Axoide, welche durch eine bestimmte Erzeugende g der Axenfläche G hindurchgehen. Das unendlich schmale windschiefe Flächenelement jedes solchen Axoides wollen wir eine Elementarfläche[1]) nennen. Je nach der Wahl des Richtungskegels, oder genauer nach der Stellung der Tangentialebene längs der zu g parallelen Erzeugenden des Richtungskegels erhalten wir längs g eine einfache Mannigfaltigkeit von Elementarflächen.

Durch die Gerade g gehen nun zunächst zwei besondere Elementarflächen, welche den Flächen S_1 und G angehören. Für die letztere Fläche ist die Zentrale zugleich eine geradlinige Striktionslinie. Wächst r_1 zugleich mit α_1, und sieht ein Beschauer von irgend einem Punkte P von g nach dem Fusspunkt G hin, so dreht sich die Tangentialebene in negativem Sinne um g, falls ihr Berührungspunkt von G nach P hinwandert. Bezeichnet also g den Parameter der Axenfläche G längs ihrer Erzeugenden g, so ist zu setzen:

$$g = -\frac{dr_1}{d\alpha_1} = -\frac{r_1'}{\alpha_1'}. \tag{65}$$

Ist nun R irgend eine Elementarfläche, P ein Punkt von g im Abstande u von G, Γ der im positiven Sinne gemessene Winkel der Tangentialebene des Punktes u gegen die Fixebene, welche durch g und die Zentrale $O_1 O_2$ bestimmt sein soll, so ergeben sich nach den Gleichungen (52):

$$\operatorname{tg} \Gamma = \frac{w_1 \eta}{w_1 \zeta} = \frac{u + q\dfrac{\sin \alpha_1}{\alpha_1'}}{g - u\dfrac{\sin\alpha_1}{\alpha_1'}}. \tag{66}$$

Lässt man hierin u unendlich gross werden, so geht die Tangentialebene in die asymptotische Ebene über, und man erhält daher für den Winkel Γ' derselben:

$$\operatorname{tg} \Gamma' = -\frac{\alpha_1'}{\sin \alpha_1}.$$

Bedeutet demnach Θ den Winkel der Zentralebene von R gegen die genannte Fixebene, so ist:

1) Vergl. *Mannheim:* Géométrie Cinematique. II. Partie, page 270. Paris, 1894.

(67) $$\Theta = \Gamma - \frac{\pi}{2}, \text{ also } \operatorname{tg} \Theta = \frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1'}.$$

Daher ist jetzt:

(68) $$\operatorname{tg} \Gamma = \frac{u + q \operatorname{tg} \Theta}{g - u \operatorname{tg} \Theta}.$$

Für den Abstand des Zentralpunktes C vom Punkte G haben wir ferner nach Gleichung (46)

(69) $$u_1 = -\frac{\frac{r_1'}{\sin \alpha_1} + q \frac{\alpha_1'}{\sin \alpha_1}}{1 + \left(\frac{\alpha_1'}{\sin \alpha_1}\right)^2} = \frac{(g-q) \operatorname{tg} \Theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta} = \frac{g-q}{2} \sin 2\Theta.$$

Demnach liegen die Zentralpunkte aller Elementarflächen $\mathfrak{R}$ zwischen zwei festen Punkten G_0 im Abstande

(70) $$u_0 = \pm \frac{g-q}{2}$$

vom Punkte G.

Die Punkte G_0 sind demnach die Grenzpunkte[1]), der Punkt G ist der Mittelpunkt des Strahles g.

Zu jeder Zentralebene Θ gehört nur ein Zentralpunkt u_1; zu jedem Zentralpunkt u_1 gehören aber zwei Zentralebenen, welche durch die Gleichung (69) bestimmt sind, welcher wir die Form geben können:

(71) $$u_1 \operatorname{tg}^2 \Theta - (g - q) \operatorname{tg} \Theta + u_1 = 0.$$

Wählen wir speziell einen der Grenzpunkte als Zentralpunkt, setzen wir also:

$$u_1 = \pm \frac{g-q}{2},$$

so wird die Gleichung (71) ein vollständiges Quadrat

$$(\operatorname{tg} \Theta \mp 1)^2 = 0.$$

In den Grenzpunkten fallen also die beiden Zentralebenen je zusammen und bilden mit der Fixebene die Winkel

(72) $$\Theta_0 = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Sie stehen also auf einander normal und sind den Grenzpunkten u_0 nach (69) in der Weise zugeordnet, dass die Werte sich entsprechen:

$$u_0 = + \frac{g-q}{2}, \; \Theta_0 = + \frac{\pi}{4} \text{ und } u_0 = - \frac{g-q}{2}, \; \Theta_0 = - \frac{\pi}{4}.$$

Sind nun Θ' und Θ'' die Wurzeln der Gleichung (71), so ist:

---

1) Vergl. für das Folgende die grundlegende Arbeit von *Kummer*: Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Crelles Journal, Bd. 56.

$$\operatorname{tg}\Theta' \cdot \operatorname{tg}\Theta'' = +1; \quad \operatorname{tg}\Theta' + \operatorname{tg}\Theta'' = \frac{2u_0}{u_1}.$$

Bewegt sich daher der Zentralpunkt u_1 vom Mittelpunkt G aus gegen einen der Grenzpunkte G_0, so liegen stets seine beiden Zentralebenen zur Grenzebene dieses Punktes symmetrisch. Liegen also zwei Zentralpunkte symmetrisch zum Mittelpunkt, so stehen die beiden Zentralebenen des einen rechtwinkelig zu denen des anderen. Im Mittelpunkt G stehen beide Zentralebenen daher aufeinander senkrecht; sie sind die Tangentialebenen der beiden Flächen S und G und bilden das Rechtwinkelpaar der von sämtlichen Zentralebenenpaaren gebildeten quadratischen Ebeneninvolution.

Nach Gleichung (68) kann zu jedem Punkt u und seiner Tangentialebene Γ die Zentralebene der dadurch bestimmten Elementarfläche ermittelt werden, da

$$\operatorname{tg}\Theta = \frac{g \operatorname{tg}\Gamma - u}{q + u \operatorname{tg}\Gamma}.$$

Diese Gleichung wird für Θ unbestimmt, sobald gleichzeitig:

$$g \operatorname{tg}\Gamma - u = 0 \quad \text{und} \quad q + u \operatorname{tg}\Gamma = 0$$

ist, d. h. für

(73) $$u = u_2 = \pm\sqrt{-gq} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\Gamma = \operatorname{tg}\Theta_2 = \pm\sqrt{-\frac{q}{g}}.$$

Demnach giebt es auf jedem Strahl g zwei reelle oder imaginäre Punkte F im Abstande u_2 symmetrisch zum Mittelpunkt G, in welchen sich im Allgemeinen sämtliche Elementarflächen nach derselben Ebene berühren. Diese Ebenen sind bestimmt durch die Winkel $\pm\Theta_2$ und zwar gehört zum Punkt u_2 derjenige Winkel Θ_2, der durch eine der beiden Gleichungen

(74) $$\operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{u_2}{g} = -\frac{q}{u_2}$$

bestimmt wird. Die beiden Punkte F heissen die Brennpunkte, ihre zugehörigen gemeinsamen Berührungsebenen die Fokalebenen des Strahles g.

Aus den Gleichungen (70) und (73) resp. (72) und (73) folgt aber:

$$u_0^2 - u_2^2 = \left(\frac{g+q}{2}\right)^2$$

$$\operatorname{tg}^2\Theta_2 = -\frac{q}{g}\operatorname{tg}^2\Theta_0,$$

d. h. die beiden Brennpunkte liegen stets innerhalb der beiden Grenzpunkte, die beiden Fokalebenen aber nur inner-

halb der beiden Grenzebenen, falls q dem absoluten Werte nach kleiner ist als g.

Da ferner

$$\sin 2\Theta_2 = \frac{2 \operatorname{tg} \Theta_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta_2} = \frac{\sqrt{-gq}}{\frac{g-q}{2}} = \frac{u_2}{u_0},$$

so ist

$$2u_2 = 2u_0 \sin(2\Theta_2),$$

d. h. der Abstand der beiden Brennpunkte ist gleich dem Abstand der beiden Grenzpunkte, multipliziert mit dem Sinus des von den Fokalebenen gebildeten Winkels.

Wählt man jetzt einen Brennpunkt als Zentralpunkt, so müssen ihm zwei Zentralebenen entsprechen. Die beiden Werte von Θ ergeben sich aus Gleichung (71), welche sich in die Form bringen lässt:

$$(u_1 \operatorname{tg} \Theta - g)(u_1 \operatorname{tg} \Theta + q) + u_1^2 + gq = 0.$$

Fällt aber der Zentralpunkt u_1 mit einem Brennpunkt u_2 zusammen, so ist

$$u_1^2 + gq = 0$$

und die Gleichung wird demnach:

(75) $$(u_2 \operatorname{tg} \Theta - g)(u_2 \operatorname{tg} \Theta + q) = 0.$$

Sind also Θ' und Θ'' die Wurzeln dieser Gleichung, so ist

(76) $$\operatorname{tg} \Theta' = -\frac{q}{u_2} = \operatorname{tg} \Theta_2 \text{ und}$$
$$\operatorname{tg} \Theta'' = \frac{g}{u_2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_2\right).$$

Fällt demnach der Zentralpunkt in einen Brennpunkt, so fällt die eine Zentralebene mit seiner Fokalebene zusammen, indessen die andere auf der Fokalebene des anderen Brennpunktes normal steht.

Nach Gleichung (48) ergab sich ferner für den Parameter Q der Elementarfläche

$$Q = \frac{q - \frac{\alpha_1'}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{r_1'}{\sin \alpha_1}}{1 + \left(\frac{\alpha_1'}{\sin \alpha_1}\right)^2} = \frac{q + g \operatorname{cotg}^2 \Theta}{1 + \operatorname{cotg}^2 \Theta} = \frac{g + q \operatorname{tg}^2 \Theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \Theta}.$$

Betrachten wir also speziell diejenigen beiden Elementarflächen, deren Zentralpunkte in einem Brennpunkt vereinigt liegen, so wird

$$\text{für } \operatorname{tg} \Theta' = -\frac{q}{u_2} \text{ der Parameter } Q' = g + q,$$

$$\text{für } \operatorname{tg} \Theta'' = +\frac{g}{u_2} \text{ der Parameter } Q'' = 0.$$

Von den beiden Elementarflächen, deren Zentralpunkt in einem Brennpunkt liegt, ist daher diejenige windschief, deren Zentralebene die Fokalebene des Brennpunktes ist, während diejenige, deren Tangentialebene die Fokalebene des anderen Brennpunktes ist, developpabel ist.

Will man den Parameter Q statt durch den Winkel Θ der Zentralebene durch den Abstand u_1 ihres Zentralpunktes ausdrücken, so folgt aus den Gleichungen:

$$Q = q \sin^2 \Theta + g \cos^2 \Theta = \frac{g+q}{2} + \frac{g-q}{2} \cos 2\Theta,$$

oder

$$Q - \frac{g+q}{2} = \frac{g-q}{2} \cos 2\Theta$$

und

$$u_1 = \frac{g-q}{2} \sin 2\Theta$$

durch Elimination des Winkels Θ:

(79) $$\left(Q - \frac{g+q}{2}\right)^2 + u_1^2 = \left(\frac{g-q}{2}\right)^2.$$

Es ist demnach

$$Q' + Q'' = g + q; \quad Q' \cdot Q'' = (u_1 - u_2)(u_1 + u_2), \qquad \text{d. h.:}$$

Die Summe der Parameter zweier Elementarflächen vom nämlichen Zentralpunkt ist konstant, und das Produkt der Parameter ist gleich dem Produkt der Entfernungen des Zentralpunktes von den beiden Brennpunkten.

Die Gleichung (79) kann überdies benutzt werden zu einer einfachen geometrischen Übersicht über den Zusammenhang der drei Grössen u_1, Θ und Q. Betrachtet man nämlich u_1 und Q als rechtwinkelige Koordinaten eines Punktes für die Gerade g als Axe der u_1 und für die Normale dazu im Mittelpunkt G als Axe der Q, so stellt die Gleichung (79) den Ort aller in dieser Weise aufgetragenen Parameterwerte Q dar. Dieser Ort ist daher ein Kreis vom Radius $r_0 = \frac{g-q}{2}$, dessen Mittelpunkt auf der Axe der Q im Abstande $m = \frac{g+q}{2}$ von G liegt, und welcher demnach durch die Brennpunkte F von g hindurch geht. Jede zu g normale Sehne AB des Kreises trifft g in einem Punkte C; dann sind $AC = Q'$ und $BC = Q''$ die dem Zentralpunkt C vom Abstand $GC = u_1$ zugehörigen Parameterwerte, indessen die von dem Endpunkte A_0 des zu g normalen Durchmessers A_0B_0 aus gemessenen Bogen A_0A und A_0B die Winkel Θ' und Θ' der Zentralebenen messen.

Ohne diese Darstellung weiter zu verfolgen, wollen wir dagegen noch zwei besondere Punkte auf der Geraden g betrachten. Es sind dies diejenigen Punkte u_3 und u_4, in welchen die Tangentialebene irgend einer Elementarfläche zur Fixebene normal steht resp. mit dieser identisch ist. Die Gleichung (68) zeigt nun, dass

$$(80)\qquad \begin{array}{l} \Gamma = \frac{\pi}{2} \text{ wird für } g - u_3 \operatorname{tg} \Theta = 0, \text{ also für } u_3 = g \operatorname{cotg} \Theta \quad \text{und} \\ \Gamma = 0 \text{ wird für } u_4 + q \operatorname{tg} \Theta = 0, \text{ also für } u_4 = -q \operatorname{tg} \Theta. \end{array}$$

Da somit

$$u_3 \cdot u_4 = -gq = u_2^2$$

ist, so folgt, dass diese Punktepaare für alle Elementarflächen eine quadratische Punktinvolution erfüllen, welche die Brennpunkte F zu Doppelpunkten hat.

Sucht man demnach für jede Erzeugende g eines Axoides den Punkt u_3, so ist in jedem dieser Punkte die Tangentialebene des Axoides der Axe o desselben parallel, d. h.:

Die orthogonale Projektion der Linie $u = u_3$ auf eine zur Axe o normale Ebene liefert die Linie des scheinbaren Umrisses der Projektion des Axoides auf diese Ebene.

Die Linie $u = u_4$ dagegen ist die Berührungslinie der dem Axoid **R** und seiner Windungsfläche **H** gemeinsam umgeschriebenen Developpabeln mit dem Axoid.

§ 5. Die auf einander abwickelbaren Axoide und ihre Beziehungen zu den einfachsten Axenflächen.

Im Folgenden seien Axoide für rein rollende Bewegung vorausgesetzt, so dass diese durch Angabe der Axenfläche **G** und ihrer Richtungskegel bestimmt sind. Es können dann entweder diese Richtungskegel oder die Axenfläche so gewählt werden, dass die Axoide in geometrischer oder kinematischer Hinsicht gewisse Eigenschaften besitzen, von denen die zunächst liegenden hervorgehoben werden mögen. Der Winkel 2β werde wie bis anhin als spitzer Winkel vorausgesetzt.

Zieht man auf der Axenfläche **G** eine willkürliche Linie, so wird diese das Axoid bei seiner Bewegung ebenfalls nach einer bestimmten Linie durchsetzen. Insbesondere entsprechen auf diese Weise den orthogonalen Trajektorien der Axenfläche die Linien $u =$ konst. des Axoides. Nun besteht jede Axenfläche aus zwei Mänteln, einem Mantel **A**, welcher alle Erzeugenden der Flächenpaare $S_1 S_2$ aufnimmt, und einem Mantel **T**, der alle Tangenten ihrer Striktionslinien enthält. Die Erzeugenden des

Mantels **A** bilden gegen die Axe x den Winkel α, diejenigen des Mantels **T** den Winkel ϑ. Beide Mäntel verlaufen entweder getrennt wie bei der orthogonalen Axenfläche, oder sie hängen zusammen wie bei den drei anderen Arten der betrachteten Axenflächen. Welcher der beiden Mäntel als Mantel **A** bezeichnet werden soll, kann durch Beschränkung der Werte von α bestimmt werden.

Denken wir uns also einen der beiden Mäntel der Axenfläche als Mantel A fixiert. Alsdann ist nach Gleichung (36)

$$\sin 2\beta \cdot \varrho = a \sin 2\alpha - h(\cos 2\alpha - \cos 2\beta).$$

Somit ergiebt sich für den Parameter g der Erzeugenden des Mantels A:

(81) $$g = -\frac{d\varrho}{d\alpha} = \frac{2a}{\sin 2\beta}\,\frac{\sin(\alpha - \vartheta)}{\sin(\alpha + \vartheta)} + \frac{(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)}{\sin 2\beta}\,\frac{dh}{d\alpha}.$$

Nach Gleichung (63) ist somit:

(82) $$g - q = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{\sin 2\beta} \cdot \frac{dh}{d\alpha}.$$

Ist also die Axenfläche **G** gegeben, so kann diese Differenz der beiden Parameter berechnet werden.

Auf jeder Axenfläche giebt es nun eine bestimmte Kurve

$$u = \pm \frac{g - q}{2},$$

welche der Ort der Grenzpunkte aller ihrer Erzeugenden ist, und daher die Grenzlinie der Axenfläche genannt werden kann. Diese Linie ist für jede Axenfläche reell und besteht für jeden Mantel aus zwei zur Doppellinie $O_1 O_2$ symmetrisch verlaufenden Zweigen, welche i. A. beide durch die Punkte O_1 und O_2 hindurchgehen. Jeder Linie

$$u = U,$$

wo U eine gegebene Funktion von α bedeutet, entspricht eine bestimmte Linie der Axoide $\mathbf{R}_1$ und $\mathbf{R}_2$. Soll diese Linie nun die Striktionslinie des Axoides $\mathbf{R}_1$ werden, so muss nach (67) und (69) die Gleichung bestehen:

$$U\left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1'}\right)^2 - (g - q)\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1'} + U = 0$$

oder

(83) $$U \sin^2 \alpha_1\, d\varphi_1^2 - (g - q)\sin \alpha_1 \cdot d\varphi_1\, d\alpha_1 + U d\alpha_1^2 = 0.$$

Diese Gleichung definiert im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Richtungskegel — eigentlich zwei Scharen von solchen, die aber aus einem unter ihnen durch Drehung desselben um die Axe o_1 hervor

gehen. Eine anologe Gleichung definiert die Richtungskegel des Axoides $\mathfrak{R}_2$. Die Richtungskegel sind reell, so lange die Linie

$$u = U$$

auf der Axenfläche zwischen den Grenzlinien verläuft, sie fallen zu einer Lösung zusammen, sobald die Linie mit einer der Grenzlinien selbst zusammenfällt. Daraus folgt:

Für jede gegebene Axenfläche giebt es im allgemeinen zwei reelle oder imaginäre Axoidenpaare, welche eine vorgeschriebene Striktionslinie besitzen, für welche also speziell die Striktionslinie eine der Linien $u =$ konst. ist.

Die Linie $u = 0$ macht aber eine Ausnahme. Die obige Gleichung (83) kann für $U = o$ nur bestehen, wenn dann gleichzeitig auch

$$g - q = 0, \text{ d. h. wenn nach (82) } h = \text{konst., also } \vartheta + \alpha = \text{konst.}$$

ist. Da in diesem Falle der Richtungskegel vollkommen willkürlich bleibt, so ergiebt sich folgender Satz:

Zu jedem gegebenen Axenpaar $o_1 o_2$ giebt es eine einfache Mannigfaltigkeit von Axenflächen, nämlich das durch das Axenpaar bestimmte Büschel Plückerscher Konoide Θ_4, aus welchen sämtlich für jedes Paar entsprechender Rollkegel nur solche Axoide entstehen, welche die Linie $u = 0$ zur Striktionslinie haben.

Eine zweite besondere, mit der Axenfläche zugleich bestimmte Linie auf derselben ist die Linie:

$$u = u_2 = \pm \sqrt{-gq},$$

welche der Ort der Brennpunkte aller Linien g oder die Fokallinie[1]) der Axenfläche ist.

Während der Bewegung des Axoides $\mathfrak{R}_1$ findet zwischen diesem und der Axenfläche Berührung in beiden Brennpunkten der augenblicklich gemeinsamen Erzeugenden g statt, wobei die Berührungspunkte ein Stück jedes Zweiges der Fokallinie durchlaufen. Soll die

---

1) Sie ist für die orthogonale Axenfläche eine reelle algebraische Raumkurve 6. Ordnung für denjenigen Mantel, welcher durch die Bedingung:

$$\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$$

bestimmt ist.

Für die harmonische Axenfläche ist sie rein imaginär; ebenso für die Plückerschen Konoide Θ_4, nämlich ihre Berührungskurve mit der dem imaginären Kugelkreis gemeinsam umschriebenen Developpabeln.

Für die Axenfläche aller developpablen Schraubenflächen fällt sie mit der Doppelgeraden der Axenfläche zusammen.

Berührung längs der Striktionslinie des Axoides stattfinden, so ist nach (74) und (78)

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{u_2}{g}, \text{ und } Q = g + q.$$

d. h.:

Für jede Axenfläche G giebt es i. A. zwei reelle oder imaginäre Axoide, deren Richtungskegel durch die Gleichung

(84) $$\sin^2 \alpha_1 \, d\varphi_1^2 + \frac{q}{g} \, d\alpha_1^2 = o$$

definiert sind, welche während der Bewegung die Axenfläche stets in einem Punkte ihrer Striktionslinien berühren.

Es kann aber noch in einer zweiten Art eintreten, dass die Striktionslinie des Axoids die Axenfläche nach ihrer Fokallinie durchschneidet, ohne dass in diesem Schnittpunkt Berührung stattfindet. Dies tritt ein, wenn nach (78)

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{g}{u_2} \text{ und } Q = 0$$

ist, d. h.:

Zu jeder Axenfläche giebt es i. A. zwei reelle oder imaginäre developpable Axoide, deren Richtungskegel durch die Gleichung

(85) $$\sin^2 \alpha_1 \, d\varphi_1^2 + \frac{g}{q} \, d\alpha_1^2 = 0$$

definiert sind, deren Rückkehrkurve die Axenfläche längs des einen Zweiges der Fokallinie durchschneidet, während der Berührungspunkt mit der Axenfläche den anderen Zweig der Fokallinie durchläuft.

In beiden Fällen hat der Parameter Q des Axoides einen besonderen Wert. Es kann der Wert von Q aber auch ein beliebig gegebener sein. Da allgemein nach (77)

$$\operatorname{tg}^2 \Theta = \frac{g - Q}{Q - q},$$

so ergiebt sich:

Zu jeder gegebenen Axenfläche gehören im allgemeinen zwei Axoide, deren Richtungskegel durch die Gleichung

(86) $$\sin^2 \alpha_1 \, d\varphi_1^2 + \frac{Q - g}{Q - q} \, d\alpha_1^2 = 0$$

bestimmt sind, welche einen gegebenen Parameter Q besitzen.

Sollen ferner die orthogonalen Trajektorien $u = \text{const.}$ der Axenfläche die orthogonalen Trajektorien der erzeugten Axoide hervorbringen, so muss das Linienelement des Axoides die Form annehmen:

$$ds^2 = du^2 + (A\,(u - u_1)^2 + Q^2)\, d\varphi^2$$

d. h. es muss nach (57) und (58)

$$D = 0 \text{ somit } \vartheta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

sein.

Die orthogonale Axenfläche ist also die einzige, welche für jedes Paar entsprechender Richtungskegel solche Axoide liefert, welche die Linien $u = \text{konst.}$ zu orthogonalen Trajektorien haben.

Ist speziell $2\beta = \frac{\pi}{2}$, so besteht die weitere Gleichung

$$\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \vartheta + \operatorname{cotg}^2 \beta = 0, \text{ d. h. nach (29) } \varrho = 0.$$

Sollen also für zwei zu einander rechtwinklige Axen die Linien $u = \text{konst.}$ orthogonale Trajektorien der Axoide sein, so liegt die Linie $u = 0$ für jedes Axoid auf dem Kreiscylinder vom Radius a und seine Erzeugenden sind diejenigen Normalen dieser Kurve $u = 0$, welche den genannten Cylinder berühren.

Die Linie $u = 0$ ist in diesem Falle die Linie des scheinbaren Umrisses für eine Parallelprojektion des Axoides in der Richtung einer Axe. Es fragt sich, ob noch für andere Axoide die Linie $u = 0$ mit der Linie $u = u_3$ zusammenfallen kann?

Soll $u_3 = g \operatorname{cotg} \Theta = 0$ sein, und zwar für jeden Wert von Θ, so muss $g = 0$ also $\varrho = \text{konst.}$ $Q = q \sin^2 \Theta$ sein; d. h.:

Ausser den Regelschraubenflächen bilden diejenigen Axoide, für welche die Linie $u = 0$ auf einem um die Axe beschriebenen Kreiscylinder liegt und für welche somit die Axenfläche in eine zur Zentrale normale Doppelebene übergeht, die einzigen Flächen, für welche die Projektion der Linie $u = 0$ der scheinbare Umriss ist.

Kann für ein Axoid die Linie des scheinbaren Umrisses mit der Striktionslinie zusammenfallen?

Nach den Gleichungen (69) und (80) ist:

$$\frac{u_1}{u_3} = \frac{g^2 - gq}{g^2 + u_3^2}.$$

Es ist daher

$$u_1 = u_3, \text{ falls } u_3^2 = -gq = u_2^2$$

ist. Somit wird entweder

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{g}{u_2}, \text{ also } Q = 0; \text{ oder } g = 0, \ \varrho = \text{konst. } Q = q.$$

Wenn also die Striktionslinie den scheinbaren Umriss

für eine Parallelprojektion in der Richtung seiner Axe bilden soll, so muss das Axoid developpabel oder eine Fläche S sein.

Kann die Linie $u = u_4$ mit der Linie $u = 0$ zusammenfallen?

Nach (80) muss in diesem Falle

$$u_4 = -q \operatorname{cotg} \Theta = 0$$

sein. Soll diese Gleichung für alle Werte von Θ bestehen, so muss

$$q = 0, \text{ also } \vartheta - \alpha = 0 \text{ sein, d. h.}$$

Die Axenfläche aller developpabeln Schraubenflächen führt stets auf solche Axoide, für welche die Linie $u = 0$, d. h. die Durchschnittslinie des Axoides R mit seiner Fläche H für diese beiden Flächen zugleich die Berührungslinie ihrer gemeinsamen umschriebenen Developpabeln ist.

In diesem Falle wird $Q = g \cos^2 \Theta$, $u_2 = 0$. Die Fokallinie der betrachteten Axenfläche fällt also mit ihrer Doppellinie zusammen; es müssen sich also in der That sämtliche Axoide im Punkte $u = 0$ ihrer gemeinschaftlichen Erzeugenden g berühren. Soll überdies $Q = 0$ sein, so muss $g = 0$, d. h. es müssen die Werte ϱ, α, ϑ konstant sein.

Die Axenfläche aller developpablen Schraubenflächen führt demnach auf nicht developpable Axoide, oder aber auf diese developpablen Schraubenflächen selbst.

Setzen wir jetzt andererseits:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega, \quad \frac{v_1}{v_2} = v,$$

so folgt aus der Gleichung (5):

$$\text{(87)} \qquad \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \omega \text{ oder } \frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\operatorname{cotg} \beta} = \frac{1 - \omega}{1 + \omega}.$$

Desgleichen ergiebt die Gleichung (25) die Beziehung:

$$\text{(88)} \qquad \frac{\cos(\vartheta + \beta)}{\cos(\vartheta - \beta)} = v \text{ oder } \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\operatorname{cotg} \beta} = \frac{1 - v}{1 + v}.$$

Eliminiert man aus den beiden letzteren Gleichungen und $F(\alpha, \vartheta) = 0$ die Winkel α und ϑ, so erhält man eine bestimmte Gleichung $G(\omega, v) = 0$ zwischen ω und v. Umgekehrt giebt jede Beziehung zwischen ω und v durch Elimination von ω und v Anlass zu einer Gleichung zwischen α und ϑ, d. h.

Im Falle der reinen Rollbewegung zweier Axoide ist die zugehörige Axenfläche G vollkommen bestimmt durch die gegebenen Verhältnisse der beiden Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten. Umgekehrt gehen aus jeder gegebenen

Axenfläche nur solche Axoide für reines Rollen hervor, für welche zwischen den Verhältnissen der Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten eine bestimmte Beziehung besteht.

Ist also durch die Richtungskegel der Axoide das Verhältnis ω festgelegt, so sind beide Axoide bestimmt, und es begründet sich jetzt zugleich, warum man im Falle reiner Rollbewegungen zweckmässig von der Axenfläche ausgeht.

Wenden wir zunächst die beiden Formeln (87) und (88) auf die früher betrachteten Axenflächen G an.

1. Für die orthogonale Axenfläche ist

$$\vartheta - \alpha = \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\vartheta + 1 = 0.$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\omega \cdot v - 1 = 0, \text{ d. h. } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{v_2}{v_1}. \tag{89}$$

Für alle aus der orthogonalen Axenfläche abgeleiteten Axoide verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten reziprok wie die Translationsgeschwindigkeiten und umgekehrt.

2. Für die harmonische Axenfläche ist

$$\operatorname{cotg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\vartheta - \operatorname{cotg}^2\beta = 0.$$

Durch Elimination von α und ϑ erhalten wir die Gleichung:

$$\omega \cdot v - \frac{1}{\cos 2\beta}(\omega - v) - 1 = 0$$

oder

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{v_1}{v_2} - \frac{1}{\cos 2\beta}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{v_1}{v_2}\right) - 1 = 0 \tag{90}$$

d. h.:

Für alle aus der harmonischen Axenfläche abgeleiteten Axoide besteht demnach bei schiefwinkligen Axen zwischen den beiden Verhältnissen der Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten eine bilineare Relation.

Die obige Gleichung (90) ändert sich nicht, wenn ω durch $-v$ und v durch $-\omega$ ersetzt wird, d. h.

Vertauscht man die Bedeutung der beiden Mäntel der harmonischen Axenfläche, so bleibt die bilineare Beziehung (90) der Verhältnisse ω und v bestehen.

Für $2\beta = \frac{\pi}{2}$ reduziert sich die Gleichung (90) auf:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{v_1}{v_2} = 0. \tag{91}$$

Für zwei zu einander rechtwinklige Axen entspringen

aus der harmonischen Axenfläche nur solche Axoide, für welche das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten direkt gleich ist dem Verhältnis der Translationsgeschwindigkeiten.

3. Für das Büschel der Plückerschen Konoide G_h ist im weiteren:

$$\vartheta + \alpha = 2\delta, \text{ also } \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\vartheta - 1 = \operatorname{cotg} 2\delta\,(\operatorname{cotg}\vartheta + \operatorname{cotg}\alpha).$$

Daraus folgt die Gleichung:

$$(92) \qquad \omega \cos(2\beta + 2\delta) + v \cos(2\beta - 2\delta) - \cos 2\delta\,(1 + v\omega) = o.$$

Für alle aus dem Plückerschen Konoid G_h abgeleiteten Axoide besteht zwischen dem Verhältnis der Winkel- und Translationsgeschwindigkeiten die obige bilineare Relation.

Setzt man speziell $\alpha + \vartheta = \frac{\pi}{2}$, so wird $h = -a \operatorname{cotg} 2\delta = 0$ und die Relation (92) wird

$$(93) \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{v_1}{v_2} = 0.$$

Für alle aus dem speziellen Plückerschen Konoid G_o abgeleiteten Axoide verhalten sich bei schiefen Axen die Winkelgeschwindigkeiten direkt wie die Translationsgeschwindigkeiten.

Nehmen wir überdies an, die Axen stehen aufeinander rechtwinklig, so wird das Plückersche Konoid G_o zugleich eine harmonische Axenfläche, d. h.:

Bei zwei zu einander rechtwinkligen Axen ist die harmonische Axenfläche die einzige Fläche G, aus welcher nur solche Axoide hervorgehen, welche die Linie $u = 0$ zur Striktionslinie haben und für welche die Gleichung

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{v_1}{v_2} = 0$$

besteht.

4. Für die Axenfläche aller developpablen Schraubenflächen ist

$$\vartheta - \alpha = 0, \text{ also } \operatorname{tg}\vartheta - \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Dies führt auf die Gleichung:

$$\omega \cdot v - \frac{1}{\cos 2\beta}(\omega + v) + 1 = 0,$$

d. h.:

Bei schiefwinkligen Axen führt die Axenfläche aller developpablen Schraubenflächen auf solche Axoide, für

welche die bilineare Beziehung mit vertauschbarem Entsprechen

$$(94)\qquad \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{v_1}{v_2}-\frac{1}{\cos 2\beta}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{v_1}{v_2}\right)+1=0$$

besteht.

Werden insbesondere die Axen zu einander rechtwinklig, so reduziert sich die Gleichung (94) auf die einfachere:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{v_1}{v_2}=0.$$

Ist umgekehrt diese Gleichung gegeben, so führt sie bei schiefwinkligen Axen auf eine Axenfläche G, welche durch die Gleichung

$$F(\alpha,\vartheta)=\sin(\alpha-\vartheta)+\cos 2\beta\sin(\alpha+\vartheta)=0$$

definiert ist. Sind also insbesondere die Axen zu einander normal, so wird diese Gleichung:

$$\vartheta-\alpha=0,$$

d. h.:

Bei zwei zu einander rechtwinkligen Axen ist die Axenfläche aller developpablen Schraubenflächen die einzige Fläche G, welche für jedes Paar entsprechender Rollkegel auf solche Axoide führt, bei welchen das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten entgegengesetzt gleich ist dem Verhältnis der Translationsgeschwindigkeiten.

§ 6. Axoide für besondere Bewegungen.

Wir wenden uns zum Schlusse noch vier speziellen Fällen zu, welche sich teils auf Spezialisierung der Axoide, teils auf die Beschränkung ihrer Bewegung beziehen.

I. Fall. Sämtliche Flächen S_1 enthalten den Punkt O_2.

Beschränken wir uns auch hier auf die aufeinander abwickelbaren Axoide, so ist:

$$r_1=2a,\ r_2=0,\ \vartheta=\beta,\ \vartheta_1=2\beta,\ \vartheta_2=0$$

also

$$(95)\qquad \begin{aligned} h_1&=-2a\operatorname{cotg}2\beta;\ h_2=-\frac{2a}{\sin 2\beta}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=-q\\ v_1&=-2a\operatorname{cotg}2\beta\cdot\omega_1;\ v_2=-\frac{2a}{\sin 2\beta}\omega_1. \end{aligned}$$

d. h.:

$$\frac{v_1}{v_2}=\cos 2\beta.$$

Sämtliche Schraubenflächenpaare S_1S_2 bilden demnach eine einfache Mannigfaltigkeit; alle Flächen S_1 berühren sich

nach der nämlichen Schraubenlinie $u = 0$, welche o_1 zur Axe hat und die Axe o_2 in O_2 berührt.

Die Flächen S_2 bilden jetzt ein System geschlossener scharfgängiger Regelschraubenflächen mit o_2 als gemeinsamer Axe, welche fortgesetzt auf der Schraubenlinie $u = 0$ rollt, wie man direkt aus dem Werte von v_2 ersehen kann.

Die Axenfläche G, welche dem Strahlenbüschel der Linien p am Scheitel O_2 entspricht, besteht aus der Doppelebene durch o_2, welche zu o_1 parallel ist. Demnach liegt für jedes Axoid R_1 die Linie $u = 0$ auf dem Rotationscylinder vom Radius $2a$. In Fig. 8, Taf. IV sind die Axen parallel zur Aufrissebene angenommen, wobei der Axenwinkel $2\beta = -60^0$ gewählt ist. Die Darstellung zeigt die Aufrisse zweier Flächen S_1 und S_2, wobei S_1 eine offene, S_2 eine geschlossene scharfgängige Regelschraubenfläche ist. Beide Axoide sind aufeinander abwickelbar, sie vollenden gleichzeitig eine volle Umdrehung, wobei entsprechende, d. h. mit gleichen Ziffern bezeichnete Geraden zur Deckung kommen. Die graphische Darstellung der Grössen r_1, r_2, α_1, α_2, ϑ_1, ϑ_2 mittelst der Linie p zeigt Fig. 8a.

Sind die Richtungskegel, d. h. α_1 und α_2 als bekannte Funktionen von φ_1 resp. φ_2 gegeben, so erhält man aus (95) als die Gleichungen entsprechender Axoide:

$$x_1 = \cos\alpha_1 u - 2a \operatorname{cotg} 2\beta \cdot \varphi_1 \qquad x_2 = \cos\alpha_2 u - \int_0^{\varphi_2} q\, d\varphi_2.$$

$$y_1 = \sin\alpha_1 \cos\varphi_1 u - 2a \sin\varphi_1 \qquad y_2 = \sin\alpha_2 \cos\varphi_2 u.$$

$$z_1 = \sin\alpha_1 \sin\varphi_1 u + 2a \cos\varphi_1 \qquad z_2 = \sin\alpha_2 \sin\varphi_2 u.$$

Stehen insbesondere die Axen o_1 und o_2 zu einander rechtwinklig, so dass $2\beta = \frac{\pi}{2}$ wird, so ist

$$h_1 = 0,\ v_1 = 0,\ h_1 = -2a\frac{\omega_1}{\omega_2},\ v_2 = -2a\omega_1.$$

Somit geht das System der Schraubenflächen S_1 über in ein Büschel von Rotationshyperboloiden, welche sich sämtlich im Kehlkreis $r_1 = 2a$ berühren. Je nachdem das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten positiv oder negativ ist, tritt die eine oder die andere Regelschar der Hyperboloide S_1 mit S_2 in Berührung.

II. Fall. Das Axoid R_1 soll eine reine Drehung um seine Axe ausführen.

Es ist also $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$, $h_1 = 0$, $v_1 = 0$.

Die Schraubenflächen S_1 gehen über in Rotationshyperboloide; im

ganzen existiert eine zweifache Mannigfaltigkeit von Flächenpaaren $S_1 S_2$. Dieselbe reduziert sich auf eine einfache, sobald die Bedingung des reinen Rollens:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\beta, \text{ d. h. } \vartheta = \frac{\pi}{2} - \beta$$

dazu tritt. Die Parametergleichung nimmt jetzt die Form an:

$$r_1 \omega_1 = \frac{r_1 \omega_2}{\cos 2\beta},$$

welche aussagt, dass der Kehlkreis des Hyperboloides S_1 auf der Striktionslinie der Schraubenfläche S_2 rollt, so dass diese Striktionslinien alle denselben Steigungswinkel $\frac{\pi}{2} - 2\beta$ erhalten.

Setzt man in die Gleichungen (64) die Werte

$$(96) \quad r_1 = \frac{2a}{\sin 2\beta} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}, \; r_2 = 2a \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg} 2\beta}, \; h_2 = -2a \operatorname{tg}(\alpha - \beta), \; h_1 = 0$$

ein, so erhält man die Gleichungen entsprechender Axoide.

Die Axenfläche G entsteht aus einem Büschel von Linien p, dessen Scheitel der Diametralpunkt P_2 des Punktes O_1 auf dem Konstruktionskreise K ist. Da sich die Normalebene zur Axe o_1 durch die Axe $O_1 O_2$ aussondert, so bleibt als Ort aller Erzeugenden g eine Regelfläche zweiten Grades, die wir am einfachsten auf das Koordinatensystem an O_2 beziehen. Aus dem Werte von r_2 folgt dann unmittelbar ihre Gleichung

$$(97) \qquad z_2 = \frac{2a}{\operatorname{tg} 2\beta} \frac{y_2}{x_2},$$

d. h.:

Die Axenfläche G ist dasjenige gleichseitige hyperbolische Paraboloid, welches O_2 zum Mittelpunkt, die Axe o_2 und die Zentrale $O_1 O_2$ zu geradlinigen Striktionslinien hat und überdies durch die Axe o_1 hindurchgeht.

Stehen insbesondere die Axen aufeinander rechtwinklig, so ist:

$$2\beta = \frac{\pi}{2}, \; \vartheta = \beta = \frac{\pi}{4}, \; r_1 = 2a, \; r_2 = 0, \; h_1 = 0, \; h_2 = -2a\frac{\omega_1}{\omega_2},$$

es tritt also die unter Fall I zuletzt betrachtete Besonderheit ein.

III. Fall. Beide Axoide sollen reine Drehungen ausführen. Es ist demnach zu setzen:

$$h_1 = h_2 = 0, \; \vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}, \; v_1 = v_2 = 0.$$

Die Bedingung für reines Rollen, nämlich:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2\beta$$

ist also nur dann möglich, falls $2\beta = 0$, d. h. wenn die Axen parallel und die Axoide Cylinderflächen sind. In der That ergiebt die Formel (16) für die relative Gleitgeschwindigkeit:

$$V = -2a \sin \alpha_1 \omega_1 = -2a \sin \alpha_2 \omega_2, \tag{98}$$

welche niemals verschwinden kann, denn für $\alpha_1 = 0$ ist ω_1 unendlich gross, und für $\alpha_2 = 0$ wird ω_2 unendlich grofs.

Im Falle reiner Drehungen beider Axoide kann demnach die Gleitgeschwindigkeit nicht beseitigt werden.

Die sämtlichen Linien p der Fig. 3, Taf. II gehen durch den Schnittpunkt der beiden Geraden $O_1 P_1$ und $O_2 P_2$, d. h. sie erfüllen ein Büschel zur Zentrale $O_1 O_2$ normaler Geraden. Die Axenfläche ist somit die Fläche $\mathfrak{G}_o$.

Bei reinen Drehungen beider Axoide giebt es demnach eine einfache Mannigfaltigkeit von Rotationshyperboloiden, deren gemeinschaftliche Berührungserzeugenden das durch die Axen o_1 und o_2 bestimmte Plückersche Konoid $\mathfrak{G}_o$ erfüllen.[1])

Sind also die Richtungskegel gegeben und setzt man:

$$r_1 = \frac{2a}{\sin 2\beta} \cos \alpha_2 \sin \alpha_1, \quad r_2 = \frac{2a}{\sin 2\beta} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2,$$

so stellen nach (42):

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \alpha_1 u & x_2 &= \cos \alpha_2 u \\ y_1 &= \sin \alpha_1 \cos \varphi_1 u - r_1 \sin \varphi_1 & y_2 &= \sin \alpha_2 \cos \varphi_2 u - r_2 \sin \varphi_2 \\ z_1 &= \sin \alpha_1 \sin \varphi_1 u + r_1 \cos \varphi_1 & z_2 &= \sin \alpha_2 \sin \varphi_2 u + r_2 \cos \varphi_2 \end{aligned}$$

die Gleichungen zweier entsprechender Axoide dar.

Aus der Parametergleichung

$$r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 - r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = o \text{ folgt } \varrho = a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}.$$

$$g = -\frac{2a}{\sin 2\beta} \cos 2\alpha; \quad q = -r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = -\frac{2a}{\sin 2\beta} (\cos 2\alpha - \cos 2\beta).$$

Somit ist

$$g - q = 2a \operatorname{cotg} 2\beta = \text{konst.}$$

Soll also die Linie $u = 0$ Striktionslinie der Axoide werden, so muss

$$g - q = 0, \text{ also } 2\beta = \frac{\pi}{2}$$

sein, d. h.:

---

1) Vergl.: F. Schilling: Über Hyperboloiden-Reibungsräder. Diese Zeitschrift 42. Jahrgang, S. 37.

Bei rechtwinkeligen Axen o_1 und o_2, und nur für solche, sind die durch O_1 und O_2 gelegten zu den Axen normalen Querschnitte die Striktionslinien aller Axoide, die aus der Axenfläche $\mathfrak{G}_0$ hervorgehen.

In diesem Falle berühren sich zwei entsprechende Hyperboloide nach beiden Erzeugenden g und g' der Axenfläche. Eine Berührung der Axoide von innen kann also niemals eintreten. Da aber jetzt

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\operatorname{cotg} \alpha_1$$

ist, so findet trotzdem sowohl Rotation in gleichem, wie in entgegengesetztem Sinne statt, je nachdem g dem einen oder anderen Mantel von $\mathfrak{G}_0$ angehört.

Die Gesamtheit der in Betracht kommenden Regelscharen aller Hyperboloide von der Axe o_1 bildet eine bestimmte Linienkongruenz.

Jedes Axoid $\mathfrak{R}_1$ ist daher geometrisch erklärt als die Gesamtheit aller Linien dieser Kongruenz, welche seinen gegebenen unendlich fernen Querschnitt treffen.

Dieser Erzeugung kann sofort eine kinematische gegenübergestellt werden: Dreht sich nämlich die Axenfläche $\mathfrak{G}_0$ einmal um die Axe o_1, so giebt es in jeder Lage der Axenfläche eine Erzeugende g derselben, welche den unendlich fernen Querschnitt trifft.

Während sich also die Axenfläche mit der Geschwindigkeit ω_1 um o_1 dreht, bewegt sich die Erzeugende längs der Doppellinie mit der Geschwindigkeit

$$w_{1r} = -g \cdot \alpha_1' \cdot \omega_1 \tag{99}$$

über die Axenfläche hin und beschreibt im ruhenden Raume das Axoid $\mathfrak{R}_1$.

Was endlich die graphische Darstellung der Axoide anbetrifft, so gestaltet sich diese im Falle reiner Drehungen sehr einfach.

Ist nämlich $\mathfrak{K}_1$ der gegebene Richtungskegel, so denken wir uns denselben um die Axe o_1 aus seiner festen Anfangslage in positivem Sinne um einen rechten Winkel gedreht. Durch irgend eine Erzeugende g_1 des Kegels und die Axe o_1 legen wir die Meridianebene $\mathfrak{M}$, welche mit der Axe z_1 den Winkel φ_1 einschliessen möge. In der Ebene $\mathfrak{M}$ denken wir jetzt den Konstruktionskreis K so angebracht, dass er durch den Punkt O_1 geht und dass sein Mittelpunkt M_0 auf einer durch O_1 gehenden Geraden liegt, welche mit der Axe o_1 den Axenwinkel 2β einschliesst.

Die Erzeugende g_1 des Kegels $\mathfrak{K}_1$ trifft den Kreis K in einem Punkte G_1; projiziert man diesen Punkt auf die durch O_1 gehende

Normalebene N_1 zu o_1, so erhält man den Endpunkt G des zum Winkel φ_1 gehörigen Radiusvektors r_1. Vollzieht nun die Meridianebene **M** eine volle Umdrehung, so durchläuft g_1 den Kegel K_1, der Kreis K aber beschreibt eine gewisse Ringfläche J_1.

Die Orthogonalprojektion der Durchdringungskurve des Kegels K_1 mit der Ringfläche J_1 auf die Ebene N_1 ist somit der Ort aller Punkte G, d. h. die Linie $u = 0$ des Axoides R_1.

Um das Axoid R_1 selbst zu erhalten, drehen wir den Kegel K_1 in seine Anfangslage zurück, und ziehen sodann durch die Punkte G der Linie $u = 0$ die Parallelen g zu den entsprechenden Erzeugenden g_1 des Kegels, so erfüllen diese das Axoid R_1. Analoges gilt für die Darstellung des entsprechenden Axoides R_2.

Die Figur 9 der Tafel IV zeigt die Ausführung in orthogonaler Parallelprojektion für den Fall, dass die Richtungskegel K_1 kongruente Kegel zweiten Grades sind, welche sich um homologe Fokalstrahlen o_1 und o_2 drehen und für den Axenwinkel $2\beta = 60^\circ$. Die Linie $u = 0$ der beiden kongruenten Axoide sind algebraische Kurven vierter Ordnung, die beiden Axoide selbst algebraische und congruente Regelflächen. Zur leichten Vorstellbarkeit derselben sind die Axoide durch zwei zur Linie $u = 0$ äquidistante Parallelschnitte Q_1 und Q_2 begrenzt worden. Infolge dieser Begrenzung erhalten die einzelnen Erzeugenden ungleiche Länge; die mit gleichen Ziffern bezeichneten Erzeugenden beider Axoide gelangen einmal zur Deckung; der Deutlichkeit halber ist der Aufriss des zweiten Axoides weggelassen und die Bestimmung des Radiusvectors r_1 nur für eine Linie g ausgeführt worden.

IV. Fall: Sämtliche Flächen S sind developpable Schraubenflächen. Da in diesem Falle

$$q = 0,\ \vartheta_1 - \alpha_1 = \vartheta_2 - \alpha_2 = 0$$

ist, so sind die Gleichungen (15) identisch erfüllt, d. h. r_1 und r_2 sind von der Richtung g ganz unabhängig und nur an die Bedingung (11) gebunden. Jede beliebige Gerade g, welche $O_1 O_2$ rechtwinkelig trifft, bestimmt also ein Paar sich längs g berührender developpabler Schraubenflächen S, deren Rückkehrkurven die durch g als Tangente bestimmten Schraubenlinien sind, welche sich im Punkte G berühren, und durch welche wir gleichzeitig die beiden Flächen S nach der einen Seite hin begrenzt denken wollen.

Trotz der Berührung der Rückkehrkurven in G rollen beide Flächen im allgemeinen mit Gleiten; denn V verschwindet nur dann, wenn die Bedingung (26) erfüllt ist, d. h. wenn g der Axenfläche (40) angehört.

Ist irgendwie eine einfache Mannigfaltigkeit von solchen Flächenpaaren S gegeben, so gehören zu jedem Paar von Rollkegeln zwei Axoide R_1 und R_2, welche aber im allgemeinen nicht developpabel sind. Der Parameter Q und der Zentralpunkt u_1 sind nämlich bestimmt durch die Werte:

$$Q = -\frac{r_1' \cdot \alpha_1'}{\sin^2 \alpha_1 + \alpha_1'^2} = g \cos^2 \Theta; \; u_1 = -\frac{r_1' \sin \alpha_1}{\sin^2 \alpha_1 + \alpha'^2} = \frac{g}{2} \sin 2\Theta,$$

wo g wieder der Parameter der durch die Mannigfaltigkeit bestimmten Axenfläche ist. Nach Gleichung (66) wird aber mit

$$q = 0, \; u = 0 \text{ auch } \Gamma = 0, \text{ sobald } g \neq 0 \text{ ist; d. h.:}$$

Sämtliche Axoide der betrachteten Art haben im allgemeinen die geometrische Eigentümlichkeit, die zugehörige Windungsfläche H nach der Linie $u = 0$ zu berühren.

In zwei Fällen werden indessen auch die Axoide R zu Developpabeln. Ist nämlich:

1) $\alpha_1 = \text{konst.}$, so wird $Q = 0, \; u_1 = -\frac{r_1'}{\sin \alpha_1}$.

Bedeutet also ϱ eine gegebene Funktion eines Argumentes, so können infolge der Gleichung:

$$\sin \alpha_1 \cdot \varphi_1 = \sin \alpha_2 \cdot \varphi_2$$

die Projektionen der Linien $u = 0$ auf die Ebene (yz) durch die Gleichungen:

$$r_1 = \varrho (\sin \alpha_1 \cdot \varphi_1) + a; \; r_2 = \varrho (\sin \alpha_2 \cdot \varphi_2) - a$$

gegeben werden. Im Raume selbst sind dann die Linien $u = 0$ dadurch bestimmt, dass sie auf den Windungsflächen H liegen, welche durch die Beziehungen:

$$(100) \qquad \frac{dx_1}{d\varphi_1} = h_1 = -r_1 \operatorname{cotg} \alpha_1; \; \frac{dx_2}{d\varphi_2} = h_2 = -r_2 \operatorname{cotg} \alpha_2$$

vollständig definiert sind.

Die beiden Axoide sind jetzt die diesen Windungsflächen längs der Linie $u = 0$ umschriebenen Developpabeln, deren Rückkehrkurve eine auf ihrem projizierenden Cylinder liegende Kurve konstanter Steigung ist.

2) Es wird ferner $Q = 0$, wenn $g = 0$, also $r_1 = \text{konst.}$, $u_1 = 0$ ist. Während im vorigen Fall die Axenfläche G eine durch die Zentrale $O_1 O_2$ gehende Ebene war, ist sie jetzt eine zu ihr normale Ebene. Sind r_1 und r_2 gegeben und die Richtungskegel vorgeschrieben, so sind auf diesen die Linien $u = 0$ bestimmt durch obige Gleichungen (100). Hierbei tritt der Ausnahmefall ein, dass das Axoid R die

Windungsfläche nicht im eigentlichen Sinne berührt, sondern nur insofern jetzt die auf einem Kreiscylinder liegende Linie $u=0$ die Rückkehrkurve des Axoides ist.

3) Wir erhalten endlich den äussersten Fall der Spezialisierung, wenn wir zu den vorigen noch die weitere Bedingung:

$$r_1 = 2a, \; r_2 = 0$$

hinzunehmen. Die Axenfläche ist jetzt die durch o_2 gehende Parallelebene zu o_1. Die Flächen $\mathbf{S}_2$ gehen über in ein Büschel konzentrischer Rotationskegel mit der gemeinsamen Spitze in O_2 und der gemeinsamen Axe o_2. Figur 10 Tafel IV zeigt ein derartiges Paar von Flächen S in Grund- und Aufriss für das besondere Verhältnis

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4},$$

so dass die mit gleichen Ziffern bezeichneten Erzeugenden beider Flächen einmal zur Deckung gelangen.

Jedes aus diesem Flächensystem S abgeleitete Axoid $\mathbf{R}_1$ ist developpabel und hat die Linie $u = 0$ zur Rückkehrkurve; jedes Axoid $\mathbf{R}_2$ ist mit seinem Richtungskegel identisch. Beide Flächen rollen stets mit Gleiten und zwar ist die relative Gleitgeschwindigkeit

$$V = -\frac{2a\,\omega_1}{\sin\alpha_1}.$$

In Zusammenfassung des Vorigen erhalten wir demnach folgendes Resultat:

Zu jeder Developpabeln $\mathbf{R}_1$, deren Rückkehrkurve eine beliebige durch O_2 gehende Linie des Kreiscylinders $r_1 = 2a$ ist, gehört als entsprechendes Axoid $\mathbf{R}_2$ diejenige Kegelfläche von der Spitze O_2, welche mit dem Richtungskegel der Developpabeln $\mathbf{R}_1$ ein Paar entsprechender Rollkegel bildet.

Über den Stoss freier Flüssigkeitsstrahlen.

Von Diplom. Ing. Prof. F. Wittenbauer in Graz.

Die Untersuchungen über den Stoss freier Flüssigkeitsstrahlen auf schiefstehende Platten mit unbegrenztem oder begrenztem Abfluss sind bis heute wenig gediehen; die Litteratur über diesen Gegenstand ist geradezu dürftig zu nennen, die mitgeteilten Resultate sind durchaus nicht übereinstimmend, die zu Grunde gelegten Annahmen oft nicht stichhaltig.

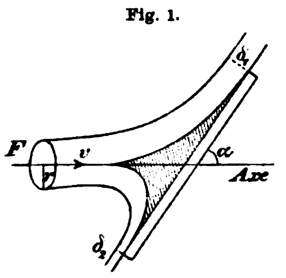
Die Ergründung der Gesetze des Wasserstosses ist jedoch insbesondere vom Standpunkte der technischen Anwendungen so notwendig, dass es sich wohl verlohnt, eine möglichst allgemeine, wenn auch immer noch angenäherte Untersuchung vorzunehmen.

Auf die Nichtübereinstimmung mit den jetzt gebräuchlichen Angaben soll gelegentlich hingewiesen werden.

I. Stoss auf schiefe Platte mit unbehindertem Abfluss.

1. Ein runder Flüssigkeitsstrahl vom Halbmesser r stosse mit der Geschwindigkeit v auf eine ebene Platte, welche mit der Richtung des Strahles (Stoss Axe) den Winkel α einschliesst (Fig. 1). Es stösst also in der Zeiteinheit die Flüssigkeitsmenge

Fig. 1.



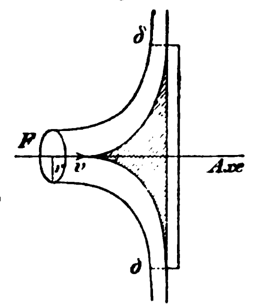
$$Q = F \cdot v = r^2 \pi \cdot v.$$

Die Flüssigkeit sei reibungslos vorausgesetzt; auf das Eigengewicht werde keine Rücksicht genommen. Nach der in der technischen Hydraulik üblichen, schon von Lagrange benützten Annahme bildet sich an der Platte ein konoïdischer Flüssigkeitskörper aus, an dessen glatter Oberfläche die nachströmende Flüssigkeit mit unveränderter Geschwindigkeit v abfliesst.

Es soll in einer besonderen Arbeit über die Form dieses konoïdischen Körpers gezeigt werden, wie sich die strenge Kirchhoff'sche Methode der Untersuchung einer Flüssigkeitsbewegung zu dieser Annahme eines ruhenden Zwischenkörpers stellt. Heute ist es noch nicht gut möglich, etwas Besseres an dessen Stelle zu setzen.

Wird von dem Eigengewichte abgesehen, so darf angenommen werden, dass bei normalem Stosse ($\alpha = 90^0$) die Flüssigkeit am Konoïde mit einer Stärke δ abfliesst, die für gleiche Entfernungen von der Stoss-Axe dieselbe ist (Fig. 2). Auf Grund dieser Annahme wird für den normalen Stoss die Gleichung entwickelt:

Fig. 2.

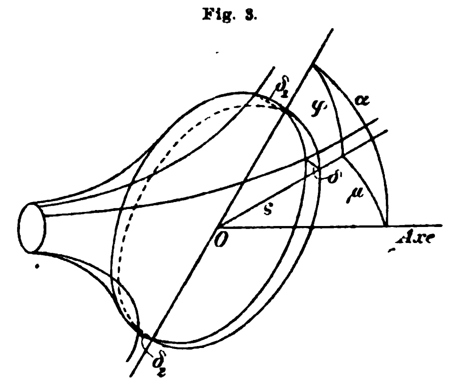


$$P = \frac{\gamma}{g} \cdot Qv,$$

worin γ das Einheitsgewicht der Flüssigkeit ist und $g = 9 \cdot 81^m$ $p. s.$ Dabei ist vorausgesetzt, dass die Platte hinreichend gross oder der sogenannte Randwinkel $= 90^0$ ist.

Bei schiefem Stosse ($\alpha < 90^0$) ist die Annahme, dass die Flüssigkeit am Konoïde in gleicher Stärke abfliesst, hinfällig. Hier ist die Stärke δ der Flüssigkeitsschicht offenbar eine Funktion des Winkels μ (Fig. 3), den der abfliessende Flüssigkeitsfaden mit der Stossrichtung bildet und überdies eine Funktion der Plattenstellung α.

Fig. 3.



Die Annahme einer unbegrenzt grossen Platte (Randwinkel $= 90^0$) und des allseits unbehinderten Abflusses soll vorläufig noch beibehalten werden.

Fig. 3 zeigt den zur Strömung normalen Querschnitt der abströmenden Flüssigkeit längs eines in der Platte liegenden Kreises, dessen Mittelpunkt O im Schnitte der Stossaxe mit der Platte liegt. Der Halbmesser ϱ dieses Kreises ist beliebig, soll aber gross gegen r vorausgesetzt werden. Da die Flüssigkeit nach allen Richtungen der Platte abfliesst, wenn auch in verschiedener Mächtigkeit, so darf angenommen werden, dass die einzelnen Fäden in der Richtung der Radien des Kreises ϱ abfliessen. Für die äussersten Grenzfäden ($\varphi = 0$ mit der Stärke δ_1, $\varphi = \pi$ mit der Stärke δ_2) ist diese Voraussetzung richtig; für die übrigen ist sie wahrscheinlich; ein etwaiges geringes Abweichen des abfliessenden Fadens von der Richtung des Halbmessers ϱ würde unsere Resultate nur wenig beeinflussen.

Die Lage des abfliessenden Fadens soll demnach durch den Winkel φ angegeben werden, welchen er mit der Neigungslinie der Platte bildet. Es ist

$$\cos \mu = \cos \alpha \cdot \cos \varphi.$$

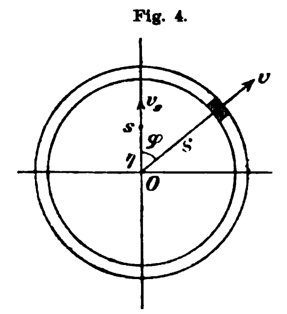
Wir zählen φ von 0 bis π und von 0 bis $-\pi$. Die Stärke δ des abfliessenden Flüssigkeitsfadens wird allgemein eine Funktion von ϱ, μ und α sein.

2. Der schiefe Stoss des Flüssigkeitsstrahles kann wohl am besten aus Betrachtungen über die Schwerpunktsbewegung abgeleitet werden. Nennen wir dM die im Zeitelemente dt zum Stosse kommende Flüssigkeitsmasse, so ist

$$dM = \frac{\gamma}{g} \cdot Fv \cdot dt = \frac{\gamma}{g} Q\, dt \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Dieselbe Masse strömt in derselben Zeit durch den oben erwähnten Flüssigkeitsquerschnitt längs des Kreises ϱ und bildet dort einen Ring (Fig. 4) von der Dicke $d\varrho = v\, dt$ und der veränderlichen Höhe δ; es ist also auch

Fig. 4.



$$dM = 2\frac{\gamma}{g} v\, dt \int_0^\pi \delta\varrho \cdot d\varphi,$$

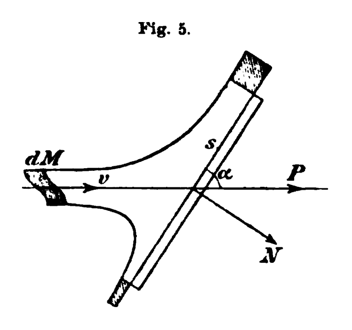
woraus mit Benützung von Gleichung 1)

$$F = r^2 \pi = 2\int_0^\pi \Delta \cdot d\varphi \quad \ldots \quad 2)$$

worin $$\Delta = \delta\varrho = F(\mu, \alpha) \quad \ldots \quad 3)$$

nur mehr eine Funktion von μ und α ist. Der Schwerpunkt s dieses Ringes liegt über O in der Neigungslinie der Platte; seine Geschwindigkeit sei v_s. Beachtet man nun, dass die Masse dieses Ringes eine gewisse Zeit vorher einen Teil dM des ausfliessenden Strahles gebildet hatte (Fig. 5) mit durchaus gleicher Geschwindigkeit v, so kann nach einem bei stationären Bewegungen üblichen Vorgange die Erscheinung auch so aufgefasst werden, wie wenn im Zeitelemente dt das Massenelement dM aus seiner Lage im ausfliessenden Strahle in jene des Ringes übergegangen wäre, während die zwischen diesen Lagen befindlichen Flüssigkeitskörper in Ruhe geblieben wären.

Fig. 5.



Nennt man P den in der Richtung der Strömung auf die Platte ausgeübten Druck, so ist nach dem Satze vom Antrieb, auf die Schwerpunktsbewegung des Massenelementes dM angewendet,

$$dM(v - v_s \cos \alpha) = P \cdot dt$$

oder $$P = \frac{dM}{dt}(v - v_s \cos\alpha) = \frac{\gamma}{g} Q (v - v_s \cos\alpha) \quad \ldots \quad 4)$$

Beachtet man ferner, dass in der Richtung der Platte gar keine Kraft auf die strömende Flüssigkeit ausgeübt wird, so muss nach dem Prinzipe der Bewegung des Schwerpunktes

$$dM (v_s - v \cos\alpha) = 0 \quad \ldots \quad 5)$$

oder $$v_s = v \cos\alpha \quad \ldots \quad 6)$$

sein, woraus Gleichung 4) übergeht in

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2\alpha \quad \ldots \quad 7)$$

Diese Gleichung für den Parallelstoss auf eine schiefe ebene Platte stimmt mit den Angaben von Grashof, Rühlmann und Scheffler überein. Hingegen findet Weisbach auf Grund einer ganz willkürlichen Überlegung

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \frac{2 \sin^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha},$$

welche Angabe auch in die „Hütte“ übergegangen ist. Andere Angaben sind:

Duchemin $$P = \frac{\gamma}{g} Q v \cdot \frac{2 \sin^3\alpha}{1 + \sin^2\alpha},$$

Broch $$P = \frac{\gamma}{g} Q v \cdot \operatorname{tg}\alpha \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

3. Der Normalstoss auf die Platte kann ebenfalls direkt aus der Schwerpunktsbewegung entnommen werden. Benützt man den Satz vom Antriebe für eine Richtung, die zur Platte senkrecht steht, so ist

$$dM (v \sin\alpha - v_s \cdot \cos 90^0) = N \cdot dt,$$

woraus

$$N = \frac{\gamma}{g} \cdot Q v \sin\alpha \quad \ldots \quad 8)$$

Diese Gleichung stimmt mit den Angaben von Grashof, Rühlmann und Resal überein.

4. Die Lage des Schwerpunktes s des Ringes, oder seine Entfernung η von O hängt von der veränderlichen Stärke δ des Ringes ab und zwar ist

$$\eta \cdot dM = 2 \int_0^\pi \varrho \cos\varphi \, dm,$$

worin das Massenelement des Ringes

$$dm = \frac{\gamma}{g} \Delta \, d\varphi \cdot v \, dt \quad \ldots \quad 9)$$

also nach 1)

$$F \cdot \eta = 2\varrho \int_0^\pi \Delta \cos\varphi \cdot d\varphi$$

und

$$F v_s = F \cdot \frac{d\eta}{dt} = 2v \int_0^\pi \Delta \cos\varphi \cdot d\varphi,$$

woraus nach Vergleich mit 6)

$$F \cos\alpha = 2 \int_0^\pi \Delta \cos\varphi \cdot d\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10)$$

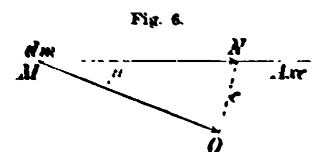
5. Der Parallelstoss eines freien Flüssigkeitsstrahles auf eine schiefe Platte kann noch von einem anderen Gesichtspunkte betrachtet werden, der für die Ermittelung der Stärke δ der abfliessenden Flüssigkeitsfäden von Bedeutung ist.

Gauss hat bei Aufstellung seines Prinzipes des kleinsten Zwanges den Zwang eines materiellen Punktes in folgender Weise definiert: Ist M ein bewegter materieller Punkt von der Masse dm, N seine Lage nach dem Zeitelemente dt bei freier Bewegung, Q seine Lage nach derselben Zeit bei gezwungener Bewegung, so ist

$$dm \cdot \overline{NQ}^2$$

der Zwang, der auf die Bewegung des Punktes ausgeübt wurde.

In ähnlicher Weise mag hier der Zwang definiert werden, den ein Flüssigkeitsteilchen dm durch die ablenkende Platte erleidet. Wäre das Massenteilchen in M frei, so würde es in der Zeiteinheit nach N gelangen, wenn $MN = v$ ist; durch die Platte wird die Bewegung um den Winkel μ abgelenkt (Fig. 6) und das Massenteilchen gelangt in der Zeiteinheit nach Q, wobei ebenfalls $MQ = v$ ist. Der Zwang, der auf das Teilchen dm ausgeübt wurde, kann gemessen werden durch



$$dm \cdot \overline{NQ}^2 = dm \cdot e^2$$

oder, da

$$e = 2\,MN \cdot \sin\frac{\mu}{2} = 2v \sin\frac{\mu}{2},$$

durch

$$2\,dm \cdot v^2 (1 - \cos\mu)$$

und nach Gleichung 9)

$$2v^3 (1 - \cos\mu) \int_0^\pi \Delta\, d\varphi\, dt.$$

Somit ist der Zwang des Massenteilchens in der Zeiteinheit

$$dZ = 2v^3 (1 - \cos\mu) \int_0^\pi \Delta\, d\varphi$$

und der Gesamtzwang der strömenden Flüssigkeit in der Zeiteinheit

$$Z = 4\frac{\gamma}{g}v^3\int_0^\pi (1 - \cos\mu)\cdot\Delta\, d\varphi.$$

Nun ist

$$\cos\mu = \cos\alpha\cdot\cos\varphi,$$

also

$$Z = 4\frac{\gamma}{g}v^3\left[\int_0^\pi \Delta\cdot d\varphi - \cos\alpha\int_0^\pi \Delta\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi\right]$$

und da nach den Gleichungen 2) und 10)

$$2)\quad . . . \quad F = 2\int_0^\pi \Delta\cdot d\varphi \text{ und } F\cos\alpha = 2\int_0^\pi \Delta\cos\varphi\cdot d\varphi \quad . . . \quad 10)$$

so folgt

$$Z = 2\frac{\gamma}{g}F v^3 \sin^2\alpha = 2\frac{\gamma}{g}Q v^2 \sin^2\alpha$$

und durch Vergleich mit 7)

$$Z = 2Pv \quad . . . . 11)$$

Nach dieser Auffassung ist der Zwang eine Arbeit in der Zeiteinheit, eine Leistung.

6. Von besonderer Wichtigkeit ist die Bestimmung der Stärke der abfliessenden Wasserfäden, oder da wir

$$\delta = \frac{1}{\varrho}F(\mu,\alpha) = \frac{\Delta}{\varrho}$$

gefunden haben, die Bestimmung der Funktion

$$\Delta = F(\mu,\alpha) \quad . . . . 3)$$

Diese Funktion muss derart ermittelt werden, dass sie auch die Grenzfälle $\alpha = 90^0$ und $\alpha = 0$ einschliesst.

Zunächst muss Δ den obenstehenden Gleichungen 2) und 10) genügen. Überdies hat Δ folgende aus der Natur des Gegenstandes zu entnehmende Bedingungen zu erfüllen:

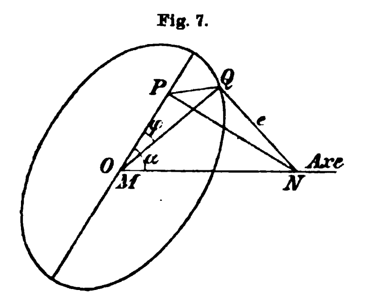
1. für $\alpha = 90^0$ muss $\Delta = \frac{r^2}{2}$ werden; denn bei normalem Stosse ist δ konstant und Gleichung 2) geht in $r^2\pi = 2\pi\Delta$ über;
2. eine Veränderung von α in $-\alpha$ darf Δ nicht verändern;
3. eine gleichzeitige Veränderung von α in $\pi - \alpha$ und von φ in $\pi - \varphi$ darf Δ nicht ändern;
4. $\frac{d\Delta}{d\varphi}$ muss Null sein für $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$, da im Gegenfalle die Flüssigkeit nach beiden Seiten der Neigungslinie der Platte mit scharfer Kante abfliessen müsste;

5) für $\alpha = 0$ muss $\Delta = 0$ sein für jeden Wert von φ, der von 0 verschieden ist;

6) für $\alpha = 0$ und $\varphi = 0$ muss $\Delta = \infty$ sein; dann fliesst nämlich die ganze Flüssigkeit in der Richtung der Neigungslinie ab und es ist: $\Delta \cdot d\varphi = F$.

Trotz dieser vielen Bedingungen giebt es sehr viele Funktionen, welche für Δ gewählt werden können. Um diese Willkür möglichst auszuschliessen, soll der früher besprochene, auf die stossende Flüssigkeit ausgeübte Zwang näher untersucht werden.

Fig. 7.



Dieser Zwang lässt sich vorteilhaft in folgender Weise darstellen. Wählt man als Halbmesser ϱ des Flüssigkeitsringes die Geschwindigkeit v, so ist wie früher der auf die Zeiteinheit bezogene Zwang eines Massenteilchens $dZ = \frac{dm}{dt} \cdot e^2$, worin (Fig. 7) wieder $NQ = e$ ist. Projiziert man N orthogonal auf die Neigungslinie der Platte nach P, so ist

$$e^2 = \overline{NP}^2 + \overline{PQ}^2$$

und

$$dZ = \frac{dm}{dt} \cdot \overline{NP}^2 + \frac{dm}{dt} \cdot \overline{PQ}^2 = dZ_1 + dZ_2.$$

Der erste Teil dZ_1 stellt den Zwang des Massenteilchens normal zur Platte, der zweite Teil dZ_2 jenen in der Richtung der Platte, hervorgerufen durch den Widerstand des Konoïdes, dar. Ebenso kann der Gesamtzwang aller Massenteilchen dargestellt werden durch $Z = Z_1 + Z_2$, worin

$$Z_1 = \int \frac{dm}{dt} \cdot \overline{NP}^2$$

den Zwang normal zur Platte,

$$Z_2 = \int \frac{dm}{dt} \cdot \overline{PQ}^2$$

den Zwang in Richtung der Platte darstellt. Da $NP = v \cdot \sin \alpha$ für alle Massenteilchen dieselbe Grösse besitzt, so ist

$$Z_1 = \overline{NP}^2 \int \frac{dm}{dt} = v^2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{dM}{dt}$$

und da nach Gleichung 1) $dM = \frac{\gamma}{g} Q \cdot dt$

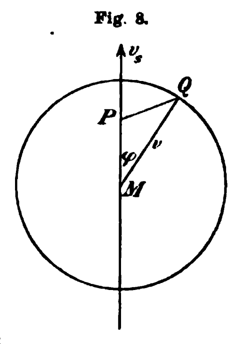
$$Z_1 = \frac{\gamma}{g} Q v^2 \sin^2 \alpha$$

und somit nach Gleichung 7) $Z_1 = Pv$.

Ferner ist nach Gleichung 11) $Z = 2Pv$,

somit ist
$$Z_1 = Z_2 = \frac{Z}{2}.$$

7. Während der Normalzwang
$$dZ_1 = \frac{dm}{dt} \cdot \overline{NP}^2 = \frac{dm}{dt} \cdot v^2 \sin^2 \alpha$$
sich nur mit dem Massenteilchen selbst ändert, ist der in Richtung der Platte ausgeübte Zwang
$$dZ_2 = \frac{dm}{dt} \cdot \overline{PQ}^2$$
auch von der veränderlichen Entfernung PQ abhängig. Es soll nun die (übrigens sehr wahrscheinliche) Hypothese eingeführt werden, dass die Flüssigkeit sich auf der Platte derart verteilt, dass der Zwang in der Richtung der Platte nach allen Seiten gleiche Grösse hat. Dann müsste dZ_2 von der Stellung des Massenteilchens d. h. vom Winkel φ völlig unabhängig sein. Nun ist nach Gleichung 9)
$$\frac{dm}{dt} = \frac{\gamma}{g} v \Delta d\varphi,$$
ferner aus Fig. 8:



$$\overline{PQ}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{MP}^2 - 2\overline{MQ} \cdot \overline{MP} \cdot \cos \varphi$$
und da $\quad MQ = v, \; MP = v \cos \alpha$
$$\overline{PQ}^2 = v^2 (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi).$$
Es wäre also
$$dZ_2 = \frac{\gamma}{g} v^3 \Delta (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi) \cdot d\varphi$$
und es müsste somit
$$\Delta (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi) = \Delta (1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \mu)$$
von φ unabhängig sein. Vergleicht man damit Gleichung 3), so folgt
$$\Delta = F(\mu, \alpha) = \frac{k}{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \mu},$$
worin k nur mehr eine Funktion von α ist, welche den oben angeführten Bedingungen zu entsprechen hätte.

Um diese Funktion zu ermitteln, benütze man eine der Gleichungen 2) oder 10); beide müssten, falls oben benützte Hypothese gleichen Zwanges richtig ist, für k denselben Ausdruck liefern.

Gleichung 2) geht über in:
$$\frac{F}{2} = \int_0^\pi \Delta \, d\varphi = k \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi} = \frac{k}{1 + \cos^2 \alpha} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - m \cos \varphi}$$

worin

$$m = \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}.$$

Nun ist

$$\int \frac{d\varphi}{1 - m \cos \varphi} = \frac{2}{\sqrt{1 - m^2}} \operatorname{arc\,tang} \left\{ \frac{1 + m}{\sqrt{1 - m^2}} \cdot \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \right\}$$

und

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - m \cos \varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - m^2}} = \pi \cdot \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha},$$

also

$$\frac{F}{2} = \frac{r^2 \pi}{2} = \frac{k \pi}{\sin^2 \alpha}$$

und

$$k = \frac{r^2}{2} \sin^2 \alpha.$$

Gleichung 10) geht über in:

$$\frac{F}{2} \cos \alpha = \int_0^\pi \Delta \cos \varphi \, d\varphi = \frac{k}{1 + \cos^2 \alpha} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{1 - m \cos \varphi}.$$

Nun ist

$$\int \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{1 - m \cos \varphi} = - \frac{\varphi}{m} + \frac{1}{m} \int \frac{d\varphi}{1 - m \cos \varphi}$$

und

$$\int_0^\pi \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{1 - m \cos \varphi} = \frac{\pi}{m} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - m^2}} - 1 \right] = \pi \frac{\cos \alpha \, (1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha},$$

also

$$\frac{F}{2} \cos \alpha = \frac{r^2 \pi}{2} \cos \alpha = \frac{k \pi \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

und für k folgt wieder der Wert:

$$\frac{r^2}{2} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Man erhält also für Δ folgende Beziehung:

$$\Delta = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 12)$$

Sie entspricht thatsächlich den sechs in Art. 6 aufgestellten Bedingungen, wie man sich überzeugen kann.

Damit ist auch die Stärke der abfliessenden Flüssigkeitsfäden:

$$\delta = \frac{\Delta}{\varrho} = \frac{r^2}{2 \varrho} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \varphi}$$

an jeder Stelle φ und für jede Neigung α der Platte bekannt.

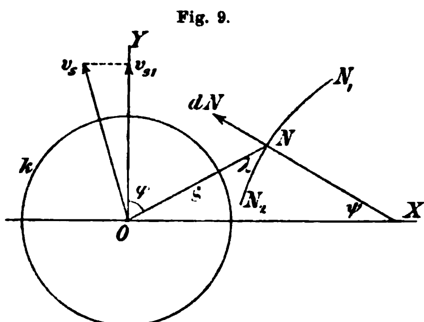
Für $\alpha = 90^0$ ist $\delta = \frac{r^2}{2 \varrho}$ an allen Stellen dasselbe. Den gleichen Wert $\frac{r^2}{2 \varrho}$ für δ erhält man aber auch, wenn man $\varphi = \pm \alpha$ setzt. Es

giebt also stets zwei Flüssigkeitsfäden, welche bei geneigter Platte (α) dieselbe Stärke beibehalten wie bei normal gerichteter Platte ($\alpha = 90$); sie fliessen zu beiden Seiten der Neigungslinie der Platte unter den Winkeln α gegen dieselbe ab.

II. Stoss auf schiefe Platte mit behindertem Abfluss.

8. Während bisher angenommen wurde, dass der auf die Platte stossende Strahl nach allen Seiten der Platte frei abfliessen kann, soll jetzt eine beliebige Bewegung des Abflusses vorausgesetzt werden.

Fig. 9.



Es sei wieder O der Schnitt der Axe des stossenden Strahles mit der Platte (Fig. 9), k der beliebige auf der Platte gezogene Kreis vom Halbmesser ϱ, an dessen Umfang wir die Stärke δ der Flüssigkeit messen, v_s die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Flüssigkeitsringes vom Halbmesser ϱ, die Masse dieses Ringes

$$dM = \frac{\gamma}{g} Q\, dt \qquad \text{1)}$$

Während v_s bisher in die Neigungslinie der Platte fiel, wird ihre Richtung jetzt durch das Hindernis $N_1 N_2$ beeinflusst und es ist für die Berechnung des Stosses nur mehr jener Teil v_{s1} von v_s massgebend der in die Neigungslinie der Platte fällt. Die Gleichung 4) wird demnach in folgender Form zu benützen sein:

$$P = \frac{\gamma}{g} Q\,(v - v_{s1} \cdot \cos\alpha) \qquad \text{13)}$$

Um v_{s1} zu finden, bemerke man, dass das unter dem Winkel φ abfliessende Massenteilchen

$$dm = \frac{\gamma}{g}\, \varrho\, d\varphi \cdot \delta \cdot v\, dt = \frac{\gamma}{g}\, \Delta\, d\varphi \cdot v\, dt$$

in N an die Begrenzung stösst und daselbst einen normalen Gegendruck dN hervorruft, der mit Anwendung von Gleichung 8)

$$dN = dm \cdot v \sin\lambda = \frac{\gamma}{g} \Delta\, v^2 \sin\lambda \cdot d\varphi\, dt.$$

Bezeichnet man mit ψ die Neigung der Normale in N gegen die zur Neigungslinie OY der Platte senkrechte Gerade OX, so ist

$$\lambda = \varphi - \psi.$$

Von diesem Normaldruck dN beeinflusst der zu OY parallele Teil $dN \cdot \sin\psi$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_{s1} in der Richtung der OY, derart, dass Gleichung 5) übergeht in

$$dM(v_{s_1} - v\cos\alpha) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dN \cdot \sin\psi,$$

worin $\varphi_1 \varphi_2$ die den Endpunkten $N_1 N_2$ der Begrenzung entsprechenden Werte von φ sind. Es wird also

$$dM\,(v_{s_1} - v\cos\alpha) = \frac{\gamma}{g} v^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta \sin\lambda \sin\psi \, d\varphi \, dt,$$

oder

$$Q\,(v_{s_1} - v\cos\alpha) = v^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta \sin\lambda \sin\psi \, d\varphi,$$

woraus in Verbindung mit 13):

$$P = \frac{\gamma}{g} Q\, v \sin^2\alpha - \frac{\gamma}{g} v^2 \cos\alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \Delta \sin\lambda \sin\psi \cdot d\varphi.$$

Setzt man wieder $Q = Fv = r^2\pi \cdot v$ und nach 12)

$$\Delta = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\varphi},$$

so wird:

$$P = \frac{\gamma}{g} Q\, v \sin^2\alpha \left[1 - \frac{m}{4\pi} \cdot J\right] \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

worin

$$J = \int_{\varphi}^{\varphi_2} \frac{\sin\lambda \cdot \sin\psi \cdot d\varphi}{1 - m\cos\varphi} \quad \text{und} \quad m = \frac{2\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha}.$$

9. Ist die Gleichung der Begrenzung der abfliessenden Flüssigkeit

$$F(r, \varphi) = 0$$

in Polarkoordinaten, so ist (Fig. 10)

Fig. 10.

$$\sin\lambda = \frac{r\,d\varphi}{ds}, \quad \cos\lambda = -\frac{dr}{ds}$$

$$\sin\psi = \sin(\varphi - \lambda)$$

$$= -\frac{1}{ds}(\sin\varphi \cdot dr + r\cos\varphi\, d\varphi).$$

$$\overline{ds}^2 = \overline{dr}^2 + r^2 \cdot \overline{d\varphi}^2$$

und somit

$$J = \int_{\varphi}^{\varphi_1} \frac{rr'\sin\varphi + r^2\cos\varphi}{(r^2 + r'^2)(1 - m\cos\varphi)} \, d\varphi \quad \ldots\ldots \quad 15)$$

worin $r' = \frac{dr}{d\varphi}$ bedeutet.

10. Ist die Neigung der Platte $\alpha = 90^0$, so wird $m = 0$ und nach Gleichung 14)

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2 \alpha,$$

also ganz unabhängig von der Art der Begrenzung. Bei normalem Stosse hat also die Begrenzung der abfliessenden Flüssigkeit keinerlei Einfluss auf die Grösse des Stosses.

Ist α nicht 90^0, so wird nach 14)

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2 \alpha (1 - K),$$

worin

$$K = \frac{m}{4\pi} J = \frac{\cos \alpha}{2\pi (1 + \cos^2 \alpha)} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \lambda \cdot \sin \psi}{1 - m \cos \varphi} d\varphi$$

die durch die Begrenzung hervorgerufene Verminderung des Stosses, bezogen auf die Einheit, bedeutet.

11. Es sollen nun für einige einfache Begrenzungsformen die Grössen der Verminderung K bestimmt werden. Die Begrenzung sei zunächst ein mit k (Fig. 9) konzentrischer Kreisbogen vom Halbmesser R. Dann ist $r = R$, $r' = 0$ und 15) geht über in

$$J = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\cos \varphi \, d\varphi}{1 - m \cos \varphi},$$

dann wird

$$K = \frac{m}{4\pi} J = \frac{1}{4\pi} \left[- \varphi + \frac{2}{\sqrt{1 - m^2}} \operatorname{arc\,tang} \left\{ \frac{1 + m}{\sqrt{1 - m^2}} \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} \right\} \right]_{\varphi_2}^{\varphi_1}.$$

Hierin sind

$$m = \frac{2 \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}, \quad \sqrt{1 - m^2} = \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}, \quad \frac{1 + m}{\sqrt{1 - m^2}} = \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Bezeichnet man den wiederholt vorkommenden Ausdruck

$$\frac{2 (1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{arc\,tang} \left\{ \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right\} = \mathsf{A},$$

so ist die Verminderung

$$K = \frac{1}{4\pi} \left[\varphi_2 - \varphi_1 + \mathsf{A}_1 - \mathsf{A}_2 \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

worin

$$\mathsf{A}_1 = \mathsf{A} \Big|_0^{\varphi_1} \quad \mathsf{A}_2 = \mathsf{A} \Big|_0^{\varphi_2}$$

bedeuten.

Ist $\varphi_2 = \pi$, so wird

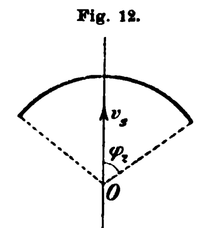
$$A_2 = \frac{\pi (1 + \cos^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha}$$

und

$$K = \frac{1}{4\pi}\left[\mathsf{A}_1 - \varphi_1 - 2\pi \operatorname{cotg}^2 \alpha\right].$$

Für eine Kreisbogenbegrenzung von nebenstehender Form (Fig. 11) wird also

Fig. 11.



$$K = \frac{1}{2\pi}\left[\mathsf{A}_1 - \varphi_1 - 2\pi \operatorname{cotg}^2 \alpha\right] \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

und für den Halbkreis $\left(\varphi_1 = \frac{\pi}{2}\right)$:

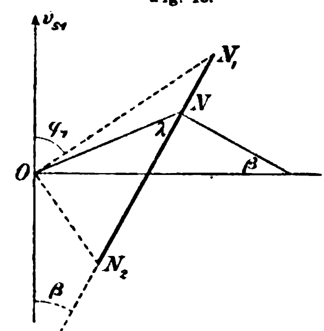
$$K = \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\pi \sin^2 \alpha} \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{4} - \operatorname{cotg}^2 \alpha \quad . \quad 18)$$

Ist $\varphi_1 = 0$, so wird $\mathsf{A}_1 = 0$ und Gleichung 16) geht über in

$$K = \frac{1}{4\pi}\left[\varphi_2 - \mathsf{A}_2\right]$$

und für eine Kreisbogenbegrenzung von nebenstehender Form (Fig. 12)

Fig. 12.



$$K = \frac{1}{2\pi}\left[\varphi_2 - \mathsf{A}_2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Für den Halbkreis $\left(\varphi_2 = \frac{\pi}{2}\right)$ wird hier

$$K = \frac{1}{4} - \frac{1 + \cos^2 \alpha}{\pi \sin^2 \alpha} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2}\right) \quad . \quad . \quad 20)$$

Ist das Hindernis ein vollständig geschlossener Kreis, so hat man die Gleichungen 18) und 20) zu addieren; man hat dann $K = - \operatorname{cotg}^2 \alpha$ und den Stoss

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2 \alpha \,(1 - K) = \frac{\gamma}{g} Q v.$$

Hier hat also die Stosskraft dieselbe Grösse wie bei normalem Stosse.

Fig. 13.

12. Die Begrenzung sei eine Gerade von der Neigung β gegen die Neigungslinie der Platte und von beliebiger Länge (Fig. 13).

Hier ist $\psi = \beta$, $\lambda = \varphi - \beta$

$$J = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \lambda \sin \psi}{1 - m \cos \varphi} \cdot d\varphi = \sin \beta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin(\varphi - \beta)}{1 - m \cos \varphi}\, d\varphi,$$

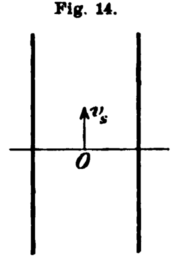
und die Verminderung des Stosses

$$K = \frac{m}{4\pi} \cdot J = \frac{\sin \beta}{4\pi}\left[\cos \beta \log \frac{1 - m \cos \varphi_2}{1 - m \cos \varphi_1} - \sin \beta \left\{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathsf{A}_2 - \mathsf{A}_1\right\}\right]$$

worin A die in Art. 11 gegebene Bedeutung hat.

Im besonderen ist für $\beta = 0$: $K = 0$. So ist also bei nebenstehender Begrenzung (Fig. 14)

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2 \alpha,$$



wie bei unbehindertem Abflusse.

Dieser Ausdruck für den Stoss bei zweiseitigem Abflusse innerhalb paralleler Geraden wurde von Weisbach auf anderem Wege gefunden.

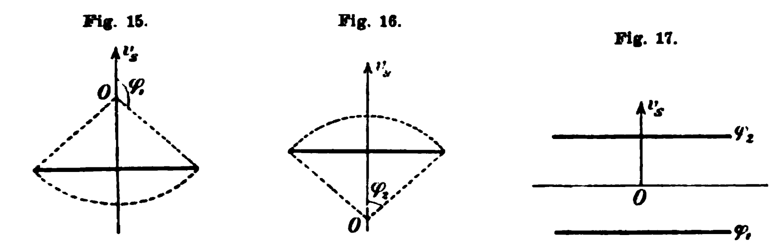
Für $\beta = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_2 = \pi$ wird

$$K = \frac{1}{4\pi}\left[A_1 - \varphi_1 - 2\pi \operatorname{cotg}^2 \alpha\right],$$

somit für eine gerade Begrenzung von untenstehender Anordnung (Fig. 15):

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[A_1 - \varphi_1 - 2\pi \operatorname{cotg}^2 \alpha\right].$$

Dieser Ausdruck stimmt mit Gleichung 17) überein; also haben die Gerade und die in Fig. 15 punktierte Kreislinie als Begrenzung der abfliessenden Flüssigkeit dieselbe Verminderung des Stosses zur Folge.



Für $\beta = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi_1 = 0$ wird $K = \frac{1}{4\pi}\left[\varphi_2 - A_2\right]$

und für obenstehende Anordnung (Fig. 16):

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[\varphi_2 - A_2\right],$$

übereinstimmend mit Gleichung 19). Auch hier also haben die Gerade und der in Fig. 16 punktierte Kreisbogen den gleichen Einfluss auf den Stoss.

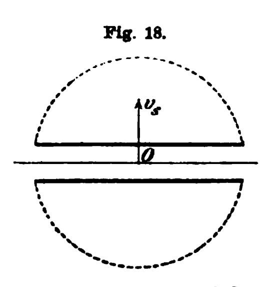
Addiert man die für Fig. 15 und 16 geltenden Werte von K, so erhält man für obenstehend (Fig. 17) gezeichnete Begrenzung die Verminderung

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[A_1 - A_2 - \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi \operatorname{cotg}^2 \alpha\right].$$

Sind die beiden parallelen Geraden hinreichend lang und ersetzt man dieselben nach der oben gemachten Bemerkung durch die punk-

tirten Kreisbögen (Fig. 18), so kann an Stelle der letzteren mit Annäherung ein Vollkreis gesetzt werden und es wird dann $K = -\operatorname{cotg}^2 \alpha$,

Fig. 18.



$P = \frac{\gamma}{g} Q v$, wie bei normalem Stosse.

Ist die Begrenzung ein Rechteck (Fig. 19), so ist K dasselbe wie für Fig. 17:

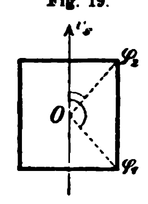
$$K = \frac{1}{2\pi}\left[A_1 - A_2 - \varphi_1 + \varphi_2 - 2\pi \operatorname{cotg}^2 \alpha\right].$$

Für eine geradlinige Begrenzung nach Fig. 20 wird

$$K = -\frac{\sin\beta}{2\pi}\left\{\cos\beta \cdot \log(1 - m\cos\varphi_1)\ (1 - m\cos\varphi_2) + \sin\beta\,(A_2 - A_1 + \varphi_1 - \varphi_2)\right\}.$$

13. Die Begrenzung sei parabolisch, O der Brennpunkt der Parabel (Fig. 21). Dann ist

Fig. 19.



$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi},\quad r' = -\frac{r^2}{p}\cdot\sin\varphi$$

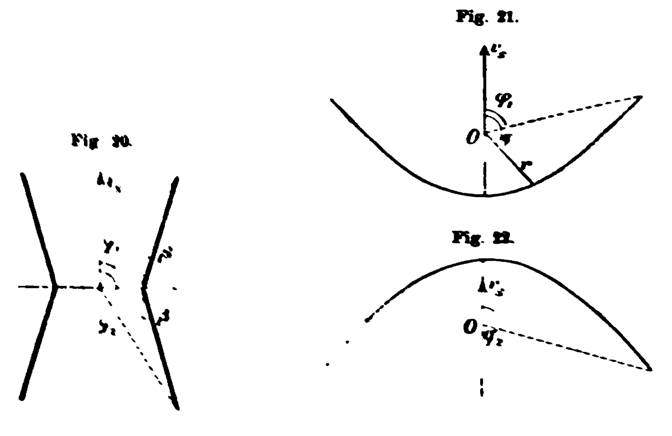
und nach Gleichung 15) für untenstehende Anordnung der Begrenzung

$$J = 2\int_{\pi}^{\varphi_1} \frac{r r' \sin\varphi + r^2\cos\varphi}{(r^2 + r'^2)\ (1 - m\cos\varphi)}\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{1 - \cos\varphi}{1 - m\cos\varphi}\, d\varphi,$$

woraus die Verminderung des Stosses

$$K = \frac{m}{4\pi} J = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(1-\cos\alpha)^2}{1+\cos^2\alpha} A_1 - \varphi_1 - 2\pi\operatorname{cotg}^2\alpha\left(1 - \frac{1}{\cos\alpha}\right)\right].$$

Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22.



Für entgegengesetzte Anordnung der parabolischen Begrenzung (Fig. 22) wird

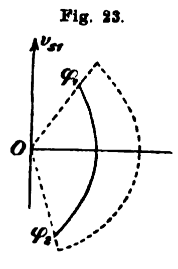
$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}, \quad r' = \frac{r^2}{p} \cdot \sin\varphi,$$

$$J = \int_{\varphi_2}^{0} \frac{1 + \cos\varphi}{1 - m\cos\varphi}\, d\varphi$$

und

$$K = \frac{1}{4\pi}\left[\varphi_2 - \frac{(1 + \cos\alpha)^2}{1 + \cos^2\alpha} \cdot A_2\right].$$

Für seitliche Stellung der Parabel (Fig. 23) ist



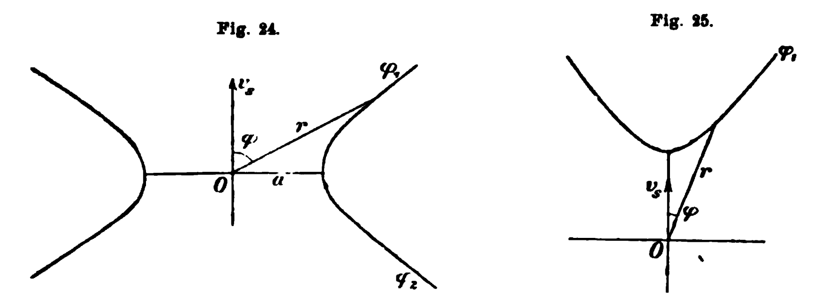
$$r = \frac{p}{1 + \sin\varphi}, \quad r' = -\frac{r^2}{p} \cdot \cos\varphi,$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1 - m\cos\varphi}$$

und

$$K = \frac{1}{8\pi}\left[\varphi_2 - \varphi_1 + A_1 - A_2\right].$$

Ein Vergleich mit Gleichung 16) lehrt, dass in diesem Falle die Verminderung des Stosses halb so gross ist als bei kreisförmiger Begrenzung innerhalb derselben Grenzwinkel (punktierte Linie).



14. Die Begrenzung sei eine gleichseitige Hyperbel (Fig. 24). Hier ist

$$r^2 = -\frac{a^2}{\cos 2\varphi}, \quad r r' = -\frac{a^2 \sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}$$

$$J = 2\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{r r' \sin\varphi + r^2\cos\varphi}{(r^2 + r'^2)(1 - m\cos\varphi)}\, d\varphi = 2\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\cos\varphi \cos 2\varphi}{1 - m\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Für $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ ist dann die Verminderung des Stosses

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[\left(A_1 - A_2\right)\left(\frac{2}{m^2} - 1\right) - \sin 2\varphi_1 - \frac{2}{m^2}\left(2\varphi_1 - \pi\right)\right], \qquad 21)$$

worin wie bisher

$$m = \frac{2\cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha}.$$

Für eine Begrenzung nach Fig. 25 ist

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}, \quad rr' = \frac{a^2 \sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi},$$

$$J = 2\int_{\varphi_1}^{0} \frac{\cos\varphi \cos 2\varphi}{1 - m\cos\varphi}\, d\varphi$$

und

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[-\mathsf{A}_1\left(\frac{2}{m^2} - 1\right) + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_1 + \frac{2}{m^2}\varphi_1 + \frac{2}{m}\sin\varphi_1\right].$$

Ebenso wird für die Anordnung nach Fig. 26

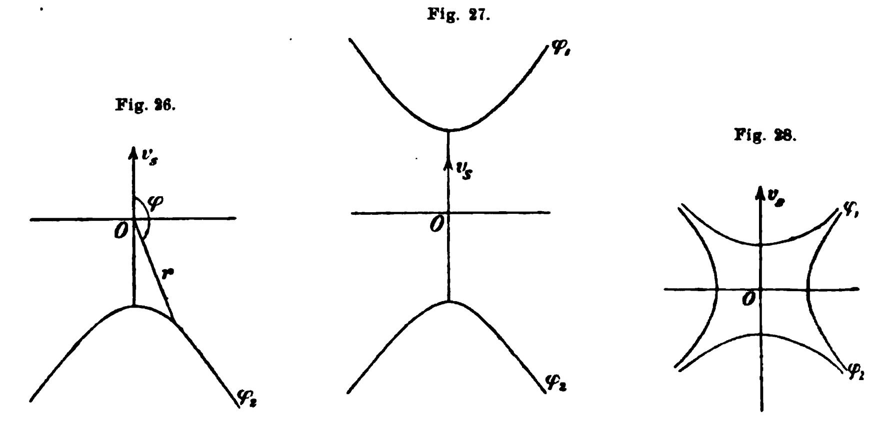
$$J = 2\int_{\pi}^{\varphi_2} \frac{\cos\varphi \cos 2\varphi}{1 - m\cos\varphi}\, d\varphi$$

und

$$K = \frac{1}{2\pi}\left[\mathsf{A}_2\left(\frac{2}{m^2} - 1\right) - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_2 - \frac{2}{m^2}\varphi_2 - \frac{2}{m}\sin\varphi_2 - \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}^2\alpha(1+\cos^2\alpha)\right].$$

Setzt man $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$ und addiert die für Fig. 25 und 26 geltenden Ausdrücke für K, so erhält man für eine Begrenzung nach Fig. 27

$$22)\quad K = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\mathsf{A}_2 - \mathsf{A}_1\right)\left(\frac{2}{m^2} - 1\right) + \sin 2\varphi_1 - \frac{2}{m^2}(\pi - 2\varphi_1) - \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}^2\alpha(1+\cos^2\alpha)\right].$$



Addiert man die Ausdrücke 21) und 22), so wird für die durch Fig. 28 dargestellte Begrenzung

$$K = -\tfrac{1}{4}\operatorname{cotg}^2\alpha\,(1 + \cos^2\alpha)$$

und der Stoss auf die so begrenzte Platte:

$$P = \frac{\gamma}{g} Q v \sin^2\alpha\,(1 - K) = \frac{\gamma}{g} Q v \left[\sin^2\alpha + \tfrac{1}{4}\cos^2\alpha\,(1 + \cos^2\alpha)\right].$$

Über einige Anwendungen der Kinematik veränderlicher Systeme auf Gelenkmechanismen.

Von P. Somoff in Warschau.

1. Es werde die Bewegung eines gesetzmässig-veränderlichen Systems durch n zu diesem Systeme gehörende Punkte bestimmt. Wir wollen diese Punkte die Grundpunkte des Systems nennen. Dieselben können entweder alle voneinander unabhängige Bewegungen ausführen, oder sind diese Bewegungen durch gewisse Bedingungen verbunden, wie z. B. beim festen Körper die Bedingung der Unveränderlichkeit der Entfernungen zwischen seinen drei Grundpunkten. In beiden Fällen können wir uns einen Gelenkmechanismus vorstellen, in welchem n Punkte im Stande sind, beliebige für die Grundpunkte des gegebenen veränderlichen Systems mögliche Bewegungen auszuführen, und noch ein neuer, $(n+1)$-ter Punkt sich so bewegt, als ob er demselben veränderlichen Systeme angehörte. Wir können sagen, dass ein solcher Mechanismus die Bewegung des gegebenenen veränderlichen Systems darstellt.

Es werden hier nur ebene veränderliche Systeme und dementsprechend solche Gelenkmechanismen betrachtet werden, deren sämtliche Glieder parallel einer und derselben Ebene sich bewegen können.

Solche Gelenksysteme können Anwendung auf verschiedene Bewegungstransformationen finden. Wir beschränken uns jetzt auf die Betrachtung solcher Mechanismen, welchen das ähnlich-veränderliche und das affin-veränderliche System zu Grunde liegt.

2. Es sind verschiedene Gelenksysteme bekannt, welche die Bewegung eines ähnlich-veränderlichen Systems darstellen. Wir erwähnen nur das einfachste derselben, welches unten mehrere Anwendungen finden wird: den verallgemeinerten Pantograph (Plagiograph) von Sylvester.[1]) Zwei ähnliche unveränderliche Dreiecke ABC und $A'B'C'$ (Fig. 1) sind in den Ecken B und A' durch eine Drehpaarung ver-

1) Nature, 1875, S. 168. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 562.

bunden und es ist durch die Seiten BC, $A'C'$ und zwei neue Glieder CD und $C'D$ ein gelenkiges Parallelogramm gebildet; dann bleibt das Dreieck $AB'D$ bei jeder Bewegung des Systems sich selbst ähnlich. Zwei von den Ecken dieses Dreiecks können als Grundpunkte des System betrachtet werden.

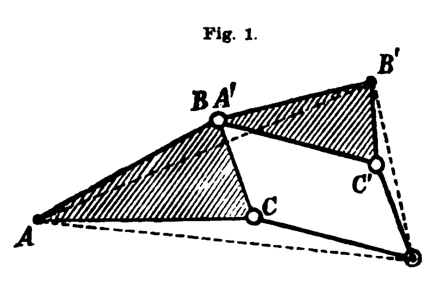


Fig. 1.

Wir wollen weiterhin dieses System, der Kürze wegen, das System A nennen.

3. Um einen Gelenkmechanismus zu bilden, welcher die Bewegung eines ebenen affin-veränderlichen Systems darstellt, muss man folgende Eigenschaften dieses Systems beachten: 1. seine Bewegung wird durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte bestimmt; 2. jede Gerade des Systems bleibt eine Gerade während der Bewegung desselben; 3. parallele Gerade bleiben immer parallel; 4. die Verhältnisse geradliniger paralleler Strecken bleiben bei jeder Deformation des Systems konstant; 5. insbesondere findet das letztere auch bei Strecken einer und derselben Geraden statt. Auf Grund der ersten drei von den genannten Eigenschaften erhalten wir zuerst eine spezielle Art des gesuchten Gelenksystems, wenn wir vier Punkte auf solche Weise miteinander verbinden, dass dieselben beständig die Ecken eines Parallelogramms bilden, im übrigen aber freie Bewegung behalten. Es sei $M_1 M_2 M M_3$ (Fig. 2) irgend ein Parallelogramm; durch einen im Innern desselben willkürlich angenommenen Punkt A ziehe man die den Seiten des Parallelogramms parallelen Geraden BC und DE und verbinde die Schnittpunkte B, C, D, E mit den Ecken und mit dem Punkte A durch starre Gelenke. Wenn man dann in allen 9 Punkten Drehpaarungen einführt, so bekommt man ein Gelenksystem (Fig. 3), in welchem die Punkte M_1, M_2, M_3, M der gestellten Forderung genügen.

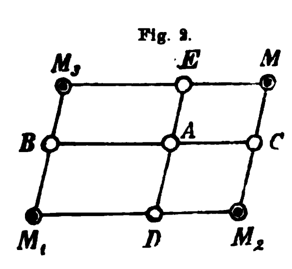


Fig. 2.

Wir werden weiterhin dieses Gelenksystem das System B nennen.

Um von diesem Systeme zu einem allgemeineren überzugehen, in welchem der vierte Punkt M des affin-veränderlichen Systems nicht in der Ecke des durch die drei Grundpunkte bestimmten Parallelogramms liegt, brauchen wir nur noch zwei pantographische Elemente hinzuzufügen. Wir bilden nämlich (Fig. 4) zuerst das Parallelogramm $M_1 M_2' M M_3'$, in welchem die Ecken M_2' und M_3' den Geraden $M_1 M_2$

und $M_1 M_3$ angehören und verbinden die Punkte M_1, M_2', M_3', M durch ein Gelenksystem B. Damit die Punkte M_2' und M_3' demselben affin-veränderlichen Systeme angehören, welches durch die Punkte M_1, M_2, M_3 bestimmt wird, müssen sie durch zwei gewöhnliche Pantographen mit den Punkten M_1, M_2 und M_1, M_3 verbunden werden, damit die Verhältnisse $M_1 M_2 : M_2 M_2'$ und $M_1 M_3 : M_3 M_3'$ konstant bleiben.

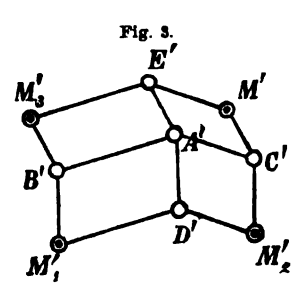


Fig. 3.

In den Figuren 4, 5 und 6 sind solche Gelenksysteme dargestellt; sie unterscheiden sich nur durch verschiedene Lagen des Punktes M gegen die drei Grundpunkte, wodurch eine verschiedene Anordnung der Pantographen erforderlich wird. Jedes dieser Systeme, welche wir weiter als Systeme C bezeichen werden, besteht aus 16 Gliedern.

4. Alle Mechanismen, in welchen das System A oder B oder C die Grundlage bildet, können in Gruppen zusammengestellt werden, je nach der Art und Weise, auf welche ein solches System zwangläufig gemacht wird. Indem man beachtet, dass ein ebenes ähnlich-veränderliches System 4 und ein ebenes affin-veränderliches System 6 Freiheitsgrade besitzt und dass in unserem Falle, wo nur isolierte Punkte dieser Systeme gegeben sind, die Verminderung der Freiheitsgrade nur dadurch erreicht werden kann, dass diese Punkte bestimmte Linien zu beschreiben gezwungen oder festgehalten werden, kann man folgende Gruppen von Mechanismen aufstellen.

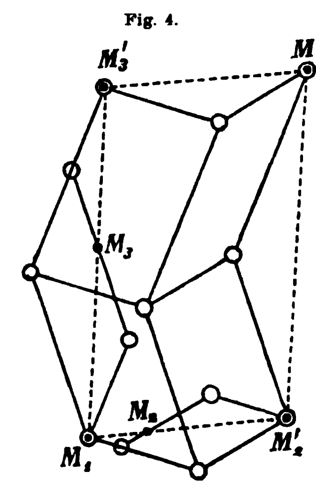


Fig. 4.

I. Ähnlich-veränderliches System.

a) Ein Punkt wird festgehalten und der andere Grundpunkt beschreibt eine gegebene Bahn.

b) Es sind die Bahnen zweier Punkte und das im allgemeinen veränderliche Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten gegeben.

c) Drei Punkte werden gezwungen, bestimmte Bahnen zu beschreiben.

II. Affin-veränderliches System.

a) Zwei Punkte werden festgehalten und der dritte Grundpunkt beschreibt eine gegebene Bahn.

b) Ein Punkt bleibt unbeweglich und es sind die Bahnen zweier anderen Grundpunkte sowie ihr Geschwindigkeitsverhältnis gegeben.
c) Ein Punkt bleibt fest, drei andere Punkte beschreiben gegebene Bahnen.
d) Es sind die Bahnen dreier Punkte und die Geschwindigkeitsverhältnisse derselben gegeben.
e) Es sind die Bahnen von vier Punkten und das Geschwindigkeitsverhältnis von zweien derselben gegeben.
f) Fünf Punkte werden gezwungen, gegebene Bahnen zu beschreiben.

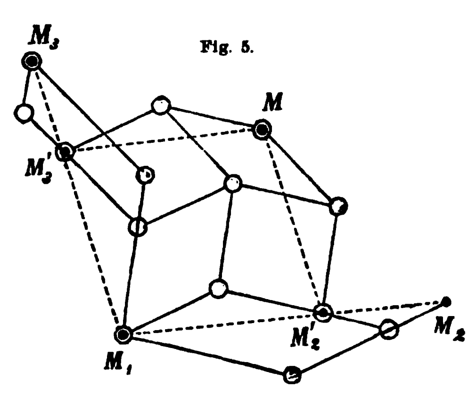


Fig. 5.

5. Der Beschreibung einiger, diesen verschiedenen Fällen entsprechender Mechanismen sollen noch folgende Bemerkungen vorangehen. Wenn man, was weiterhin vorausgesetzt werden soll, bei der Konstruktion der Mechanismen nur Drehpaarungen gebraucht, so hängt die praktische Anwendbarkeit des oben Gesagten davon ab, ob es mit Hilfe genügend einfacher mechanischer Mittel möglich und bequem ist, die Grundpunkte gegebene Linien beschreiben zu lassen. Es ist daher begreiflich, dass unter diesen Linien der Kreis, die Koppelkurve und die gerade Linie die Hauptrolle spielen.

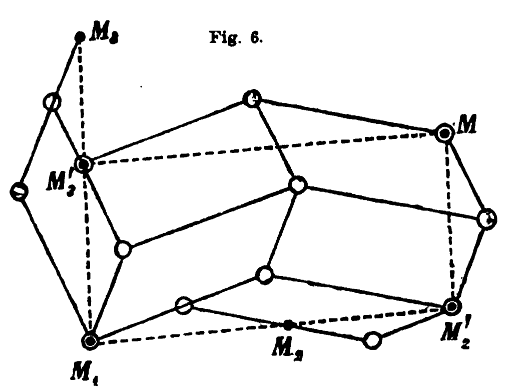
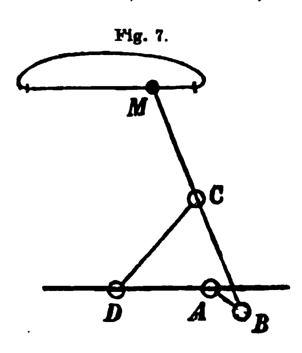


Fig. 6.

Was besonders die Geradführung betrifft, so ist es ratsam, anstatt der sogenannten „genauen" Geradführungen die theoretisch nur angenäherten, aber einfacheren und praktisch ebenso genauen viergliedrigen Geradführungen (das unbewegliche Glied mitgerechnet) zu gebrauchen. Denn die theoretische Genauigkeit der Geradführungen von Hart, Peaucellier und anderen wird durch die grosse Zahl der Glieder und der Drehpaarungen oder durch ungünstige Lage derselben aufgehoben. Unter den viergliedrigen Geradführungen machen wir besonders auf die

„λ-Geradführung“ von Tschebyscheff[1]), welche in der Figur 7 dargestellt ist, aufmerksam. Folgende Zahlenverhältnisse entsprechen dabei einer ganz genügenden praktischen Genauigkeit: $AB = 11$, $AD = 25$, $CD = 32$, $BM = 64$, wobei der Punkt C in der Mitte von BM liegt. Der Punkt M beschreibt eine im praktischen Sinne gerade Linie ungefähr von der Länge $\frac{2}{3} BM$. Diese Gerade ist der Geraden AD parallel, was für die Anwendungen sehr günstig ist. Ein anderer Vorteil dieser Geradführung, welcher bei der Verbindung derselben mit anderen Elementarmechanismen eines Gelenksystems von Wichtigkeit ist, besteht darin, dass der Punkt M am freien Ende des Gliedes liegt, also nicht mit einer Drehpaarung zusammenfällt.

Fig. 7.



Die bei Konstruktion der Mechanismen nötigen Ausrechnungen, welche übrigens keine Schwierigkeiten darbieten, werden wir hier der Kürze wegen auslassen.[2])

6. Mechanismen der Gruppe I, a. Es seien M_1, M_2, M_3 die Ecken des ähnlich-veränderlichen Dreiecks im Systeme A. Wenn ein Punkt M_1 des ähnlich-veränderlichen Systems fest ist, so beschreiben bekanntlich alle Punkte ähnliche Linien und bilden auf denselben ähnliche Punktreihen mit dem Ähnlichkeitspole im Punkte M_1 („einförmige“ Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems). Das Gelenksystem A stellt dann den bekannten Plagiograph von Sylvester dar. Wir bekommen aber neue Mechanismen, wenn wir die Aufstellung des Systems A so einrichten, dass der Ähnlichkeitspol sprungweise seinen Ort ändert.

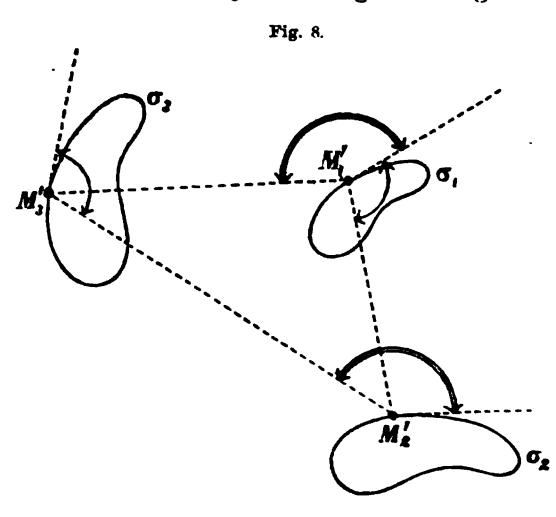
Es werde anfangs der Grundpunkt M_3 des Systems A festgehalten und der Punkt M_1 auf einer geschlossenen Kurve σ_1 geführt, sodass der Punkt M_2 eine dieser Kurve ähnliche Linie σ_2 beschreibt. Die beiden Kurven haben den Punkt M_3 zu ihrem gemeinschaftlichen Ähnlichkeitspole und ihre Tangenten bilden in den entsprechenden Lagen beständig denselben Winkel. Durch den Punkt M_3 ziehe man eine den Kurven σ_1 und σ_2 ähnliche Linie σ_3 von solcher Lage und von solchen Dimensionen, dass der Punkt M_2 in einer bestimmten Lage M_2'

1) Memoiren der Akademie der Wiss. in St. Petersburg, B. XIV.
Siehe auch: P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen, von Wassilief und Delaunay, Leipzig, B. G. Teubner, 1900.

2) Ausführlicher behandelt in meiner Arbeit mit demselben Titel in den Warschauer Universitäts-Nachrichten 1900.

zum Ähnlichkeitspole der Kurven σ_3 und σ_1 genommen werden könnte (Fig. 8). Wenn der Punkt M_2 in die Lage M_2' kommt, so erhält man eine Verzweigung der Bewegung: entweder setzt der Punkt M_2, vom Punkte M_1 geführt, seine Bewegung fort oder er kann festgehalten werden, und der Punkt M_3 wird dann, wenn er freigelassen wird, sich auf der Kurve σ_3 zu bewegen anfangen. Wenn der Punkt M_3 nach einem Umlaufe wieder in seine Anfangslage gelangt, der Punkt M_2 aber freigelassen wird, so kann der Punkt M_3 wieder stehen bleiben und es fängt die frühere Bewegung an. Es ist bemerkenswert, dass das mechanische Festhalten der Punkte M_2 und M_3 nicht während der ganzen Umdrehungsperiode nötig ist, wenn nur Mechanismen hinzugefügt werden, welche die Punkte M_1, M_2, M_3 zwangläufig auf den Linien σ_1, σ_2, σ_3 führen. Es ist dann genügend, dass die Punkte M_2, M_3 wechselweise nur auf ganz kurze Zeit festgehalten werden; denn sie bleiben dann von selbst stehen, indem sie mit den entsprechenden Ähnlichkeitspolen der Kurven σ_1, σ_3 oder σ_1, σ_2 zusammenfallen.

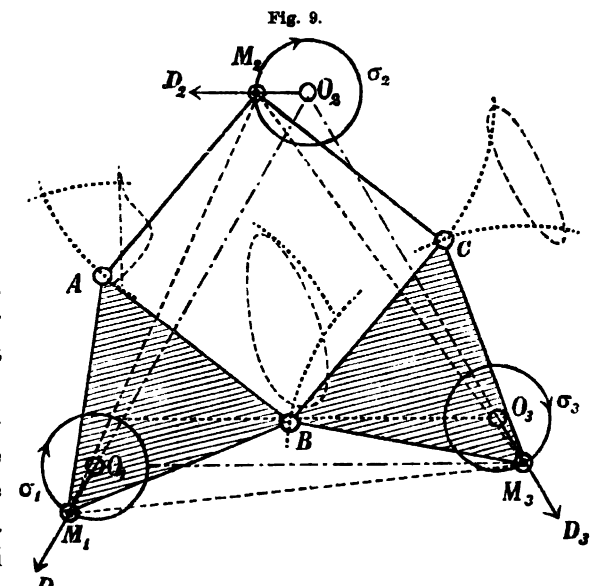
Fig. 8.



Es giebt ein einfaches Mittel, die Punkte M_2, M_3 automatisch wechselweise festzuhalten, ohne irgend eine mechanische Vorrichtung. Wir wollen wieder voraussetzen, dass der Mechanismus durch den Punkt M_1 geführt wird. Wären die Linien σ_2 und σ_3 anders gelegen, als es oben angegeben wurde, so wäre es unmöglich, dass einer von den Punkten M_2, M_3 während einer endlichen Verschiebung des Gelenksystems fest bliebe, und die Bewegung würde dann dem Falle I, c entsprechen. Es mögen aber die Linien σ_2 und σ_3 (oder nur eine derselben) nur sehr wenig von ihren Normallagen abgelenkt sein; dann wird einer von den Punkten M_2, M_3, z. B. M_2, auf der entsprechenden Kurve solche Lagen einnehmen, die nur sehr wenig von den entsprechenden normalen Lagen abweichen, während der andere Punkt, M_3, nur sehr wenig von seiner Ruhelage abgelenkt wird. Diese kleine Ablenkung ist aber genügend, um die Bewegung des Punktes M_2 zu hemmen, wenn derselbe seinen Umlauf vollendet hat; so dass dann der

Punkt M_3 seinen Umlauf beginnt, während der Punkt M_2 nur eine sehr kleine Ablenkung von seiner Ruhelage erhält. Somit werden die Punkte automatisch wechselweise aufgehalten. Der Versuch zeigt, dass eine sehr kleine Verschiebung einer der gegebenen Kurven aus ihrer Normallage genügt und dass dabei, wegen einer gewissen Nachgiebigkeit der Glieder und unumgänglicher, wenn auch sehr kleiner Schwankung der Drehpaarungen in ihren Axen, die Punkte M_2 und M_3 in Wirklichkeit den grössten Teil jeder Periode fest bleiben und nur kurz vor dem Anfange der nächsten Periode in Bewegung kommen.

Fig. 9.



In Figur 9 ist die Anwendung des Gesagten auf den Fall dargestellt, wo die Kurven σ_1, σ_2, σ_3 Kreislinien sind. Das ähnlich-veränderliche Dreieck ist gleichseitig genommen, wodurch erzielt wird, dass die Rollen aller dreier Punkte vertauscht werden können.

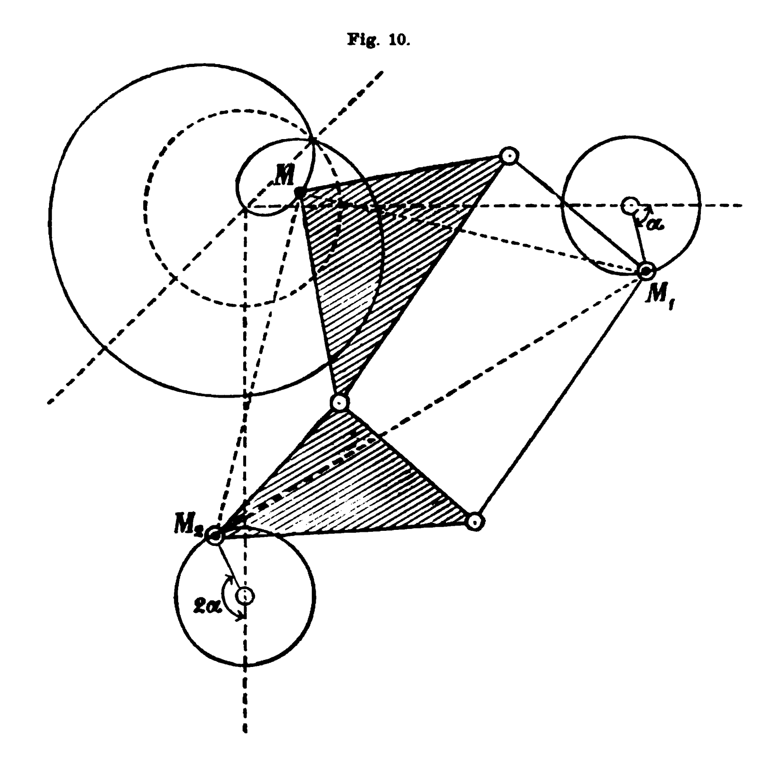
In demselben Mechanismus ist auch die Bewegung der Punkte A, B, C bemerkenswert. Wenn man alle drei Punkte M_1, M_2, M_3 nacheinander als Führungspunkte annimmt, so setzt sich die Bahn jedes dieser Punkte aus zwei sich unter einem Winkel schneidenden Kreisbögen und einer Kurve höherer Ordnung zusammen. Somit kann mit Hilfe dieses Mechanismus eine kontinuierliche Kreisbewegung in eine hin- und hergehende Bewegung auf zwei sich unter einem gegebenen Winkel schneidenden Kreisbögen transformiert werden.

7. Mechanismen der Gruppe I, b. Es seien die Bahnen der Punkte M_1, M_2 Kreislinien und die Winkelgeschwindigkeit des Punktes M_2 doppelt so gross wie diejenige des Punktes M_1. Wenn man diese Grundpunkte des Systems A durch ein Gelenksystem auf solche Weise miteinander verbindet, dass beständig dieses Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten festgehalten wird, so bekommt man einen Gelenkmechanismus zur genauen Verdoppelung der Winkel-

geschwindigkeit.[1]) Es ist leicht einzusehen, dass, wenn zwei Punkte eines ähnlich-veränderlichen Systems der eben genannten Bewegung folgen, alle Punkte des Systems Pascalsche Schneckenlinien beschreiben. Es ist aber möglich, vermittelst eines Gelenkmechanismus diese Konchoide zu beschreiben; dazu kann man mit Hilfe zweier Geradführungen einen Ellipsograph bilden und denselben in der Umkehrung aufstellen.

Die Figur 10 stellt einen solchen „Drehungsverdoppler" dar, mit der Annahme, dass das Dreieck $M_1 M M_2$ gleichschenklig und recht-

Fig. 10.



winklig ist. Der Mechanismus für die Pascalsche Linie ist nicht abgebildet. Ebenso wird hier der Kürze wegen die nötige Rechnung nicht ausgeführt.

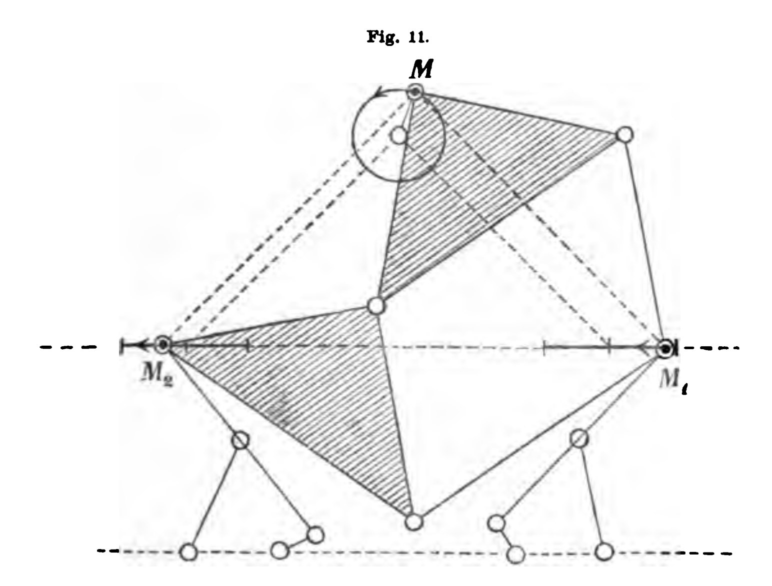
Ein anderes Beispiel für den Fall I, b, welches vielleicht auch eine Anwendung finden könnte, stellt einen **Mechanismus zur Transformation der Phase und der Amplitude einer geradlinigen harmonischen Bewegung** dar. Wenn zwei Punkte eines

---

1) Der erste Mechanismus dieser Art wurde von Delaunay angegeben, wobei er die Umkehrung seines gelenkigen Reversors benutzt: Transformation der Drehungen und Zeichnen von Kurven mittelst Gelenkmechanismen. Dissert. (russisch) 1894. S. 34.

ebenen ähnlich-veränderlichen Systems geradlinige harmonische Bewegungen von einer und derselben Periode, aber von beliebigen Amplituden und beliebigem Phasenunterschiede ausführen, so sind die Bahnen aller Punkte Ellipsen.[1]) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Bahnen gleiche Exzentrizität besitzen, besteht aus zwei Kreisen[2]), was auch speziell für die Exzentrizität Null richtig ist. Somit erhalten wir die genannte Transformation, wenn wir die Grundpunkte des Gelenksystems A mit zwei Geradführungen verbinden, den dritten Punkt M auf dem erwähnten geometrischen Orte nehmen und ihn durch eine Kurbel auf einem Kreise führen, dessen Lage jedesmal je nach den gegebenen Elementen der harmonischen Bewegungen durch eine einfache Rechnung gefunden werden kann. Die Figur 11 stellt einen solchen

Fig. 11.



Transformator dar, wobei angenommen ist, dass das Dreieck $M_1 M M_2$ gleichschenklig und rechtwinklig ist, dass die beiden harmonischen Bewegungen auf einer und derselben Geraden mit gleicher Amplitude $2a$ erfolgen und dass der Phasenunterschied durch einen rechten Winkel bestimmt wird. Der Radius des Kreises muss dann $r = a/\sqrt{2}$ genommen werden.

8. Mechanismen der Gruppe I, c. Als Anwendungen dieses Falles mögen folgende drei Mechanismen dienen.

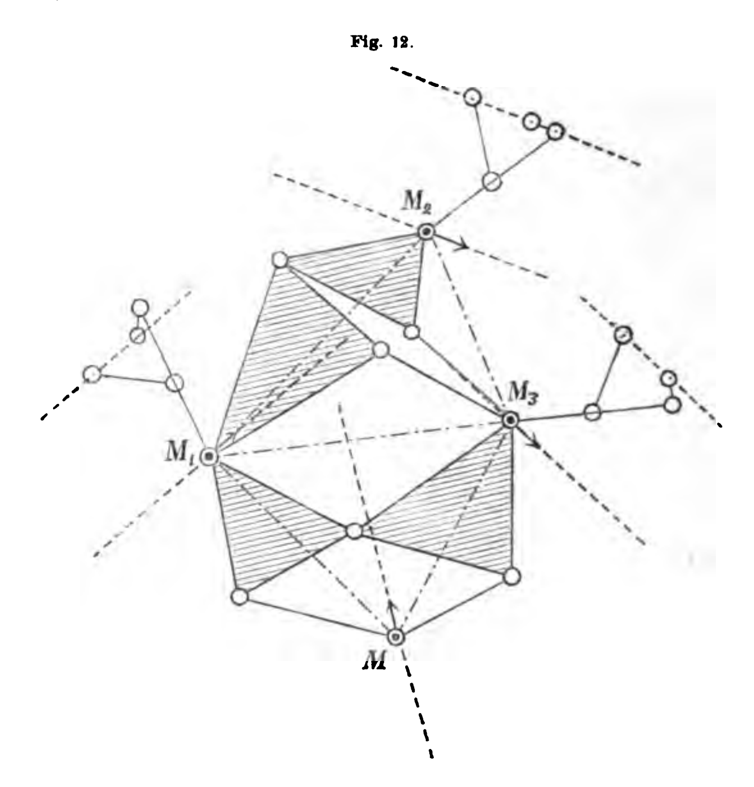
---

1) Burmester, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. XXIII (1878), S. 121.

2) P. Somoff, Kinematik ebener ähnlich-veränderlicher Systeme. 1885. Inaug.-Diss. (russisch).

Gelenksystem, in welchem eine beliebige Zahl von Punkten gerade Linien mit proportionalen Geschwindigkeiten beschreiben. Wenn drei Punkte eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems gerade Linien beschreiben, so bewegen sich bekanntlich alle Punkte auf Geraden mit proportionalen Geschwindigkeiten. Wenn man also drei Hauptpunkte M_1, M_2, M_3 des Gelenksystems A mit drei Geradführungen verbindet und mittelst eines neuen Gelenksystems A einen vierten Punkt M desselben ähnlich-veränderlichen Systems hinzuzieht (Fig. 12), so wird auch dieser Punkt eine Gerade beschreiben.

Fig. 12.

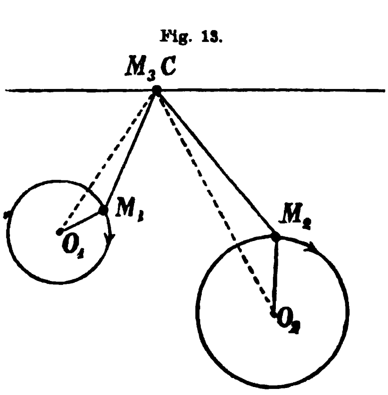


Auf diese Weise kann man ein beliebiges Netz von Punkten konstruieren, welche alle demselben ähnlich-veränderlichen Systeme angehören und gerade Linien mit proportionalen Geschwindigkeiten beschreiben.

Mechanismus, durch welchen eine kontinuierliche gleichmässige Kreisbewegung gleichzeitig in zwei der folgenden Bewegungen verwandelt wird: 1. in eine gleichmässige Bewegung auf einem Halbkreis hin und zurück und 2. in eine Hälfte einer geradlinigen harmonischen Bewegung, wobei statt der anderen Hälfte derselben der Punkt stehen bleibt.

Es sollen die Punkte M_1, M_2 des Gelenksystems A auf Kreislinien und der Punkt M_3 auf einer Geraden geführt werden. Diese Gerade ziehen wir so, dass ein Punkt C derselben zum festen Ähnlichkeitspole einer solchen „einförmigen" (§ 6) Bewegung des ähnlich-veränderlichen Systems genommen werden könnte, welche durch die Kreisbewegung des Punktes M_1 bestimmt wird und in welcher der Winkel $O_1 C O_2$ zwischen den Geraden, die den Punkt C mit den Mittelpunkten der beiden Kreisbahnen verbinden (Fig. 13), dem Winkel $M_1 M_3 M_2$ gleich ist. Dann kann der Punkt M_3, wenn er in die Lage C kommt, entweder stehen bleiben oder seine geradlinige Bewegung fortsetzen. Im ersteren Fall wird die Bewegung des Systems eine einförmig-kreislinige; dazu muss aber, wenn der Mechanismus ganz genau konstruiert ist, der Punkt M_3 wenigstens während einer kurzen Zeit festgehalten werden. Wenn wir aber absichtlich eine kleine Ungenauigkeit zulassen, indem wir z. B. die Lage des Mittelpunktes O_2 etwas ändern, so wird der Punkt M_3, nachdem er in die Lage C gekommen ist, von selbst in dieser Lage stehen bleiben, während die Punkte M_1 und M_2 einen Halbkreis beschreiben werden. Genauer gesagt, wird der Punkt M_3 während dieser Zeit um die Lage C eine kleine Schwankung machen, die aber praktisch unbemerkbar sein wird. Nach einem halben Umlaufe der Punkte M_1 und M_2 löst sich der Punkt M_3 von selbst von der Lage C los, macht eine geradlinige Bewegung hin und zurück und kommt wieder in die Lage C, wonach sich die vorige Bewegung des Systems wiederholt u. s. w. Was den Punkt M_2 betrifft, so bewegt er sich während des Stillstandes des Punktes M_3 auf seinem Kreise in demselben Sinne und mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Punkt M_1, während der anderen Hälfte der Bewegung des letzteren geht er aber auf demselben Halbkreise zurück, übrigens im allgemeinen mit einer anderen, veränderlichen Winkelgeschwindigkeit. Der Versuch zeigt, dass durch eine ganz kleine, obengenannte Ungenauigkeit eine automatische Abwechslung der Bewegungen leicht erreicht werden kann. Der Punkt M_2 beschreibt übrigens wegen einer gewissen Nachgiebigkeit der Glieder und der Drehpaarungen etwas weniger als einen Halbkreis und an den Endpunkten seiner Bahn verliert die Geschwindigkeit die Gleichmässigkeit. In Figur 14 ist ein solcher Mechanismus unter folgenden vereinfachenden Voraussetzungen

Fig. 13.



dargestellt; das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ ist ein gleichseitiges und die Radien beider Kreise sind einander gleich. Dann ist bei gleichmässiger Bewegung des Punktes M_1 auch die Rückbewegung des Punktes M_2 gleichmässig und die Bewegung des Punktes M_3 eine einfache harmonische, von der aber, dem oben Gesagten gemäss, nur eine Hälfte zwischen der mittleren und einer der äusseren Lagen erfolgt.

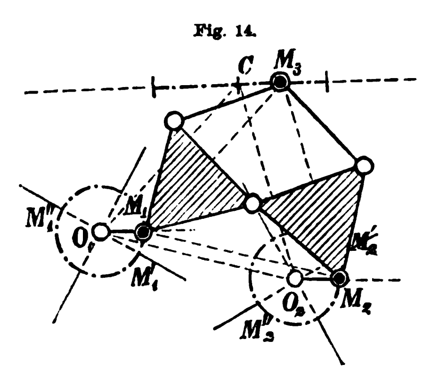


Fig. 14.

Unter den besonderen Arten der Bewegung eines ebenen ähnlich-veränderlichen Systems, welche zuerst untersucht wurden, befindet sich die Kreisbewegung, bei welcher die Bahnen aller Punkte Kreise sind. Ein dementsprechender Mechanismus ist in der Figur 15 dargestellt, wobei das Dreieck $M_1 M_2 M_3$ wieder gleichseitig genommen ist. Damit alle drei Punkte volle Umdrehungen vollführen können, darf der Radius eines jeden Kreises nicht grösser als die Summe der Radien der beiden andern und nicht kleiner als ihre Differenz sein. Diese Bewegung ist zwar eine „einförmige“; aber der feste Ähnlichkeitspol wird durch keinen Punkt des Mechanismus dargestellt.

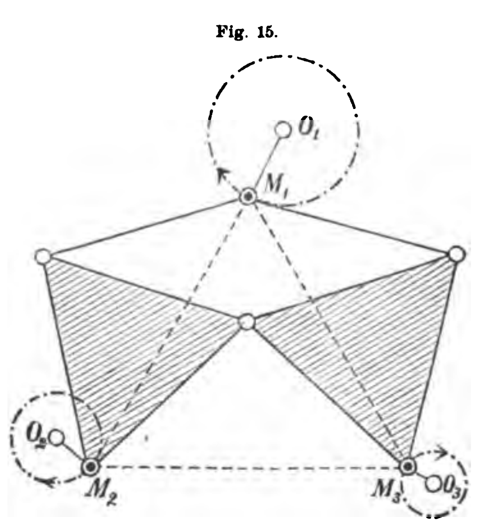


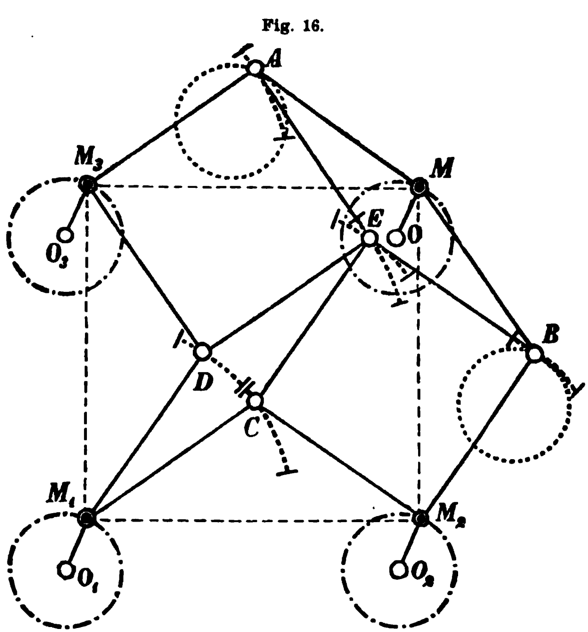
Fig. 15.

9. Mechanismen der Gruppe II, a. Wenn zwei Punkte M_1 und M_2 eines ebenen affin-veränderlichen Systems fest bleiben, so bleibt die ganze Gerade $M_1 M_2$ unbeweglich, und die Bewegung des Systems besteht aus einer einfachen Schiebung. Alle Punkte beschreiben dann ähnliche Bahnen und bilden auf denselben ähnliche Punktreihen. Das Gelenksystem B oder C stellt also dann einen gewöhnlichen Pantograph dar; es kann aber, ähnlich wie in dem entsprechenden Falle das System A, andere Anwendungen finden, wenn die feste Gerade der Schiebung sprungweise ihre Lage ändert, wie es in folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

Man verbinde die vier Hauptpunkte eines Systems B, nämlich

M_1, M_2, M_3 und M, durch vier Kurbeln von gleicher Länge r mit festen Drehpaarungen O_1, O_2, O_3, O, welche in den Ecken eines Parallelogramms liegen, und gebe dem Systeme eine solche Lage, dass die Kurbeln parallel und gleichgerichtet sind (Fig. 16). Indem wir von dieser Lage ausgehen, den Punkt M_1 festhalten und den Punkt M auf dem entsprechenden Kreise herumführen, können wir offenbar nur einen der Punkte M_2, M_3 in Bewegung bringen. Wenn der Punkt M_2 in Bewegung kommt, so bleibt M_3 von selbst fest und kann nur dann sich zu bewegen anfangen, wenn die Kurbel $O_2 M_2$ eine volle Umdrehung ausgeführt hat. Durch eine ganz kleine Abweichung von der normalen Form des Mechanismus, z. B. durch eine kleine Verrückung der Axe O in der Richtung der Diagonale $O_1 O$ wird sehr leicht eine automatische Abwechselung der Drehungen der Punkte M_2, M_3 erreicht, ähnlich, wie es im § 6 beim Systeme A gezeigt wurde, mit dem Unterschiede aber, 1. dass jetzt die Anfangsrichtung der vier Kurbeln willkürlich genommen werden kann, 2. dass während der Bewegung selbst die Richtung der festgehaltenen Kurbel $O_1 M_1$ um einen beliebigen Winkel verstellt werden kann, und 3. dass wir jetzt vier Punkte haben, von denen jeder als fester oder als Führungspunkt genommen werden kann.

Fig. 16.



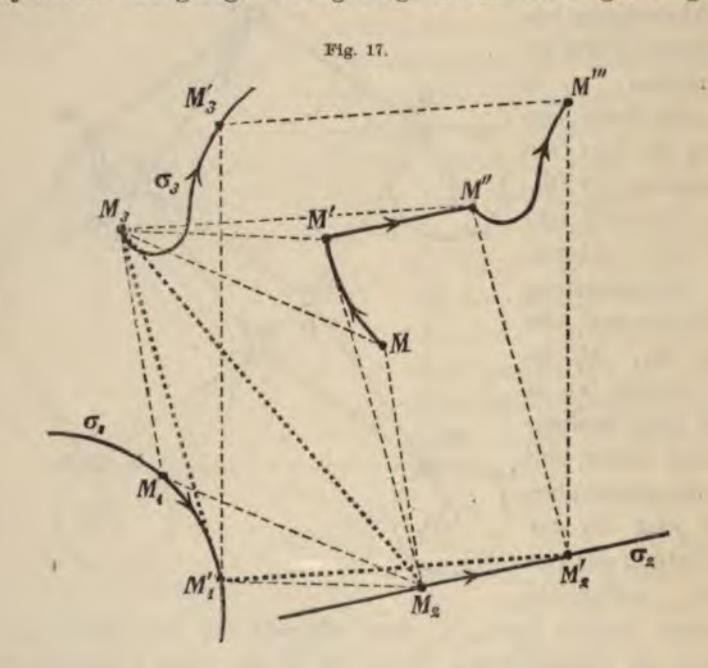
In demselben Mechanismus (Fig. 16) ist die Bewegung der Punkte A, B, C, D und E bemerkenswert. Wenn wieder der Punkt M_1 festgehalten und M geführt wird, so beschreibt der Punkt A abwechselnd einen Kreisbogen vom Radius $M_3 A$ und einen ganzen Kreis vom Radius r; dasselbe findet auch beim Punkte B statt. Die Punkte C und D beschreiben abwechselnd Kreisbögen, die den Punkt M_1 zum Mittelpunkte haben, und bleiben abwechselnd stehen. Die Bahn des Punktes E setzt sich aus zwei sich unter einem Winkel schneidenden

Kreisbögen zusammen, für welche die Punkte C und D während des Stillstandes derselben als Mittelpunkte dienen.

Derselbe Mechanismus kann auch dazu dienen, um die kontinuierliche Bewegung des Punktes M in intermittierende Halbkreisbewegungen der drei übrigen Punkte zu transformieren. Die automatische Abwechslung dieser Bewegungen wird aber nicht mit demselben Erfolge erreicht, wie es oben gezeigt wurde.

Das Gelenksystem B oder C kann dazu dienen, um eine Linie zu zeichnen, welche aus Abschnitten zweier oder dreier gegebener Linien sich zusammensetzt. Es seien die Punkte M_1, M_2 und M_3 durch hinzugefügte zwangläufige Mechanismen gezwungen, auf

Fig. 17.

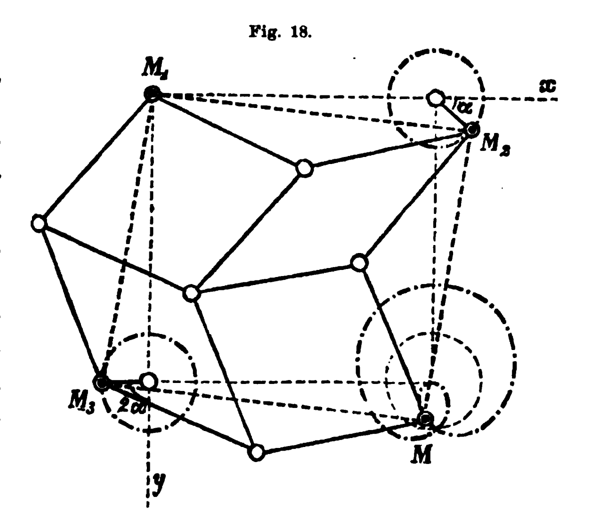


drei Linien σ_1, σ_2, σ_3 zu bleiben. Wenn wir die Punkte M_2 und M_3 festhalten, so beschreibt der Punkt M eine mit der Linie σ_1 identische (im Falle des Systems B) oder derselben ähnliche (im Falle des Systems C) Linie. In der Figur 17 wird das System B benutzt. Da übrigens die feste Schiebungsgerade $M_2 M_3$ jetzt zwischen den Punkten M_1 und M liegt, so erscheint diese Linie in einer zur Linie σ_1 symmetrischen Lage. Wenn wir weiter anstatt des Punktes M_2 den Punkt M_1 in einer neuen Lage M_1' festhalten, so setzt der Punkt M seine Bewegung in einer mit der Linie σ_2 identischen Linie fort; ebenso durch das Festhalten der Punkte M_1 und M_2 und das

Freilassen des Punktes M_3 kann man den Punkt M eine mit der Linie σ_3 identische Linie beschreiben lassen. Die einzelnen Abschnitte der drei Linien σ_1, σ_2, σ_3 können von beliebiger Grösse sein und in beliebiger Ordnung folgen.

10. Mechanismen der Gruppe II, b. Diesem Falle entspricht u. a. ein zweiter Mechanismus zur Verdoppelung der Drehungen, welcher dem Mechanismus von § 7 analog ist. Wenn der Punkt M_1 festgehalten wird, die Punkte M_2 und M_3 sich auf Kreisen zwangläufig bewegen und die Winkelgeschwindigkeit eines dieser Punkte doppelt so gross ist wie diejenige des anderen, so beschreiben alle Punkte des affin-veränderlichen Systems Pascalsche Schneckenlinien. Wird also der Punkt M auf der entsprechenden Pascalschen Linie geführt, so bleibt das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der Punkte M_2, M_3 beständig gleich zwei. Ein entsprechender Mechanismus ist in der Figur 18 dargestellt, wobei der Einfachheit wegen der Mechanismus zur Führung des Punktes M (§ 7) ausgelassen ist.

Fig. 18.



Wenn die Punkte M_2 und M_3 durch ein Paar von Zahnrädern, welches einem gegebenen Geschwindigkeitsverhältnisse entspricht, verbunden werden, so beschreibt der Punkt M eine cyklische Kurve.

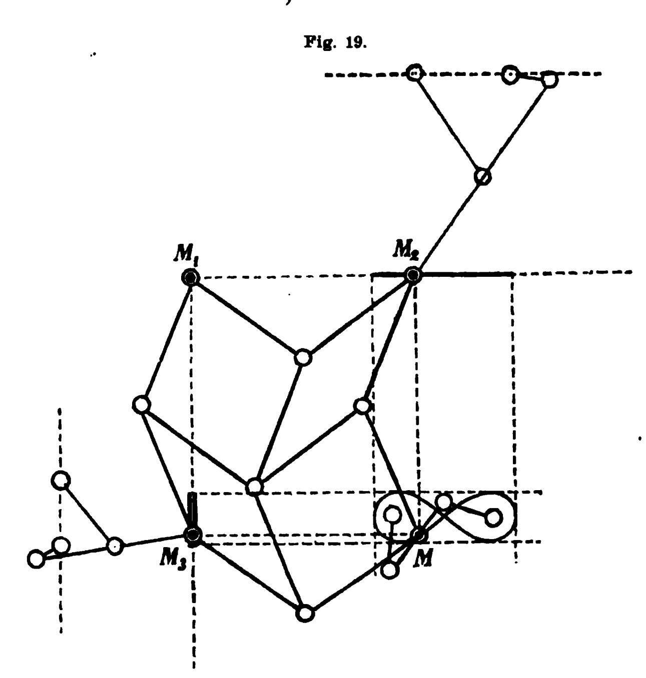
Wenn die Punkte M_2 und M_3 durch Zahnräder und Prismenpaare gezwungen werden, geradlinige harmonische Bewegungen von verschiedenen Perioden und verschiedener relativer Phase zu vollführen, so bekommt man ein bequemes Mittel, die Kurven von Lissajous zu zeichnen.

11. Mechanismen der Gruppe II, c. Ein Gelenksystem, welches zu dieser Gruppe gehört, kann dazu dienen, um die Bewegung eines Punktes auf irgend einer Linie in die Bewegungen auf zwei anderen gegebenen Linien zu zerlegen. Dazu müssen der Punkt M_1 eines Systems B festgehalten und zwangläufige Mechanismen für die Bewegung der Punkte M_2 und M_3 in gegebenen Linien hinzugefügt werden.

Wenn diese letzteren Mechanismen Geradführungen sind, so wird die Bewegung des Punktes M derart in zwei geradlinige zerlegt, dass die Punkte M_2 und M_3 unmittelbar die geradlinigen Koordinaten des Punktes M bestimmen. Als spezielle Anwendungen des Gesagten führen wir noch folgende Mechanismen an.

Wenn der Punkt M mittelst einer Kurbel auf einem Kreise gleichmässig geführt wird, so sind die Bewegungen der Punkte M_2 und M_3 einfache harmonische, aber von verschiedener relativer Phase, welche von dem Winkel $M_2 M_1 M_3$ abhängt.[1])

Fig. 19.



Wenn die geradlinigen Bahnen der Punkte M_2 und M_3 aufeinander senkrecht stehen, der Punkt M aber mittelst eines Antiparallelogramms auf einer Lemniskate[2]) geführt wird, deren Axen den Bahnen der Punkte M_2 und M_3 parallel sind (Fig. 19), so macht einer dieser Punkte zweimal so viel Schwingungen als der andere. Übrigens, wenn eine dieser Schwingungen eine harmonische ist, so ist die andere keine genaue harmonische.

Wenn die Axen der Lemniskate um den Winkel $\pi/4$ gedreht werden (Fig. 20), so erfolgt die schwingende Bewegung der Punkte M_2 und M_3 derart, dass sie abwechselnd in ihren mittleren Lagen stehen bleiben.

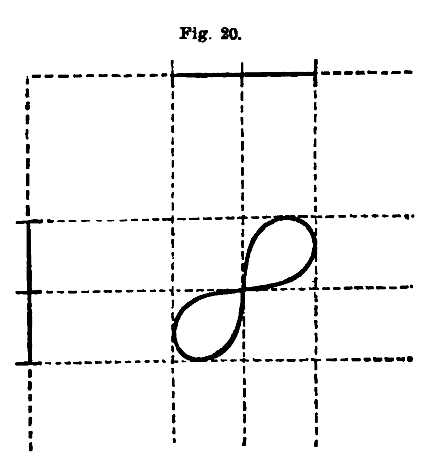
12. Mechanismen der Gruppe II, d. Dieser Fall kommt darauf hinaus, dass die Descartes'schen Koordinaten dreier Grundpunkte als Funktionen von einer derselben oder dass alle sechs Koordinaten als Funktionen der Zeit gegeben sind. Wenn man die Bewegungs-

1) Man vergl. § 7.

2) Burmester, Lehrbuch der Kinematik, S. 306.

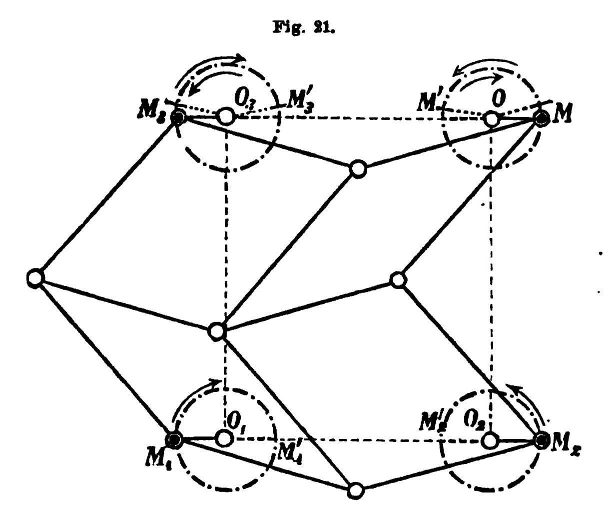
gleichungen für einen vierten Punkt M des affin-veränderlichen Systems aufstellt, so erkennt man die Möglichkeit, einen Gelenkmechanismus für eine solche Bewegung des Punktes M zu bilden, in welcher seine Koordinaten als dreigliedrige Funktionen der Zeit gegeben sind. Es wird natürlich vorausgesetzt, dass durch ergänzende Gelenkmechanismen die Bewegung der drei Grundpunkte mit den für sie gegebenen Geschwindigkeitsverhältnissen erzielt werden kann. Wenn aber dieses nicht der Fall ist, so besitzen wir doch ein bequemes Mittel, um vermöge des Systems B oder C punktweise eine Kurve zu bestimmen, deren Koordinaten dreigliedrige Funktionen der Zeit sind.

Fig. 20.



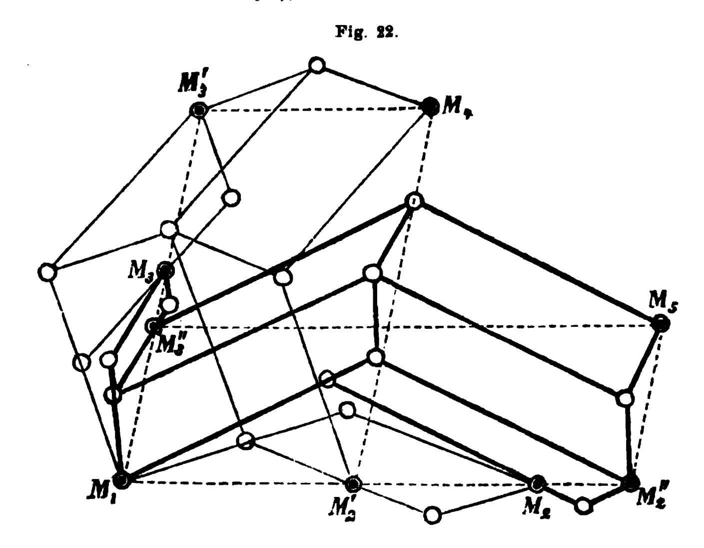
13. Mechanismen der Gruppe II, e. Für diesen Fall wollen wir nur folgendes Beispiel anführen. Im Gelenksysteme B sollen die Punkte M_1, M_2, M_3, M Kreise beschreiben, deren Radien gleich sind und deren Mittelpunkte O_1, O_2, O_3, O in den Ecken eines Rechtecks liegen. Die Anfangslagen der vier Kurbeln O_1M_1, O_2M_2, O_3M_3, OM können einander parallel genommen werden, wie es in Fig. 21 dargestellt ist. Wenn die Kurbeln O_1M_1 und O_2M_2 mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, aber in entgegengesetzten Richtungen gedreht werden, so werden sich auch die zwei anderen Kurbeln ebenso drehen, wobei die Bewegungsrichtungen der Punkte M_1, M_3 und diejenigen der Punkte M_2, M entweder zusammenfallen oder entgegengesetzt sein können. Wenn der erstere Fall eintritt, so werden die vier Punkte nach einer halben Umdrehung die Lagen M_1', M_2', M_3', M einnehmen. Bei der weiteren Be-

Fig. 21.



wegung der Punkte M_1, M_2 können die zwei anderen Punkte ihre Bewegungsrichtungen entweder behalten oder umkehren. Im letzteren Falle wird die kontinuierliche Kreisbewegung der Punkte M_1, M_2 in eine hin- und hergehende Halbkreisbewegung der Punkte M_3, M transformiert. Um diese Bewegung zu bekommen, kann man in den Endlagen der Punkte M_3 und M Stifte mit Federn anbringen, um das Umschlagen des Mechanismus zu verhindern. Das kann übrigens auch vermieden werden, da wegen der Nachgiebigkeit der Glieder, der Reibung und der, wenn auch noch so kleinen Schwankungen an den Drehpaarungen die Punkte M_3 und M nicht vollkommen ihre Endlagen M_3' und M' erreichen und daher von selbst ihre Bewegungsrichtungen umkehren. Zur Verwirklichung der beschriebenen Bewegung muss noch an den Punkten M_1, M_2, um ihre Gegenläufigkeit zu erhalten, ein „Reversor" angebracht werden, wozu auch ein Gelenksystem, z. B. der Reversor von Delaunay[1]), benutzt werden kann.

Fig. 22.



14. Mechanismen der Gruppe II, f. Um einen fünften Punkt des affin-veränderlichen Systems in Betracht zu ziehen, muss man das System C mit einem anderen, eben solchen Systeme auf solche Weise verbinden, dass die beiden Systeme drei Grundpunkte gemeinsam haben. Das ganze Gelenksystem enthält dann im allgemeinsten Falle 32 Glieder (Fig. 22). Diese Zahl vermindert sich aber, wenn anstatt eines oder beider der Systeme C das System B benutzt werden kann. Als An-

1) Delaunay: Transformation der Drehungen und Zeichnen von Kurven mittelst Gelenkmechanismen. Dissert. (russisch) 1894. S. 30.

wendung des betrachteten Falles erwähnen wir die Zerlegung einer gegebenen Bewegung in vier Bewegungen auf vier gegebenen Linien.

Wenn die fünf Punkte mit fünf Geradführungen verbunden werden, so stellt das Gelenksystem die einfachste Bewegung des affin-veränderlichen Systems, die einförmig-geradlinige Bewegung dar.

Wenn einer von den fünf Punkten statt der geraden Linie einen Kreis gleichmässig zu beschreiben genötigt wird, so sind die Bewegungen der vier übrigen Punkte einfache harmonische, von gleicher Periode, aber von verschiedenen Phasen und Amplituden. Somit ist das Mittel gegeben, eine harmonische Bewegung in drei andere von derselben Periode, aber von verschiedenen Phasen und Amplituden auf gegebenen Geraden zu verwandeln.

Die Fälle, wo zwei, drei oder vier geradlinige Bewegungen durch Kreisbewegungen ersetzt werden, führen zu Mechanismen, welche dem Mechanismus von § 8 (Fig. 13) analog sind.

Wenn alle fünf Punkte durch Kurbeln auf Kreisen zu bleiben genötigt werden, so können u. a. die Mittelpunkte und die Radien dieser Kreise auf unendlich viele Arten so genommen werden, dass alle fünf Kurbeln sich mit gleicher Winkelgeschwindigkeit drehen.

Neue Logarithmische Rechentafel.

Von Reinhold Proell in Dresden.

Jedermann kennt den unschätzbaren Vorteil, welchen die Logarithmen bei numerischen Rechnungen bieten, zumal wenn sie, wie bei dem bekannten Rechenstab, durch eine Skala dargestellt sind, die unmittelbar das Aneinandersetzen der Logarithmenwerte gestattet. Da die Genauigkeit solchen Rechnens mit wachsender Skalenlänge steigt, so hat man vielfach versucht, eine fortlaufende, sehr grosse Skala, aber in eine Anzahl gleich langer Stücke zerschnitten, zu verwenden und diese Stücke reihenförmig in gleichen Abständen von einander auf einer Untertafel angeordnet. Eine durchsichtige, kongruente Obertafel, welche beim Rechnen auf jene gelegt wird, dient dazu, die Logarithmen nach Belieben zu addieren und zu subtrahieren. Hierbei ist jedoch eins zu beachten. Bei obiger einfacher Anordnung fällt nämlich das Resultat in der Mehrzahl der Fälle beim Aneinandersetzen der Logarithmenwerte ausserhalb des Rahmens der Tafeln, kann also nicht abgelesen werden; man hat sich daher genötigt gesehen, auf der Untertafel jede Teilskala nicht weniger als viermal zu wiederholen, ihr selbst damit vierfaches Format zu geben. Tafeln, welche auf diesem Gedanken beruhen, sind z. B. die von Scherer und Hannyngton.[1]) Leider giebt man damit jedoch einen grossen Teil des errungenen Vorteils wieder preis; denn jene Wiederholung der Einzelskalen lässt die Tafel nur ein Viertel derjenigen Genauigkeit erlangen, welche bei gleichem Format sich wohl erreichen liesse, wäre ein Rechnen ohne jene Wiederholung möglich.

Dass letzteres aber in der That der Fall ist, und sogar auf eine überraschend einfache Weise geschehen kann, erkennt man durch folgende Überlegung:

Man denke sich eine fortlaufende, sich nicht wiederholende logarithmische Skala als Schraubenlinie auf einen geraden Kreiscylinder so

1) Vergl. Dyck's Katalog mathematischer Instrumente, München 1892. S. 141, Nr. 8 u. S. 140, Nr. 6.

aufgewickelt, dass Anfangs- und Endpunkt, die beiden „Einspunkte" AB der Skala, senkrecht untereinander zu liegen kommen. (S. Fig. 1.) Ein zweiter, durchsichtiger und verschieblicher Cylinder, der jenen dicht umschliesst und die gleiche schraubenlinienförmig angeordnete Skala trägt, ermöglicht das Aneinandersetzen der Logarithmenwerte und damit dieselben Rechenoperationen, die mit einem gewöhnlichen Rechenstab ausgeführt werden können, wie es ja auch bereits Apparate giebt, die hierauf beruhen.[1]) Nun denke man sich inneren und äufseren Cylinder längs der, Anfangs- und Endpunkt der Skala verbindenden Mantellinie AB aufgeschnitten und in die Ebene gerollt. Dann wird aus dem äusseren Cylinder eine Obertafel, aus dem inneren eine Untertafel, die einzelnen Gänge der Schraubenlinie werden parallele Zeilen, d. h. wir erhalten zwei Tafeln, bei welchen eine fortlaufende grosse logarithmische Skala in eine Anzahl gleich langer, reihenförmig angeordneter, aber sich nicht wiederholender Einzelskalen zerlegt ist. Dass man mit einer solchen Tafel in der Ebene dieselben Rechenoperationen ausführen kann, wie mit der schraubenlinienförmigen Skala im Raume, erkennt man jetzt nach obigem unschwer. Man muss sich nur eins vergegenwärtigen, dass nämlich beim Aufschneiden des Cylinders gewissermassen eine Teilung der Einspunkte A und B in je zwei völlig gleichberechtigte Punkte $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ vor sich geht, die bei einer Affinverwandlung der einzelnen Zeilen in eine zu den Schlusslinien $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ senkrechte Richtung ihre Lage auf diesen Schlusslinien nicht ändern. (S. Fig. 3.) Diese vier „Einspunkte" sind charakteristisch für die Tafel und spielen für sie dieselbe Rolle wie Anfangs- und Endpunkt der Skala eines einfachen Rechenstabes für diesen. So erfolgt z. B. die Division dadurch, dass man den Dividenden auf der Obertafel aufsucht, ihn mit dem auf der Untertafel aufgesuchten Divisor zur Deckung bringt und das Resultat auf der Obertafel an derjenigen Stelle abliest, auf welche ein Einspunkt der Untertafel zeigt. Praktisch ist es von grossem Vorteil, wenn man auf der Obertafel den Sinn umkehrt (s. Fig. 4), d. h. dieselbe aus der Untertafel durch Drehung um 180° entstehen lässt, sodass sich bei völliger Deckung beider Tafeln immer je zwei reciproke Werte gegenüberstehen. Dann erfolgt das Multiplizieren, wie

Fig. 1.

A

B

1) Vergl. Fuller's Apparat, Dyck's Katalog S. 142, Nr. 9.

das oben beschriebene Dividieren, d. h. indem man beide Faktoren zur Deckung bringt und das Resultat auf der Obertafel an demjenigen Einspunkt der Untertafel abliest, der bei dieser Einstellung innerhalb des Rahmens der Obertafel fällt. Dagegen dividiert man zwei Zahlen durcheinander, indem man den Dividenden auf der Obertafel aufsucht, ihn auf einen Einspunkt der Untertafel stellt und das Resultat auf der Obertafel an der von dem Divisor der Untertafel angezeigten Stelle abliest. Welchen von den vier Einspunkten man hierbei zu wählen hat, geht aus der Lage des Divisors auf der Untertafel hervor; da derselbe das Resultat anzeigt, muss er innerhalb des Rahmens der Obertafel fallen. Dieses infolge der Auswahl unter vier Einspunkten auf den ersten Blick vielleicht nicht einfach genug scheinende Verfahren kann auch dadurch ersetzt werden, dass man zuerst beide

Fig. 2.

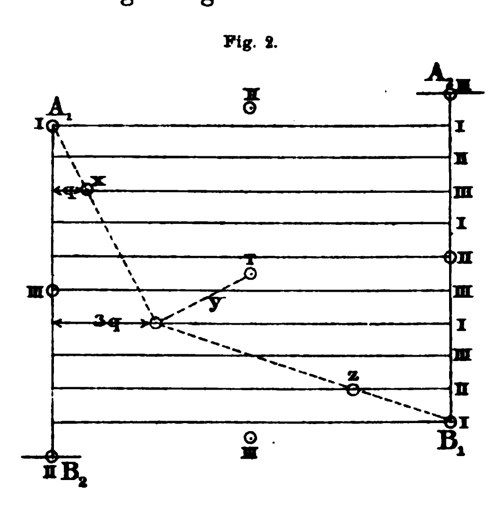
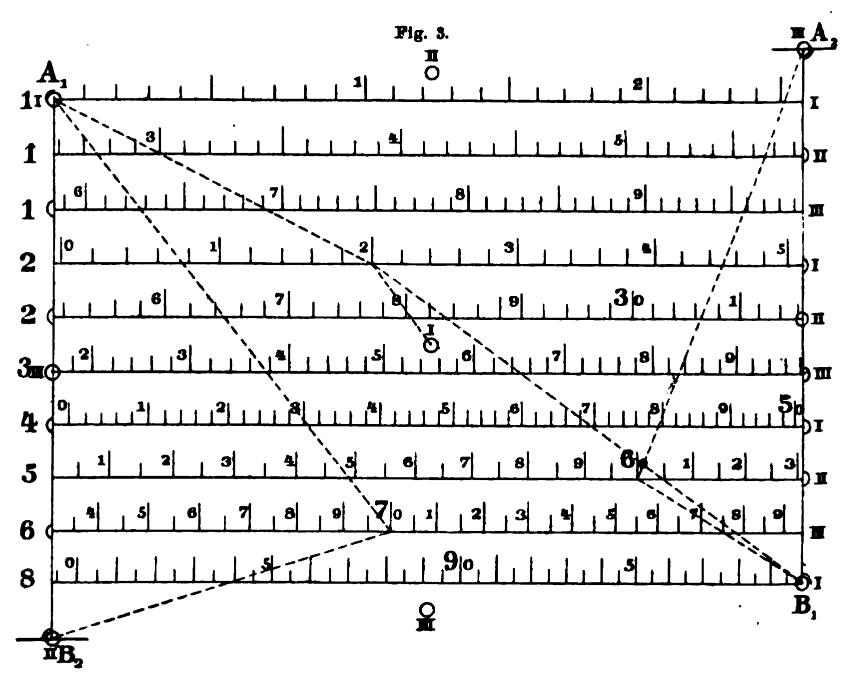


Fig. 3.



Tafeln zu völliger Deckung bringt, auf der Untertafel den Divisor aufsucht, dadurch auf der Obertafel den reciproken Wert desselben findet und auf diese Weise die Division unmittelbar in die so überaus bequeme Multiplikation überführt.

Aber die Tafeln erfüllen neben bedeutender Raumersparnis noch einen weiteren Zweck. Sie gestatten nämlich, Quadrat- und Kubikwurzeln auf eine Weise zu ziehen, die fast noch einfacher genannt werden darf, als das für Multiplikation und Division angegebene Ver-

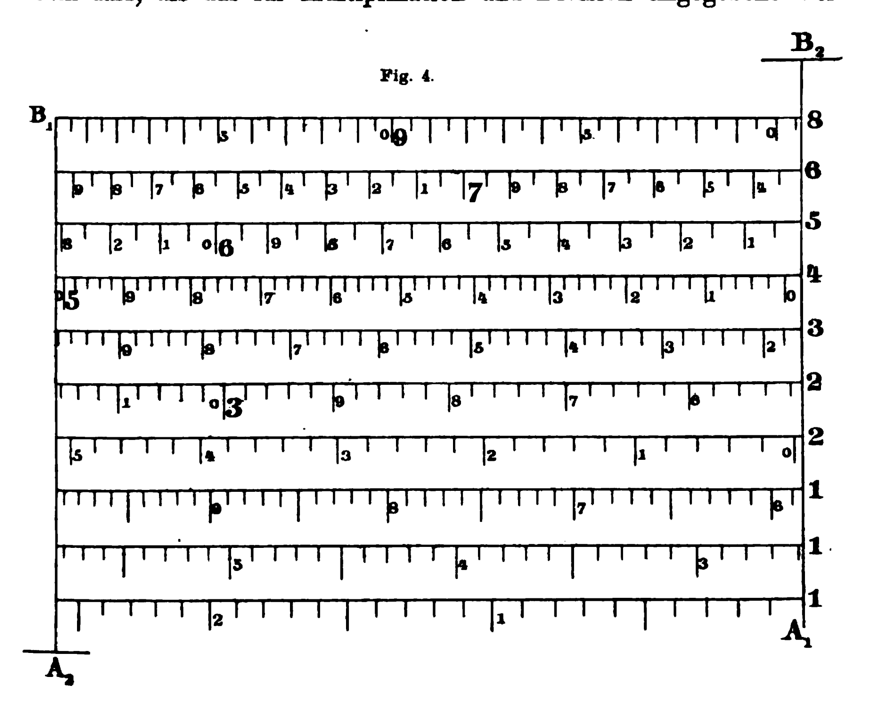


Fig. 4.

fahren. Beide Rechenoperationen erfolgen nur mit Hilfe einer Tafel, z. B. der Untertafel, und geschehen, ähnlich wie das Rechnen mit d'Ocagne's „abaques à alignement" mittels geradliniger Verbindung entsprechender Punkte (z. B. durch Anlegen einer Kante der durchsichtigen Obertafel). Wünscht man die Quadratwurzel aus einer Zahl a zu ziehen, so hat man a nur mit einem Einspunkt zu verbinden und den Schnittpunkt mit der die Verbindungslinie halbierenden Zeile zu suchen. Dieser giebt unmittelbar $\sqrt{a}$ an. Welchen der vier Einspunkte man hierbei wählt, sagt folgende Regel: A_1 und A_2 entsprechen den einstelligen, B_1 und B_2 den zweistelligen Zahlen. Ist die Zeile, auf welcher A steht, links durch einen Halbkreis markiert, so muss ein linker Einspunkt, ist der Halbkreis rechts, so muss ein rechter Eins-

punkt gewählt werden. Damit entspricht jedem bestimmten Falle ein bestimmter Einspunkt, z. B. $\sqrt{7,0}$ (7,0 ist mit A_1 zu verbinden) $= 2,646$, $\sqrt{70}$ (7,0 mit B_2 zu verbinden) $= 8,37$. $\sqrt{6} = 2,449$; $\sqrt{60} = 7,75$.

Auf ähnliche Weise erfolgt auch das Kubikwurzelziehen. Zu diesem Zwecke sind auf der Untertafel neun durch Kreise markierte Punkte angegeben, welche in gleicher Weise wie die Zeilen durch römische Zahlen cyklisch numeriert sind. Von ihnen sind die ersten drei auf der Geraden $A_1 A_2$ gelegen und entsprechen den einstelligen Zahlen. Die zweiten drei Punkte liegen auf einer Parallelen zu $A_1 A_2$ durch den Mittelpunkt der Tafel und entsprechen den zweistelligen Zahlen. Die letzten drei Punkte sind auf $B_1 B_2$ gelegen und gelten für die dreistelligen Zahlen. Man zieht nun die Kubikwurzel aus einer Zahl a, indem man a mit demjenigen der drei in Frage kommenden Punkte verbindet, der die gleiche römische Nummer trägt, wie die Zeile, auf der a steht. Dann liegt die gesuchte Kubikwurzel auf der Verbindungslinie im ersten Drittel vom markierten Punkte aus gerechnet, z. B. $\sqrt[3]{2,2} = 1,300$; $\sqrt[3]{22} = 2,802$; $\sqrt[3]{220} = 6,04$.

Was den Beweis für beide Verfahren anlangt, so wird es genügen, die Grundzüge desselben an der Hand des Kubikwurzelziehens anzudeuten.

Wir unterscheiden hierbei neun Fälle, je nachdem a einstellig, zweistellig oder dreistellig und je nachdem es auf einer $(3n-2)$ten, $(3n-1)$ten oder $3n$ten Zeile gelegen ist, und setzen im nachfolgenden $2(3m-1)$ z. B. 10 Zeilen voraus. Jede Zeile habe die Länge z. Die Zeilen haben gleichen Abstand von einander.

1. Die Zahl $a = a_1$ ist einstellig und auf der $(3n-2)$ten Zeile gelegen. a_1 ist nach der Regel mit A_1 zu verbinden und von A_1 aus das Drittel zu nehmen (S. Fig. 2). Dadurch kommt man zu einer Zahl x, die auf der $n$ten Zeile gelegen und von $A_1 B_2$ um q entfernt ist, wenn $3q$ der Abstand der Zahl a von $A_1 B_2$ ist. Es ergiebt sich daher die Beziehung

$$\log x = (n-1)z + q$$
$$\log a_1 = (3n-3)z + 3q$$

woraus

$$x = \sqrt[3]{a_1}$$

folgt.

2. Die Zahl $a = a_2$ ist zweistellig, also $a_2 = 10 a_1$ und auf der $(3n-2)$ten Zeile gelegen. a_2 ist mit Punkt I der zweiten Punktgruppe zu verbinden und von I aus das Drittel zu nehmen. Dies führt zu einer Zahl y, die zu der im vorigen Falle gefundenen Zahl x in bestimmter Beziehung steht. y liegt auf der $(n+2m-1)$ten Zeile. Es folgt daher

$$\log y = (n + 2m - 2)\,z + \frac{z}{2} + \frac{3q - \frac{z}{2}}{3} = (n-1)\,z + q + \frac{2\,(3m-1)\,z}{3}$$

oder, da $2\,(3m-1)\,z = 1 = \log\ 10$ ist,

$$\log y = \log x + \frac{\log 10}{3}$$

$$y = \sqrt[3]{10} \cdot x = \sqrt[3]{10 a_1} = \sqrt[3]{a_2}.$$

3. Die Zahl $a = a_3$ ist dreistellig, also $a_3 = 100 a_1$ und auf der $(3n-2)$ten Zeile gelegen. a_3 ist mit B_1 zu verbinden und das Drittel zu nehmen. Dadurch erhält man eine Zahl z, welche auf der $(n+4m-2)$ten Zeile gelegen und von $A_2 B_1$ um $\frac{z-3q}{3}$ entfernt ist. Man hat daher

$$\log z = (n + 4m - 2)\,z - \frac{z-3q}{3} = (n-1)\,z + q + \frac{2}{3}\,[2\,(3m-1)\,z]$$

$$= \log x + \frac{2}{3} \log 10$$

$$z = x \cdot \sqrt[3]{100} = \sqrt[3]{100 a_1} = \sqrt[3]{a_3}.$$

In ähnlicher Weise ist der Beweis für die übrigen 6 Fälle, d. h. für die Zahlen der $(3n-1)$ten und $3n$ten Zeile, sowie für das Quadratwurzelziehen zu führen.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, dass eine Tafel, welche auf den angegebenen Grundsätzen beruht, demnächst im Handel erscheinen wird.

Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten.

Von C. Runge in Hannover.

Die Abhängigkeit zwischen zwei messbaren Grössen kann, strenge genommen, durch Beobachtung überhaupt nicht gefunden werden. Denn selbst wenn man von den Beobachtungsfehlern absehen und die Beobachtungen als absolut genau voraussetzen wollte, so bliebe doch immer der Umstand, dass durch Beobachtung immer nur eine diskrete Reihe einander entsprechender Wertepaare der beiden Grössen gefunden werden könnte. Selbst wenn wir die Reihe als unendlich voraussetzten, so würde nicht einmal eine „analytische"[1]) Funktion dadurch bestimmt sein. Gesetzt z. B., es seien für eine unendliche Reihe von äquidistanten Werten der einen Grösse die Werte der andern Grösse absolut genau bekannt, so wäre das Abhängigkeitsverhältnis damit noch nicht gegeben, selbst dann nicht, wenn wir nur nach der „analytischen" Funktion fragen, die das Abhängigkeitsverhältnis darstellen soll. Denn es ist klar, dass man auf mannigfache Weise eine periodische Funktion bilden kann, die für alle jene äquidistanten Werte verschwindet und daher, zu einer Funktion addiert, ihre Werte an jenen Stellen nicht ändert. Dennoch betrachtet man in den beobachtenden Wissenschaften eine Funktion durch eine solche Tabelle ihrer Werte als wohl definiert, sobald die Argumente nur hinreichend nahe aneinander liegen. Wie dicht sie liegen müssen, darüber werden meines Wissens klare Kriterien nicht aufgestellt. Man beschränkt sich darauf zu verlangen, dass die beobachteten Werte graphisch aufgetragen eine „glatte Kurve" geben. Eine Wellenlinie, die zwischen je zwei aufeinanderfolgenden beobachteten Punkten ein Maximum oder Minimum hätte, würde man stillschweigend ausschliessen.

Dieses übliche Verfahren kann in der That auch mathematisch gerechtfertigt werden.

Man kann nämlich auch durch eine Tabelle eine Funktion wohl definieren, wenn man zugleich ein Interpolationsverfahren vorschreibt.

1) Im Sinne von Weierstrass.

mit Hülfe dessen die zwischenliegenden Werte gefunden werden sollen. Allerdings liegt eine gewisse Willkür in der Wahl des Interpolationsverfahrens. Vor allem bieten sich zwei Möglichkeiten dar, die wir beide einer näheren Betrachtung unterziehen wollen.

Erstes Verfahren. Es sei x die unabhängige Veränderliche und es seien die Werte der Funktion für $x = 0, h, 2h, \dots$ gegeben. Man bilde dann eine ganze Funktion ersten Grades $g_1(x)$, die für $x = 0$ und $x = h$ die gegebenen Werte annimmt, eine ganze Funktion zweiten Grades $g_2(x)$, die für $x = 0, h, 2h$ die gegebenen Werte annimmt u. s. f. eine ganze Funktion $n$ten Grades $g_n(x)$, die für $x = 0, h, 2h, \dots nh$ die gegebenen Werte annimmt. Dann fragt es sich, ob $\lim g_n(x)$ konvergent ist. So weit die Konvergenz reicht, so weit lässt sich dann die Funktion durch $\lim g_n(x)$ definieren.

Zweites Verfahren. Die Werte der Funktion seien für $x = o, \pm h, \pm 2h, \dots$ gegeben. Man bilde eine ganze Funktion ersten Grades $G_1(x)$, die für $x = 0$ und $x = h$ die vorgeschriebenen Werte annimmt, eine ganze Funktion zweiten Grades $G_2(x)$, die für $x = -h$, $x = 0$, $x = +h$ die vorgeschriebenen Werte annimmt u. s. f., eine ganze Funktion $(2n-1)$ten Grades $G_{2n-1}(x)$, die für $x = -(n-1)h$, $-(n-2)h, \dots, 0, h, \dots, +nh$ die vorgeschriebenen Werte annimmt und eine ganze Funktion $2n$ten Grades $G_{2n}(x)$, die für $x = -nh, \dots, 0, \dots, +nh$ die vorgeschriebenen Werte annimmt. Dann fragt es sich, ob $\lim G_\lambda(x)$ konvergent ist. So weit die Konvergenz reicht, ist dann die Funktion durch $\lim G_\lambda(x)$ zu definieren.

Es ist lehrreich, einige einfache Beispiele nach diesen beiden Verfahren durchzuführen und zu sehen, an welche Bedingungen die Konvergenz geknüpft ist.

Erstes Verfahren. Die für $x = 0, h, 2h, \dots$ vorgeschriebenen Werte seien: $1, e^h, e^{2h}, \dots$

Schreibt man:

$$g_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-h)}{1 \cdot 2} + \cdots + a_n \frac{x(x-h)\,.\,.\,(x-(n-1)h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n},$$

so ergiebt die Differenzenrechnung bekanntlich $a_\nu h^\nu = \Delta^\nu g_n$ (für $x = 0$).

In unserm Fall ist daher

$$a_\nu h^\nu = (e^h - 1)^\nu$$

und, wenn man $e^h - 1 = u$, $\frac{x}{h} = v$ setzt

$$g_n(x) = 1 + u \cdot v + u^2 \frac{v(v-1)}{1 \cdot 2} + \cdots + u^n \frac{v(v-1)\cdot\cdot(v-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}$$

Mithin ist $g_n(x)$ gleich der Summe der ersten $n+1$ Glieder in der binomischen Reihe für $(1+u)^v$. Für die Werte von x, die, nicht in

der Tabelle vorkommen, ist v nicht gleich einer ganzen positiven Zahl. Die binomische Reihe für $(1+u)^v$ ist alsdann unendlich, und damit sie konvergiert, darf u dem absoluten Betrage nach nicht grösser als 1 sein, oder was desselbe ist, h muss entweder negativ oder nicht grösser als $l(2)$ sein. Dann und nur dann konvergiert $\lim g_n(x)$ und ist gleich $(1+u)^v$ d. i. gleich e^x und zwar für beliebige Werte von x. Sobald h grösser ist als $l(2)$, so lässt sich das Interpolationsverfahren nicht mehr anwenden. Oder mit andern Worten: Soll nach diesem Interpolationsverfahren eine Kurve gezogen werden, die für die Abscissen $0, h, 2h, \ldots$ die Ordinaten $1, e^h, e^{2h}, \ldots$ hat, so ergiebt sich eine bestimmte Curve nur dann, wenn diese Punkte dicht genug aneinander liegen ($h \leqq l(2)$) oder wenn h negativ ist. Für andere Werte von h kann man zwar die Näherungskurven durch die vorgeschriebenen Punkte legen; aber zwischen ihnen weichen die Näherungskurven um beliebig grosse Beträge von einander ab.

Zweites Verfahren. Die für $x = 0, \pm h, \pm 2h, \ldots$ vorgeschriebenen Werte seien: $1, e^{\pm h}, e^{\pm 2h}, \ldots$

Schreibt man:

$$G_{2n}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-h)}{1\cdot 2} + a_3 \frac{(x+h)\,x\,(x-h)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$+ a_{2n} \frac{(x+(n-1)h)\,(x+(n-2)h)\ldots x\,(x-h)\ldots(x-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}$$

und

$$G_{2n+1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 \frac{x(x-h)}{1\cdot 2} + a_3 \frac{(x+h)\,x\,(x-h)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$
$$+ a_{2n+1} \frac{(x+nh)\cdots(x+h)\,x\,(x-h)\cdots(x-nh)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}$$

so ergiebt die Differenzenrechnung auf bekannte Weise

$$a_0 = G, \qquad a_1 h = \Delta G \text{ für } x = 0$$
$$a_2 h^2 = \Delta^2 G,\ a_3 h^3 = \Delta^3 G \text{ für } x = -h$$
$$a_4 h^4 = \Delta^4 G,\ a_5 h^5 = \Delta^5 G \text{ für } x = -2h \text{ u. s. f.}$$

In dem Schema der Differenzen:

$$\begin{array}{llll}
\cdot & \cdot & \cdot & \\
G(-2h) & & & \\
 & \Delta G(-2h) & & \\
G(-h) & & \Delta^2 G(-2h) & \\
 & \Delta G(-h) & & \Delta^3 G(-2h) \\
G(0) & & \Delta^2 G(-h) & \\
 & \Delta G(0) & & \Delta^3 G(-h) \\
G(h) & & \Delta^2 G(0) & \\
 & \Delta G(h) & & \\
G(2h) & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

stehen, wenn die Differenzen immer in der halben Höhe zwischen den beiden von einander abgezogenen Grössen geschrieben werden, die Werte a_0, $a_2 h^2$, $a_4 h^4$, ... auf einer Horizontalreihe und $a_1 h$, $a_3 h^3$, ... auf einer anderen Horizontalreihe.

Auf diese Weise findet man aus der Tabelle der Differenzen

	Δ	Δ^2	Δ^3	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
e^{-2h}				
	$e^{-2h}\cdot u$			
e^{-h}		$e^{-2h}\cdot u^2$		
	$e^{-h}\cdot u$		$e^{-2h}\cdot u^3$	
1		$e^{-h}\cdot u^2$		etc.
	$1\cdot u$		$e^{-h}\cdot u^3$	
e^{h}		$1\cdot u^2$		
	$e^{h}\cdot u$		$1\cdot u^3$	
e^{2h}		$\vdots$		

wo u für $e^h - 1$ geschrieben ist, $a_0 = 1$, $a_2 h^2 = e^{-h} u^2$, $a_4 h^4 = e^{-2h} u^4$, etc. und $a_1 h = u$, $a_3 h^3 = e^{-h} u^3$, $a_5 h^5 = e^{-2h} u^5$ etc.

Mithin

$$G_{2n}(x) = 1 + u \cdot \frac{x}{h} + e^{-h} u^2 \frac{x(x-h)}{h \cdot 2h} + e^{-h} u^3 \frac{(x+h)x(x-h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} + \cdots$$
$$+ e^{-nh} \cdot u^{2n} \frac{(x+(n-1)h) \cdots (x+h)x(x-h) \cdots (x-nh)}{h \cdots (n-1)h\, nh\, (n+1)h \cdots 2nh}$$

und

$$G_{2n+1}(x) = 1 + u \cdot \frac{x}{h} + e^{-h} u^2 \frac{x(x-h)}{h \cdot 2h} + e^{-h} u^3 \frac{(x+h)x(x-h)}{h \cdot 2h \cdot 3h} + \cdots$$
$$+ e^{-nh} u^{2n+1} \cdot \frac{(x+nh) \cdots (x+h)x(x-h) \cdots (x-nh)}{h \cdots nh \cdot (n+1)h\,(n+2)h \cdots (2n+1)h}$$

Es ist daher $\lim G_\lambda(x)$, wenn $\frac{x}{h} = v$ gesetzt wird, gleich der unendlichen Reihe:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + e^{-h} \cdot u^2 \cdot \frac{v \cdot v-1}{1 \cdot 2} + e^{-2h} u^4 \cdot \frac{v+1 \cdot v \cdot v-1 \cdot v-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots \\ + u \cdot v + e^{-h} \cdot u^3 \cdot \frac{v+1 \cdot v \cdot v-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + e^{-2h} u^5 \cdot \frac{v+2 \cdot v+1 \cdot v \cdot v-1 \cdot v-2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots\cdots \end{array}\right.$$

Wie man aus dem Quotienten zweier benachbarter Glieder erkennt, divergiert die Reihe, wenn $e^{-h}u^2 > 4$ ist, und konvergiert, wenn $e^{-h}u^2 < 4$ ist. Nun ist $e^{-h}u^2 = (e^{h/2} - e^{-h/2})^2$. Zur Konvergenz ist also notwendig, dass h nicht ausserhalb der beiden Werte liege, für die

$$\mathfrak{Sin}\,\frac{h}{2} = \pm 1, \text{ d. i. } h = \pm 1.76275 \cdots$$

Dass die Reihe wirklich für beliebige Werte von x, soweit sie konvergiert, die Funktion e^x darstellt, ergiebt sich, indem man die Eigenschaften von $G_{2n}(x)$ auf die der oben betrachteten Funktion $g_{2n}(x)$ zurückführt. Nach den obigen Bezeichnungen ist $g_{2n}(x)$ eine ganze Funktion $2n^{\text{ten}}$ Grades, die für $x = 0, h, 2h, \cdots, 2nh$ die Werte $1, e^h, e^{2h}, \cdots, e^{2nh}$ annimmt. $G_{2n}(x)$ ist eine ganze Funktion $2n^{\text{ten}}$ Grades,

die für $x = -nh, -(n-1)h, \cdots 0, h \cdots, nh$ die Werte $e^{-nh}, e^{-(n-1)h}, \cdots, e^{-h}, 1, e^{h}, \cdots, e^{nh}$ annimmt. Folglich ist

$$G_{2n}(x) = e^{-nh} \cdot g_{2n}(x + nh).$$

Nun fanden wir oben, dass $g_{2n}(x)$ gleich der Summe der ersten $2n + 1$ Glieder in der Taylor'schen Entwickelung von $(1 + u)^v$ ist. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz haben wir daher

$$(1 + u)^v = g_{2n}(x) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1 + z)^v \cdot u^{2n+1}}{z^{2n+1}(z - u)} dz$$

wobei das Integral über eine Kontour im Gebiete der komplexen Zahlen zu erstrecken ist, welche den Punkt u, aber nicht den Punkt -1 einschliesst. Setzt man nun links und rechts für x den Wert $x + nh$ und demnach für v den Wert $v + n$ ein, während u unverändert bleibt, so ergiebt sich

$$(1 + u)^v (1 + u)^n = g_{2n}(x + nh) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(1 + z)^n (1 + z)^v u^{2n+1}}{z^{2n+1}(z - u)} dz$$

und, wenn durch $(1 + u)^n = e^{nh}$ auf beiden Seiten dividiert wird:

$$(1 + u)^v = G_{2n}(x) + \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{1 + z}{1 + u}\right)^n \cdot \left(\frac{u}{z}\right)^{2n+1} \cdot \frac{(1 + z)^v}{z - u} dz.$$

Das Integral wird für hinreichend grosse Werte von n beliebig klein, wenn nur für alle Punkte der Kontour $\frac{1+z}{1+u} \cdot \frac{u^2}{z^2}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 1 ist. Man kann die Kontour so führen, dass sie dicht um den Teil der reellen Achse von -1 bis $-\infty$ herumläuft, ihn ausschliessend, und dann in einem unendlich grossen Kreise um die ganze komplexe Ebene herum. Der grösste Wert des absoluten Betrages von $\frac{1+z}{z^2}$ ist dabei gleich $\frac{1}{4}$. Es braucht daher nur $\frac{u^2}{1+u}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als 4 zu sein, damit $\lim G_{2n}(x)$ gleich $(1 + u)^v = e^x$ ist. Das ist dieselbe Konvergenzbedingung, die wir auch oben fanden.

Wie bei der Interpolation nach dem ersten Verfahren, so finden wir also auch bei dem zweiten Verfahren eine Grenze für die Grösse des Intervalles h. Aus der Tabelle, in der wir uns die Werte e^0, $e^{\pm h}$, $e^{\pm 2h}$, ... ausgerechnet denken, wird in der That die Funktion e^x durch Interpolation gefunden, wenn h nicht grösser ist als 2 𝔄𝔯 𝔖𝔦𝔫 1. Wenn aber h grösser ist als 2 𝔄𝔯 𝔖𝔦𝔫 1, so kann man die Interpolation auf die Tabelle nicht anwenden. Denn wenn man sich auch die Näherungskurven durch die vorgeschriebenen Punkte gezogen denkt,

so weichen sie zwischen den vorgeschriebenen Punkten um beliebig grosse Beträge von einander ab.

Drittes Beispiel. Es soll durch das zweite Verfahren eine Funktion gesucht werden, welche für äquidistante Werte der Veränderlichen die Werte

$$\ldots\ldots\; 0,\; -1,\; 0,\; +1,\; 0,\; -1,\; 0\; \ldots\ldots$$

annimmt.

Das Schema der Differenzen giebt:

	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
:				
	:			
0				
	− 1			
− 1		+ 2	− 2	
	+ 1			
0		0	− 2	0
	+ 1			
+ 1		− 2	+ 2	+ 4
	− 1			
0		0	+ 2	0
	− 1			
− 1		+ 2		
	+ 1			
0				

Mithin erhalten wir die unendliche Reihe

$$\frac{x}{h} - 2\,\frac{x+h\cdot x\cdot x-h}{h\cdot 2h\cdot 3h} + 4\cdot\frac{x+2h\cdot x+h\cdot x\cdot x-h\cdot x-2h}{h\cdot 2h\cdot 3h\cdot 4h\cdot 5h} - \cdots$$

und haben nur zu untersuchen, ob diese Reihe konvergiert. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder ist

$$-2\cdot\frac{(x+nh)(x-nh)}{2nh\cdot(2n+1)h} = -\frac{x^2}{n(2n+1)h^2} + \frac{n}{2n+1}$$

und wird also für hinreichend grosse Werte von n, was auch für x und h für Werte angenommen sein mögen, kleiner als $\frac{1}{2}$. Die Reihe konvergiert mithin für alle Werte von x und h.

Es lässt sich in der folgenden Weise zeigen, dass diese Reihe nichts anderes ist als $\sin\left(\frac{x}{h}\frac{\pi}{2}\right)$.

Wir fanden oben

$$e^x = 1 + e^{-h}u^2\,\frac{v\cdot v-1}{1\cdot 2} + e^{-2h}u^4\,\frac{v+1\cdot v\cdot v-1\cdot v-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

$$+ u\cdot v + e^{-h}u^3\,\frac{v+1\cdot v\cdot v-1}{1\cdot 2\cdot 3}\; e^{-2h}u^5\,\frac{v+2\cdot v+1\cdot v\cdot v-1\cdot v-2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$$

wo $v = \frac{x}{h}$ und $u = e^h - 1$ geschrieben war.

Wir schreiben diese Formel in etwas anderer Weise:

$$e^{hv} = A + (e^h - 1)\,B,$$

wo

$$A = 1 + e^{-h}u^2 \frac{v \cdot v - 1}{1 \cdot 2} + e^{-2h}u^4 \cdot \frac{v+1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

$$B = v + e^{-h}u^2 \frac{v+1 \cdot v \cdot v - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + e^{-2h}u^4 \cdot \frac{v+2 \cdot v+1 \cdot v \cdot v - 1 . v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

Man bemerke nun, dass $e^{-h}u^2 = 4\,\mathfrak{Sin}^2 \frac{h}{2}$ ist und sich also nicht ändert, wenn man h in $-h$ verwandelt, dass folglich auch A und B bei Verwandlung von h in $-h$ unverändert bleiben.

Man hat daher neben der Gleichung

$$e^{hv} = A + (e^h - 1)\, B$$

auch die Gleichung

$$e^{-hv} = A + (e^{-h} - 1)\, B.$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\mathfrak{Sin}\,(hv) = \mathfrak{Sin}\, h \cdot B$$

oder

$$\mathfrak{Sin}\, x =$$

$$= \mathfrak{Sin}\, h \left[v + 2^2 \mathfrak{Sin}^2 \frac{h}{2} \frac{v+1 \cdot v \cdot v - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 2^4 \mathfrak{Sin}^4 \frac{h}{2} \cdot \frac{v+2 \cdot v+1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots \right]$$

Verwandeln wir nun x in ix und zugleich h in ih, so dass $v = \frac{x}{h}$ also ungeändert bleibt, so ergiebt sich, nachdem der Faktor i weggehoben ist:

$$\sin x =$$

$$= \sin h \left[v - 2^2 \sin^2 \frac{h}{2} \frac{v+1 \cdot v \cdot v - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 2^4 \sin^4 \frac{h}{2} \frac{v+2 \cdot v+1 \cdot v \cdot v - 1 \cdot v - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots \right]$$

Für $h = \frac{\pi}{2}$ geht diese Reihe in die oben gefundene Reihe über.

Es zeigt sich also, dass die Tabelle der Werte ... 0, − 1, 0, + 1, 0, − 1, 0 ... genügt um die Sinusfunktion zu definieren. Wenn wir die Kurve, die das gewählte Interpolationsverfahren liefert, eine „glatte“ Kurve nennen, so würden wir das Resultat so aussprechen können: Legt man durch die äquidistanten Ordinaten ... 0, − 1, 0, + 1, 0, − 1, ... eine glatte Kurve, so erhält man die Sinuskurve.

Diese Beispiele beziehen sich aber noch nicht eigentlich auf den in den beobachtenden Wissenschaften vorliegenden Fall. Denn erstens hat man es niemals mit einer unendlichen Reihe von beobachteten Werten zu thun und zweitens sind beobachtete Werte niemals absolut genau. Ich lasse den zweiten Umstand ausser Betracht und stelle die Aufgabe so: „Es seien die Werte einer Funktion von x für eine endliche Anzahl äquidistanter Werthe von x gegeben. Unter welchen Umständen kann man erwarten, dass die ganze rationale Funktion niedrigsten Grades, die für dieselben Werte von x die gegebenen Werte annimmt, auch eine gewisse Annäherung an die Funktion für

die Zwischenwerte von x darstellt?" Oder besser ausgedrückt, unter welchen Umständen wird die Annäherung, wenn man mehr und mehr äquidistante Werte von x zwischen gegebenen Grenzen einschaltet, eine beliebige Genauigkeit erreichen?

Um dieser Frage näher zu treten, soll der Cauchy'sche Integralsatz auf die Differenzenrechnung erweitert werden. Es sei $f(x)$ eine Funktion eines complexen Argumentes, die sich in irgend einem zusammenhängenden Gebiete regulär verhält, so dass

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

wenn das Integral um den Rand des Gebietes erstreckt wird. Es seien nun $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n von einander verschiedene Werte der Veränderlichen, die im Innern des betrachteten Gebietes liegen.

Nun ist:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x_\alpha} + \frac{x-x_\alpha}{z-x_\alpha}\cdot\frac{1}{z-x}$$

und daher:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x_1} + \frac{x-x_1}{z-x_1}\cdot\frac{1}{z-x}$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-x_1} + \frac{x-x_1}{z-x_1}\cdot\frac{1}{z-x_2} + \frac{x-x_1}{z-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{z-x_2}\cdot\frac{1}{z-x}$$

u. s. w.

Bezeichnet man mit $g_\nu(x)$ die ganze rationale Funktion νten Grades:

$$g_\nu(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\nu),$$

so kann man die sich ergebende allgemeine Formel so schreiben:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{g_1(z)} + \frac{g_1(x)}{g_2(z)} + \frac{g_2(x)}{g_3(z)} + \cdots + \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(z)} + \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\cdot\frac{1}{z-x}.$$

Indem man diese Entwicklung in das Integral von Cauchy einsetzt, ergiebt sich für $f(x)$ die Entwicklung:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{g_1(z)}\,dz + \frac{g_1(x)}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{g_2(z)}\,dz + \cdots + \frac{g_{n-1}(x)}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{g_n(z)}\,dz$$
$$+ \frac{g_n(x)}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{g_n(z)}\,\frac{dz}{z-x}.$$

Die Summe der ersten n Glieder auf der rechten Seite dieser Gleichung bildet eine ganze rationale Funktion von x, deren Grad nicht höher ist als $n-1$. Bezeichnet man sie mit $G_n(x)$, so ist also:

$$f(x) = G_n(x) + \frac{g_n(x)}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{g_n(z)}\,\frac{dz}{z-x}.$$

Da nun $g_n(x)$ für die n Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwindet, so stimmt $G_n(x)$ an diesen Stellen mit $f(x)$ überein. Nun ist aber eine ganze rationale Funktion von nicht höherem als dem $n-1$ten Grade durch n ihrer Werte eindeutig bestimmt. Folglich stellt $G_n(x)$ die Funktion niedrigsten Grades dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit $f(x)$ übereinstimmt. Es seien nun zwei reelle Werte a und b $(b > a)$ gegeben. Wir denken uns dann das Intervall a bis b in $n-1$ gleiche Teile geteilt und setzen $x_1 = a$, $x_n = b$, während $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ die Teilpunkte in der Reihenfolge von a bis b bezeichnen. Von der Funktion $f(x)$ soll die Annahme gemacht werden, dass sie eine analytische Funktion ist, die sich in dem ganzen Intervall von a bis b regulär verhält, so dass sich mithin in der komplexen Zahlenebene ein Gebiet angeben lässt, das die ganze Strecke a bis b umschliesst und in seinem Innern sowohl wie auf seinem Rande nur Punkte enthält, in denen sich $f(x)$ regulär verhält. Um den Rand dieses Gebietes erstrecken wir das Cauchy'sche Integral und haben, wie oben gezeigt wurde:

$$f(x) = G_n(x) + \frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)}\,\frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Wenn wir nun nachweisen könnten, dass für hinreichend grosse Werte von n auf dem Rande des Gebietes $g_n(x)$ absolut genommen gegen $g_n(z)$ beliebig klein wird, so würde damit gezeigt sein, dass $G_n(x)$ beliebig wenig von $f(x)$ verschieden ist.

Um darüber Aufschluss zu gewinnen, betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n(z)} \quad \left(c = \frac{a+b}{2}\right)$$

als Funktion des komplexen Arguments z. Unter den n Werten, die dieser Ausdruck haben kann, treffen wir die folgende Auswahl.

Wenn man z die Strecke a bis b nicht überschreiten lässt, so sind dadurch die n Werte von einander getrennt, so dass sie bei kontinuierlicher Änderung von z nicht in einander übergehen können. Wir wählen nun denjenigen unter den Werten, der, wenn z ins Unendliche übergeht, gleich 1 wird. Der Logarithmus wird dann im Unendlichen gleich Null und wir können daher den Logarithmus des gewählten Wertes so schreiben:

$$\log\left(\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n z}\right) = \int_{\infty}^{z}\left(\frac{1}{n}\,\frac{g_n'(z)}{g_n(z)} - \frac{1}{z-c}\right)dz$$

Dabei ist nur zu beachten, dass der Integrationsweg die Strecke a bis b nicht überschreiten darf.

Bezeichne nun r für irgend einen Wert z den kleinsten Abstand zwischen z und allen Punkten der Strecke a_0 bis b, wo a_0 für $a - \frac{b-a}{n-1}$ geschrieben ist; dann wird für Werte von n, die grösser sind als $\frac{b-a_0}{r}$, der absolute Betrag von $z - x_\alpha$ grösser sein als der von $x_\alpha - x_{\alpha-1}$ $= \frac{b-a_0}{n}$. Daher lässt sich $\log\left(1 + \frac{x_\alpha - x_{\alpha-1}}{z - x_\alpha}\right)$ in eine konvergente Reihe nach Potenzen von $\frac{x_\alpha - x_{\alpha-1}}{z - x_\alpha}$ entwickeln und es wird der Unterschied zwischen $\log\left(1 + \frac{x_\alpha - x_{\alpha-1}}{z - x_\alpha}\right) = \log\frac{z - x_{\alpha-1}}{z - x_\alpha}$ und dem ersten Gliede der Entwickelung $\frac{b-a_0}{n(z-x_\alpha)}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a_0}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{(z-x_\alpha)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a_0}{nr}}$$

Bedeutet x den Punkt der Strecke ab, der dem Punkte z am nächsten liegt, so kann man a fortiori hierfür setzen:

$$\frac{1}{2}\frac{(b-a_0)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(z-x)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{b-a_0}{nr}}$$

Mithin wird die Summe

$$\sum \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{z - x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

von der Summe

$$\frac{1}{b-a_0} \sum \log\frac{z - x_{\alpha-1}}{z - x_\alpha} = \frac{1}{b-a_0}\log\frac{z-x_0}{z-x_n} \quad \left(x_0 = x_1 - \frac{b-a}{n-1}\right)$$

dem absoluten Betrage nach weniger abweichen als

$$\frac{1}{2}\frac{(b-a_0)}{n} \cdot \frac{1}{(z-x)^2} \frac{1}{1 - \frac{b-a}{nr}}$$

Nun schreiben wir:

$$\log\left(\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n(z)}\right) = \int_\infty^z \left[\frac{1}{n}\left(\frac{1}{z-x_1} + \frac{1}{z-x_2} + \cdots + \frac{1}{z-x_n}\right) - \frac{1}{z-c}\right] dz$$

Denken wir uns hier nun die Integration von ∞ bis z auf einer Geraden senkrecht zur Geraden ab vorgenommen, so wird man für das Integral schreiben können:

$$\int_\infty^z \left(\frac{1}{b-a_0}\log\frac{z-x_0}{z-x_n} - \frac{1}{z-c}\right) dz.$$

Der dabei begangene Fehler wird dem absoluten Betrage nach kleiner sein als

$$\frac{1}{2}\,\frac{b-a_0}{n}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{b-a_0}{nr}}\cdot\int\limits_{\infty}^{z}\frac{dz}{(z-x)^2}$$

d. h. kleiner als

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\;\frac{b-a_0}{r-\dfrac{b-a_0}{n}}.$$

Für hinreichend grosse Werte von n wird also der Fehler beliebig klein.

Die Integration lässt sich ausführen und liefert

$$\frac{1}{b-a_0}\left[(z-x_0)\log(z-x_0)-(z-x_n)\log(z-x_n)\right]-\log(z-c)-1.$$

Für hinreichend grosse Werte von n sind x_0 und a_0 beliebig wenig von x_1 und a_1 verschieden, und daher kann man auch schreiben:

$$\frac{1}{b-a}\left[(z-x_1)\log(z-x_1)-(z-x_n)\log(z-x_n\right]-\log(z-c)-1.$$

Setzt man hierin $z-x_1=z-a=z-c+\dfrac{b-a}{2}$,

$$z-x_n=z-b=z-c-\frac{b-a}{2},$$

so kann man auch schreiben;

$$\frac{z-c}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z-a}{z-c}\cdot\frac{z-b}{z-c}\right)-1.$$

Die Logarithmen sind dabei so zu nehmen, dass sie verschwinden, wenn z ins Unendliche rückt, ohne dabei die Strecke ab zu überschreiten. Um das Resultat dieser Überlegung noch einmal zusammenzufassen, so ist also:

$$\lim_{n=\infty}\log\left(\frac{1}{z-c}\sqrt[n]{g_n(z)}\right)=\frac{z-c}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}+\frac{1}{2}\log\left(\frac{z-a}{z-c}\cdot\frac{z-b}{z-c}\right)-1$$

oder auch, indem man auf beiden Seiten $\log(z-c)$ hinzufügt:

$$\lim_{n=\infty}\log\sqrt[n]{g_n(z)}=\frac{z-c}{b-a}\log\frac{z-a}{z-b}+\frac{1}{2}\log(z-a)(z-b)-1.$$

Die rechte Seite ist ein Zweig einer analytischen Funktion, eindeutig definiert für alle Werte von z, die nicht auf der Strecke ab liegen. Wir zerlegen ihn in seinen reellen und imaginären Teil und schreiben

$$\lim_{n=\infty}\log\sqrt[n]{g_n(z)}=U+Vi$$

$$\text{oder}\ \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{g_n(z)}=e^U\cdot e^{Vi}.$$

Der absolute Betrag von $\sqrt[n]{g_n(z)}$ nähert sich danach mit wachsendem n dem Werte e^U. Für hinreichend grosse Werte von n wird daher auf den Kurven $U =$ Konst. der absolute Betrag von $g_n(z)$ sich sehr wenig ändern.

Über den Verlauf der Kurven $U =$ Konst. gewinnt man am besten einen Überblick, wenn man sie sich als die rechtwinkligen Trajektorien der Kurven $V =$ Konst. vorstellt und diese wieder sich als die Stromlinien einer unendlich dünnen reibungslosen Flüssigkeitsschicht vorstellt, deren Geschwindigkeitspotential U ist. Für hinreichend grosse Werte von z ist U beliebig wenig von $\log|z - c|$ verschieden. Die Kurven $U =$ Konst. gehen also für grosse Werte von U mehr und mehr in konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt c über. Verfolgt man von einer dieser Kurven aus die Stromlinien rückwärts d. h. also ins Innere des Gebietes hinein, so ist klar, dass sie nur auf der Geraden ab endigen können. Die Flüssigkeit hat man sich als aus dem Spalt ab dringend und nach allen Seiten ins Unendliche fliessend vorzustellen. In jedem Punkte der Linie ab hat $U + Vi$ zwar zwei Werte; aber, wie man aus der Formel unmittelbar erkennt, sind nur die beiden Werte von V von einander verschieden, während U in jedem Punkte nur einen Wert hat. Ferner zeigt sich sofort, dass U in Punkten, die entweder in Bezug auf die x-Achse oder in Bezug auf die durch c gelegte y-Achse Spiegelbilder von einander sind, den gleichen Wert hat. Auf der Geraden ab hat U seinen kleinsten Wert im Punkte c und nimmt nach beiden Seiten zu. Wenn man statt $U + Vi$ die Funktion $\log \sqrt[n]{g_n(z)}$ betrachtet, so ist die entsprechende Strömung für hinreichend grosse Werte von n sehr nahe dieselbe ausser in der Nähe der Geraden ab. Denn hier haben wir uns jetzt die Flüssigkeit aus den n Löchern $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hervorquellend vorzustellen statt aus einem Spalt. Die Kurven, auf denen der reelle Teil von $\log \sqrt[n]{g_n(z)}$ konstant ist, schnüren sich in der Nähe der Löcher zu je n geschlossenen Kurven ab, von denen jede ein Loch einschliesst. Dies Abschnüren kommt dagegen bei den Kurven $U =$ Konst. nicht vor, für die U durchaus endlich bleibt. Selbst bei $z = c$, wo sich die Kurven $U =$ Konst. zu einem Punkt zusammenziehen, liegt kein eigentliches Abschnüren vor, sondern es rücken die beiden Teile der Kurve, die auf verschiedenen Seiten von ab liegen, auf ein anderes Blatt der Riemann'schen Fläche, das für unser Problem nicht in Betracht kommt.

Für die vorliegende Frage spielt nun diejenige Kurve $U =$ Konst. eine wesentliche Rolle, welche durch die beiden Punkte a und b läuft. Setzen wir in der Form

$$U + Vi = \frac{(z-a)\log(z-a) - (z-b)\log(z-b)}{b-a} - 1,$$

$z = a$ oder $z = b$, so wird beide Male

$$U = \log(b-a) - 1.$$

Schreiben wir ferner

$$z - a = r_a e^{\alpha i}$$
$$z - b = r_b e^{\beta i},$$

so wird:

$$(b-a)\,U = r_a \cos\alpha \log r_a - r_a \sin\alpha \cdot \alpha - r_b \cos\beta \log r_b + r_b \sin\beta \cdot \beta - (b-a).$$

Nun ist aber $r_a \cos\alpha - r_b \cos\beta = b - a$

$$r_a \sin\alpha = r_b \sin\beta,$$

folglich kann man schreiben:

$$(b-a)\,U = (b-a)\log r_a + r_b \cos\beta \log \frac{r_a}{r_b} + r_b \sin\beta\,(\beta - \alpha) - (b-a).$$

Setzt man $z - c = x + yi$, so dass x und y also die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes z sind in einem System, dessen x-Achse in die Grade ab und dessen y-Achse in c auf ab senkrecht steht, so hat man

$$r_b \cos\beta = -\frac{b-a}{2} + x$$
$$r_b \sin\beta = y$$

und daher, wenn $\frac{b-a}{2} = m$ geschrieben wird:

$$2mU = 2m \log r_a - m \log \frac{r_a}{r_b} + x \log \frac{r_a}{r_b} + y\,(\beta - \alpha) - 2m$$
$$= m \log r_a r_b + x \log \frac{r_a}{r_b} + y\,(\beta - \alpha) - 2m.$$

Die Kurven $U =$ Konst. schreiben wir nun

$$U = \log(pm) - 1,$$

wo $p = 2$ derjenigen Kurve entspricht, die durch die Punkte $z = a$ und $z = b$ läuft, während für grössere positive Werte von p die Kurven sich immer weiter ausdehnen.

Die Gleichung

$$U = \log(pm) - 1$$

bringen wir in die Form:

$$\log \frac{r_a}{m}\frac{r_b}{m} + \frac{x}{m} \log \frac{r_a}{r_b} + \frac{y}{m}(\beta - \alpha) = 2 \log p.$$

Hierin bedeutet $\beta - \alpha$ den Winkel bei z in dem Dreieck z, a, b, positiv oder negativ, je nachdem y positiv oder negativ ist. Diese Form zeigt, dass man für verschiedene Wertepaare ab ähnliche Kurven erhält, die zu den Strecken ab ähnlich liegen. Es genügt daher zur

Untersuchung der Kurven $a = -1$ und $b = +1$ und damit $m = 1$ zu setzen. Da ferner die Kurven symmetrisch zur x- und y-Achse liegen, so braucht man sie nur für positive Werte von x und y zu konstruieren. Man berechnet zu dem Ende für eine Reihe von Punkten (x, y) die Werte von

$$\log(r_a r_b) + x \log \frac{r_a}{r_b} + y(\beta - \alpha)$$

oder auch

$$(1 + x) \log r_a + (1 - x) \log r_b + y(\beta - \alpha)$$

und interpoliert zwischen ihnen die Punkte, in denen der Ausdruck denselben Wert hat. Da keine grosse Genauigkeit verlangt wird, so kann man die Werte von r_a, r_b, $\beta - \alpha$, die zu einem Wertepaare x, y gehören, durch Zeichnung finden. Statt der natürlichen Logarithmen multipliziert man besser mit $\log e$ und kann in dem Ausdruck

$$(1 + x) \log r_a + (1 - x) \log r_b + y(\beta - \alpha) \log e$$

überall Brigg'sche Logarithmen nehmen. In der folgenden Tabelle sind die Werte dieses Ausdruckes für einige Wertepaare x, y enthalten:

	$y = 0$	$y = \pm 0.1$	$y = \pm 0.2$	$y = \pm 0.3$	$y = \pm 0.4$	$y = \pm 0.5$	$y = \pm 0.6$
$x = 0$	0.000	0.132	0.255	0.370	0.477	0.576	0.670
$x = \pm 0.2$	0.017	0.149	0.272	0.386	0.492	0.591	0.683
$x = \pm 0.4$	0.071	0.203	0.324	0.435	0.538	0.633	
$x = \pm 0.6$	0.167	0.297	0.414	0.520	0.616	0.704	
$x = \pm 0.8$	0.320	0.445	0.550	0.641	0.724		
$x = \pm 1$	0.602	0.670	0.734				

Zwischen den Werten in einer Horizontalreihe lässt sich sehr gut interpolieren, da die zweiten Differenzen nur um wenige Einheiten der dritten Stelle von einander abweichen. Die Kurve $U = \log(b - a) - 1$ hat etwa die Gestalt einer Ellipse mit der grossen Achse $b - a$ und der kleinen Achse $0.5255\,(b - a)$. An den Enden der grossen Achse ist unsere Kurve aber spitzer als eine Ellipse.

Jede der inneren Kurven hat dagegen die Gestalt, als wäre sie aus zwei Kreisbögen zusammengesetzt, deren gemeinsame Sehne in die r-Achse fällt. In der Fig. 1 sind ausser der Kurve

$$\text{(I)} \quad U = \log(b - a) - 1$$

noch vier der inneren Kurven gezeichnet:

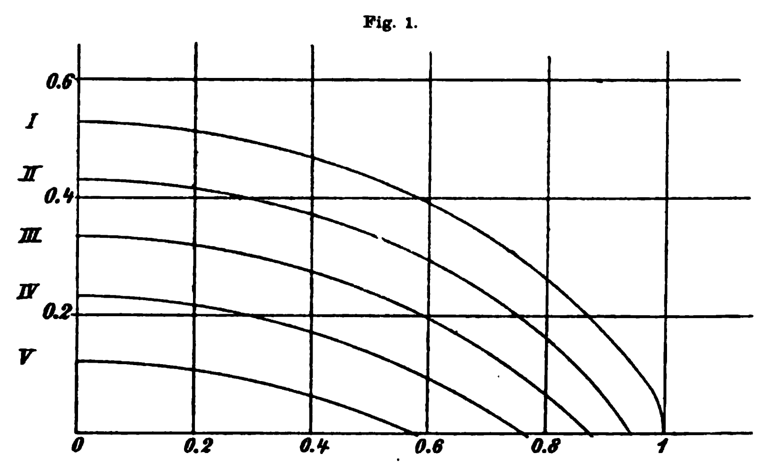
$$\text{(II)} \quad U = \log 0.9\,(b - a) - 1$$
$$\text{(III)} \quad U = \log 0.8\,(b - a) - 1$$
$$\text{(IV)} \quad U = \log 0.7\,(b - a) - 1$$
$$\text{(V)} \quad U = \log 0.6\,(b - a) - 1.$$

Im Punkte c ist $U = \log 0.5\,(b-a) - 1$. Die Figur enthält nur den 4. Teil jeder Kurve. Die übrigen Teile gehen aus dem gezeichneten durch Spiegelung an der x- und y-Achse hervor.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die gestellte Frage beantworten.

Es verhalte sich die Funktion $f(x)$ regulär über das Gebiet hinaus, das von der Kurve $U = \log(b-a) - 1$ umschlossen wird. Wir wollen uns dann zwei U-Kurven denken, die beide die Kurve $U = \log(b-a)$

Fig. 1.



-1 umschliessen, aber beide noch innerhalb des Gebietes liegen, in welchem sich $f(x)$ regulär verhält. Die eine der beiden Kurven $U = U_1$ umschliesse die andere $U = U_2$, so dass $U_1 > U_2$. Wenn nun z auf der Kurve $U = U_1$ und x auf der Kurve $U = U_2$ liegt, so ist für hinreichend grosse Werte von n $\left|\sqrt[n]{g_n(z)}\right|$ sehr wenig von e^{U_1} und $\left|\sqrt[n]{g_n(x)}\right|$ sehr wenig von e^{U_2} verschieden. Mithin ist

$$\left|\sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}}\right| \text{ nahezu gleich } e^{U_2 - U_1}.$$

Da nun $U_1 > U_2$, so ist $e^{U_2 - U_1}$ kleiner als 1. Es lässt sich daher eine positive Zahl $k < 1$ angeben von der Art, dass von einem gewissen Werte von n ab für alle grösseren Werte von n

$$\left|\sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}}\right| \leqq k < 1$$

und daher

$$\left|\frac{g_n(x)}{g_n(z)}\right| \leqq k^n$$

ist. Für hinreichend grosse Werte von n wird daher $\frac{g_n(x)}{g_n(z)}$ dem abso-

luten Betrage nach so klein, wie man nur immer will, und mithin wird das über die Kurve U_1 erstreckte Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz$$

so klein, wie man nur immer will, d. h. die Funktion $f(x)$ wird auf der ganzen Kurve U_2 mit beliebiger Genauigkeit durch die ganze Funktion $G_n(x)$ dargestellt.

Nach einem bekannten Satze ist nun die Abweichung zwischen $f(x)$ und $G_n(x)$ in dem ganzen von der Kurve U_2 umschlossenen Gebiete absolut genommen kleiner, als die grösste Abweichung auf der Kurve U_2 selbst. Mithin wird die Funktion $f(x)$ in dem ganzen von U_2 umschlossenen Gebiet mit beliebiger Genauigkeit durch die Näherungen $G_n(x)$ dargestellt.

Die Kurven U_1 und U_2 kann man so lange noch erweitern, so lange sie noch keine singulären Punkte der Funktion $f(x)$ enthalten. Wenn daher $f(x)$ im endlichen keine singulären Stellen besitzt, so wird der Bereich der gleichmässigen Konvergenz von

$$f(x) = \lim G_n(x)$$

die ganze komplexe Zahlenebene umfassen. Wenn dagegen im Endlichen singuläre Stellen vorkommen, so wird der Bereich der gleichmässigen Konvergenz sich über das Innere derjenigen U-Kurve erstrecken, die durch wenigstens eine singuläre Stelle hindurchgeht, ohne singuläre Stellen zu umschlingen.

Unter dieser Voraussetzung kann man also zwischen den beobachteten Werten nicht bloss interpolieren, sondern man kann sogar über sie hinaus extrapolieren, so lange man nur innerhalb des Konvergenzbereiches bleibt. Anders gestaltet sich die Sache dagegen in dem Falle, wo $f(x)$ nicht mehr im Innern der durch die Punkte a, b laufenden U-Kurve sich regulär verhält, wenn auch auf der Strecke a, b selbst keine singuläre Stelle liegt. Wir müssen dann zu U-Kurven übergehen, die weiter im Innern liegen. Es sei U_1 eine U-Kurve, die ganz im Innern des Gebietes liegt, wo $f(x)$ sich regulär verhält. Diese U-Kurve schneidet die Strecke ab in zwei Punkten $a'b'$. Wir bilden nun eine Umschlingung der Strecke ab, indem wir diese U-Kurve bis nahe an die Punkte $a'b'$ durchlaufen, in der Nähe dieser Punkte aber Parallelen zu ab anschliessen, die bei a und b durch Halbkreise mit einander verbunden werden (Fig. 2).

Über diese Umschlingung erstrecken wir das Integral

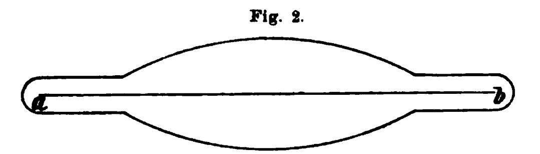
$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \frac{f(z)}{z-x}\, dz.$$

Liegt nun x im Innern der U-Kurve, so lässt sich wieder zeigen, dass für hinreichend grosse Werte von n

$$\left| \sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}} \right| < k < 1$$

und mithin das Integral beliebig klein werden wird. Denn der absolute Betrag von $\lim \sqrt[n]{g_n z}$ ist nach dem Obigen auf den Randteilen, die ausserhalb der U-Kurve liegen, noch grösser als auf der U-Kurve selbst, während $\lim \sqrt[n]{g_n(x)}$, da x im Innern der U-Kurve liegt, absolut genommen kleiner sein muss. Dies ist oben zunächst nur für den Fall nachgewiesen, wo x nicht auf der Strecke ab liegt. Aber es lässt sich auch dann noch in der folgenden Weise zeigen. Liegt x auf der Strecke ab zwischen x_α und $x_{\alpha+1}$, so ist, wenn man $\frac{b-a}{n-1} = h$ setzt:

Fig. 2.



$$\begin{array}{ll} |x - x_\alpha| < h & |x - x_{\alpha+1}| < h \\ |x - x_{\alpha-1}| < 2h & |x - x_{\alpha+2}| < 2h \\ \vdots & \\ |x - x_1| < \alpha h & |x - x_n| < (n-\alpha)h \end{array}$$

und mithin:

$$|g_n(x)| < \alpha!\,(n-\alpha)!\,h^n$$

Nun ist nach der Stirling'schen Formel

$$\log \alpha! = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{2\alpha+1}{2}\log\alpha - \alpha + \frac{\mu}{12\alpha} \quad (\mu \text{ zwischen } 0 \text{ und } 1)$$

$$\log(n-\alpha)! = \tfrac{1}{2}\log 2\pi + \frac{2(n-\alpha)+1}{2}\log(n-\alpha) - (n-\alpha) + \frac{\mu'}{12(n-\alpha)}$$

(μ' zwischen 0 und 1)

Mithin ist

$$\frac{1}{n}\log|g_n(x)| < \frac{1}{n}\log 2\pi + \log(n-\alpha) + \frac{\alpha}{n}\log\frac{\alpha}{n-\alpha} + \frac{1}{2n}\log\alpha(n-\alpha)$$
$$- 1 + \frac{\mu}{12\alpha n} + \frac{\mu'}{12(n-\alpha)n} + \log h.$$

Lassen wir nun n grösser und grösser werden, während x ungeändert bleibt, so wird auch α grössere Werte annehmen müssen, damit x immer zwischen x_α und $x_{\alpha+1}$ liegt. Der Bruch $\frac{\alpha}{n-\alpha}$ wird sich dabei dem festen Werte $\frac{x-a}{b-x}$ mehr und mehr nähern, $\frac{\alpha}{n}$ wird sich dem Wert $\frac{x-a}{b-a}$ mehr und mehr nähern, $\frac{n-\alpha}{n}$ dem Werte $\frac{b-x}{b-a}$. Daher erhalten wir:

$$\lim \frac{1}{n} \log | g_n(x) | \leqq \log (b - x) + \frac{x - a}{b - a} \log \frac{x - a}{b - x} - 1$$

oder

$$\lim \frac{1}{n} \log | g_n(x) | \leqq \frac{1}{2} \log (b - x)(x - a) + \frac{x - c}{b - a} \log \frac{x - a}{b - x} - 1.$$

Der Wert der rechten Seiten stimmt mit dem Werte von U an der betreffenden Stelle überein.

Damit ist also gezeigt, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{g_n(x)}{g_n(z)} \frac{f(z)}{z - x} dz$$

für jeden Wert von x im Innern der U-Kurve beliebig klein wird und damit ist der Beweis für die Konvergenz des Ausdruckes

$$f(x) = \lim G_n(x)$$

erbracht, wo $G_n(x)$ die ganze rationale Funktion niedrigsten Grades bedeutet, die für die n-Werte $x_1\, x_2 \ldots x_n$ mit $f(x)$ übereinstimmt. So lange die U-Kurve keine singuläre Stelle enthält, können wir sie durch eine grössere U-Kurve ersetzen. Der Konvergenzbereich erfüllt daher das ganze Innere derjenigen U-Kurve, die durch wenigstens eine singuläre Stelle hindurchgeht, ohne singuläre Stellen zu umschlingen. Je nach der Lage der singulären Stellen also wird der Konvergenzbereich des Ausdruckes

$$f(x) = \lim G_n(x)$$

nur einen Teil der Strecke ab oder die ganze Strecke ab enthalten. Denn dass der Konvergenzbereich über die betreffende U-Kurve nicht hinausreicht, ergiebt sich daraus, dass für einen Wert von x ausserhalb der U-Kurve und einen Wert von z auf der U-Kurve

$$\lim \left| \sqrt[n]{\frac{g_n(x)}{g_n(z)}} \right| > K > 1$$

ist. Dies gilt auch noch für Werte von x, die auf der Strecke ab, aber in der Mitte zwischen zwei benachbarten Nullstellen der Funktion $g_n(x)$ gewählt werden.

Es ist dann nämlich

$$| g_n(x) | = 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots 2\alpha - 1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2(n - \alpha) - 1) \cdot \frac{h}{2}.$$

Nun ist $1 \,.\, 3 \ldots 2\alpha - 1 = \frac{2\alpha!}{2^\alpha \alpha!}$

und damit erhält man nach der Stirling'schen Formel in ähnlicher Weise wie oben

$$\frac{1}{n} \log | g_n(x) | = \frac{1}{2} \log (x - a)(b - x) + \frac{x - c}{b - a} \log \frac{x - a}{b - x} - 1.$$

Selbst auf der Strecke ab kann man also ausserhalb der betreffen-

den U-Kurve Werte von x finden, für welche $\frac{g_n(x)}{g_n(z)}$ mit wachsendem n wie K^n unendlich wird. Für solche Werte kann das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{g_n(x)}{g_n(z)}\frac{f(z)}{z-x}dz$$

nicht beliebig klein werden, wenigstens nicht, so lange über $f(z)$ keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden.

Somit erhält man das überraschende Resultat, dass, so bald singuläre Stellen von $f(x)$ im Innern der Kurve

$$U = \log(b-a) - 1$$

liegen, die Interpolation mit Hülfe der Funktionen $G_n(x)$ nur für einen beschränkten Teil der Strecke ab möglich ist.

Dies möge für einen speziellen Fall noch etwas weiter ausgeführt werden.

Es sei $U = C$ die Gleichung einer U-Kurve, welche die Strecke ab und eine singuläre Stelle z_1 der Funktion $f(x)$ umschliesst. An dieser Stelle soll $f(x)$ von erster Ordnung unendlich werden.

Wir denken uns nun aus dem Gebiete einen kleinen Kreis ausgeschlossen, der die Stelle z_1 zum Mittelpunkt hat. Über den gesamten Rand des so modifizierten Gebietes denken wir uns das Integral erstreckt und haben dann wie oben:

$$f(x) = G_n(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\frac{g_n(x)}{g_n(z)}\frac{f(z)}{z-x}dz$$

Den Teil des Integrals, der über den kleinen Kreis erstreckt ist, denken wir uns besonders ausgeführt. Auf dem Kreise ist $\frac{g_n(x)}{g_n(z)}\cdot\frac{1}{z-x}$ sehr nahe konstant um so mehr, je kleiner der Kreis genommen wird, und bei den über $f(z)$ gemachten Annahmen wird der über den Kreis erstreckte Teil gleich:

$$c\cdot\frac{g_n(x)}{g_n(z_1)}\frac{1}{z_1-x},$$

wo c eine von Null verschiedene Konstante bedeutet. Der übrige Teil des Integrals wird für hinreichend grosse Werte von n beliebig klein, weil für Werte von z, die auf der U-Kurve liegen, der absolute Betrag von $\sqrt[n]{g_n(z)}$ grösser ist, als der von $\sqrt[n]{g_n(x)}$, da x einen im Innern liegenden Punkt bedeutet. Wenn wir nun die U-Kurve konstruiert denken, die durch z_1 läuft, so ist klar, dass für einen Wert von x, der ausserhalb dieser Kurve liegt, der Term $c\,\frac{g_n(x)}{g_n(z_1)}\cdot\frac{1}{z_1-x}$ für hinreichend grosse Werte von n beliebig gross wird, und dass daher $f(x) - G_n(x)$ für hinreichend grosse Werte von n beliebig gross werden muss.

Es sei z. B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $a = -5$, $b = +5$. Dann hat $f(x)$ die beiden singulären Stellen $+i$ und $-i$. Statt eines Kreises haben wir dann zwei Kreise auszuschliessen und erhalten, wenn wir die U-Kurve ins Unendliche rücken lassen

$$\frac{1}{1+x^2} = G_n(x) + \frac{i}{2}\frac{g_n(x)}{g_n(i)}\frac{1}{i-x} + \frac{i}{2}\frac{g_n(x)}{g_n(-i)}\cdot\frac{1}{i+x}.$$

Nun ist

$$(i-x_1)(i-x_n) \quad = -(x_1^2+1)$$
$$(i-x_2)(i-x_{n-1}) = -(x_2^2+1).$$

u. s. w.

Wird daher n als ungrade vorausgesetzt, so muss $g_n(i)$ rein imaginär sein:

$$g_n(i) \quad = \pm i\,|\,g_n(i)\,|$$
$$g_n(-i) = \mp i\,|\,g_n(i)\,|$$

und wir erhalten:

$$\frac{1}{1+x^2} = G_n(x) \pm \frac{g_n(x)}{|\,g_n(i)\,|}\frac{x}{1+x^2}.$$

Wir konstruieren nun die U-Kurve, die durch die Punkte $\pm i$ geht. Sie trifft die reelle Achse etwa in den Punkten ± 3.63. Über das zwischen diesen beiden Punkten liegende Intervall hinaus ist also die Interpolation mit Hülfe der Funktionen $G_n(x)$ unmöglich. Obgleich diese Funktionen zwischen $+3.63$ und $+5$, sowie zwischen -3.63 und -5 mit wachsendem n für immer dichter und dichter liegende Werte von x mit $\frac{1}{1+x^2}$ übereinstimmen, so wird doch zwischen je zwei Koinzidenzpunkten die Abweichung mit wachsendem n immer grösser und grösser. Wenn man z. B. die Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ durch die Kurve $y = G_n(x)$ darzustellen sucht, die in den 11 Punkten mit den Abscissen

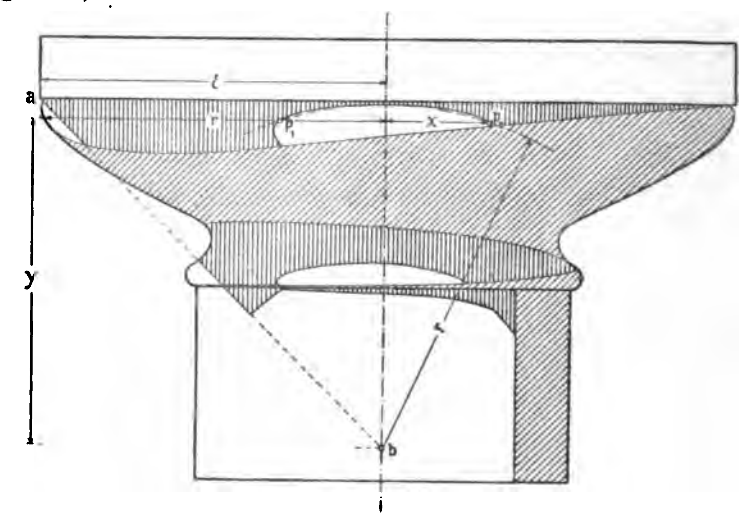
$$x = -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5$$

mit ihr übereinstimmt, so beträgt die Abweichung bei $x = \pm 4.5$, wie unsere Gleichung lehrt, nicht weniger als 1.53, also mehr als das Anderthalbfache der grössten Ordinate der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$. Die Abweichung in der Nähe von ± 4.5 wird nun nicht etwa kleiner, wenn wir den Grad der Näherungskurve und zugleich die Zahl der Koinzidenzpunkte zwischen $x = -5$ und $x = +5$ erhöhen, sondern sie wird im Gegenteil immer grösser. Bei $x = \pm 0.5$ dagegen beträgt z. B. die Abweichung nicht mehr als 0.044, und würde in der Nähe dieses Wertes mit einer grösseren Anzahl von Koinzidenzpunkten immer kleiner werden.

Eine Schattenkonstruktion.

Von R. MEHMKE in Stuttgart.

Beim Schattieren von Zeichnungen, welche Teile von Bauwerken oder Maschinen im Aufriss· darstellen, ist nicht selten der Schatten einer wagerechten und zur Aufrissebene parallelen Geraden auf eine beliebige Drehungsfläche mit senkrechter Axe zu bestimmen, und zwar unter der Voraussetzung, die auch hier gemacht werden soll, dass die Lichtstrahlen im Grundriss und Aufriss einen halben rechten Winkel mit der Wagerechten bilden. Die hierbei allgemein benützte, in den einschlägigen Werken zu findende Konstruktion ist ebenso umständlich als ungenau und erfordert einen Grundriss. Ich halte es deshalb für nicht ganz überflüssig, eine in den 80er Jahren von mir gefundene sehr einfache Konstruktion mitzuteilen, bei der man keinen Grundriss nötig hat.[1])



1) Eine weniger einfache Konstruktion hat *J. Pillet* in seinem Traité de Perspective . . ., Paris 1885, angegeben. Im übrigen sind die, ebenfalls im Aufriss allein ausführbaren Schattenkonstruktionen an Drehungsflächen von *Pillet* un-

Man trage die Entfernung ε, welche die schattenwerfende Gerade — in dem obigen Bilde ist es die vordere untere Kante der Deckplatte des Kapitäls — von der Drehungsaxe hat, vom Aufriss der Axe im Aufriss der Geraden nach links, wenn das Licht, wie gewöhnlich, von links einfällt, und ziehe durch den erhaltenen Punkt a in der Lichtrichtung bis zum Schnittpunkt b mit der Axe. Die auf einem beliebigen Parallelkreis der Drehungsfläche liegenden Punkte p_1 und p_2 der Schattengrenze ergeben sich dann, wenn man den Halbmesser r dieses Parallelkreises in den Zirkel nimmt, in b einsetzt und in den Aufriss des Parallelkreises einschneidet.

Die Erklärung liegt darin, dass die gesuchte Schattengrenze zum Seitenriss eine unter einem halben Rechten geneigte Gerade hat und der gemeinsame Abstand x der Aufrisse von p_1 und p_2 von der Axe die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks vorstellt, dessen andere Kathete y gleich dem Abstande des gemeinsamen Seitenrisses der Punkte p von der Axe, also gleich dem Abstande des Punktes b von dem Aufriss des fraglichen Parallelkreises, und dessen Hypotenuse gleich dem Halbmesser r ist.

Die Ausdehnung der Konstruktion auf allgemeinere Lichtrichtungen bietet keine Schwierigkeit, soll aber hier nicht vorgenommen werden, wie auch die sinngemässe Anwendung bei einigen anderen Lagen der Axe und der schattenwerfenden Geraden dem Leser überlassen bleiben möge.

---

gemein zweckmässig, aber anscheinend bei uns gar nicht bekannt. Ich beabsichtige, die Methoden von *Pillet* mit einer Verallgemeinerung, die ich vor längerer Zeit gefunden habe, in dieser Zeitschrift bei nächster Gelegenheit darzustellen.

Zur Konstruktion der Schnitte von Hüllflächen mit ebenen oder krummen Flächen.

Von R. Mehmke in Stuttgart.

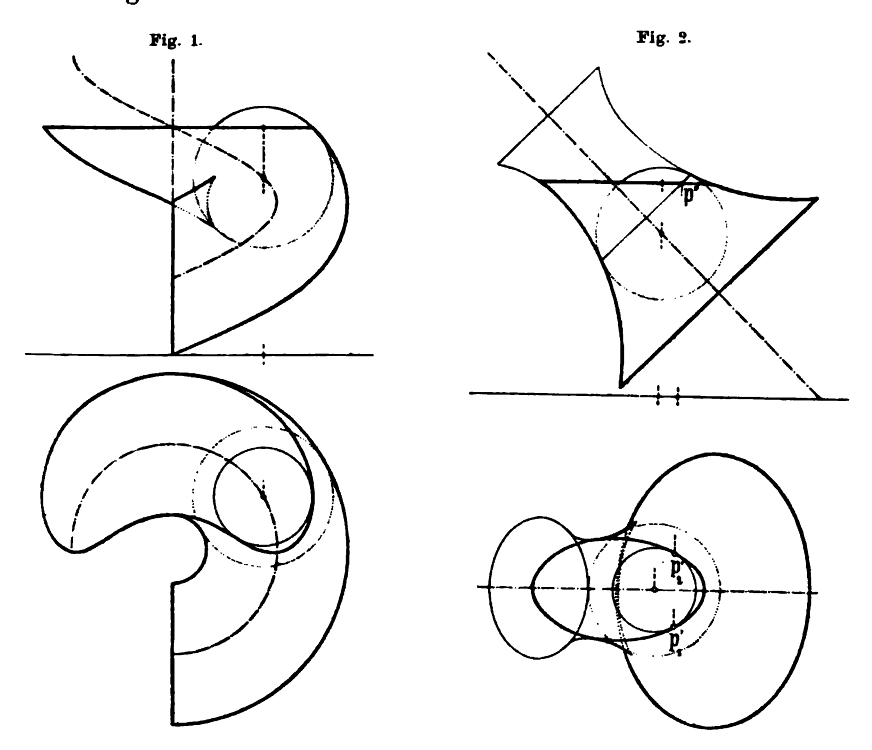
Als allgemeine Verfahren, die Schnittlinie einer krummen Fläche mit einer Ebene zu finden, werden in den Lehrbüchern der darstellenden Geometrie meines Wissens keine anderen angegeben, als entweder eine Reihe von Erzeugenden der Fläche mit dieser Ebene zu schneiden und die Schnittpunkte durch einen stetigen Zug zu verbinden, oder die Aufgabe als einen besonderen Fall derjenigen anzusehen, die Schnittlinie zweier krummen Flächen zu konstruieren, und dementsprechend eine Reihe von Hilfsebenen anzunehmen, welche die krumme Fläche in möglichst einfachen Linien schneiden, und hierauf die gemeinsamen Punkte der beiden Schnittlinien einer jeden Hilfsebene mit der krummen Fläche und mit der gegebenen Ebene zu bestimmen, welche Punkte der gesuchten Kurve angehören. Ähnlich ist es mit der Bestimmung der Schnittlinie zweier krummen Flächen, nur dass hier in der Regel noch die Möglichkeit, krumme Hilfsflächen zu benützen, ins Auge gefasst wird.

Es giebt aber noch ein anderes Verfahren, das ich im Unterricht seit langen Jahren mit bestem Erfolg anwenden lasse.[1]) Angenommen, die gegebene Fläche Φ könne als Hüllfläche (Einhüllungsfläche, Enveloppe) einer Schar von Flächen F_1, F_2, $F_3 \cdots$ betrachtet werden, deren Schnitte C_1, C_2, $C_3 \cdots$ mit einer zweiten gegebenen Fläche Ψ leicht zu finden seien. Dann wird die gesuchte Schnittkurve der Flächen Φ und Ψ jede der Kurven C_1, C_2, $C_3 \cdots$ berühren, also die Hüllkurve der letzteren sein.[2])

1) Es mag sein, dass der eine oder andere Fachgenosse ebenfalls darauf gekommen ist; trotz einigen Suchens habe ich in der Litteratur nichts darauf Bezügliches finden können.

2) In manchen Fällen (s. das zweite der unten folgenden Beispiele) können auch die Berührungspunkte der Kurven C mit ihrer Hüllkurve durch eine zusätzliche Konstruktion verhältnismässig leicht bestimmt werden; dass dies im all-

Besonders empfehlenswert ist natürlich dieses Verfahren bei den Hüllflächen von Kugelscharen, z. B. Röhrenflächen und Drehungsflächen. Als einfaches Beispiel, das keiner weiteren Erklärung bedarf, sieht man in Fig. 1 den Schnitt einer Schraubenröhrenfläche mit senkrechter



Axe und einer wagerechten Ebene, im Grundriss konstruiert; eine Hilfskugel und ihr Schnitt mit der gegebenen Ebene sind eingezeichnet.[1]) Auf mehrere Arten können die Berührungspunkte der Hilfskreise mit ihrer Hüllkurve bestimmt werden, worauf aber hier nicht eingegangen

gemeinen nicht der Fall ist, braucht man keineswegs als Mangel des Verfahrens anzusehen, denn es ist eine bekannte Thatsache, dass eine Kurve sich als Hüllkurve einer hinreichend dichten Schar gezeichneter Kurven sogar bequemer und sicherer zeichnen lässt, als aus einzelnen konstruierten Punkten. So lasse ich die cyklischen Kurven im Unterricht immer als Hüllkurven von Kreisscharen nach der so einfachen allgemeinen Roulettenkonstruktion von *Poncelet* (s. etwa *Burmester*'s Kinematik, S. 176 und S. 175 Anm.) zeichnen.

1) In den meisten Lehrbüchern werden solche Aufgaben nicht einmal erwähnt; in *Chr. Wiener*'s bekanntem Lehrbuch, Bd. 2, S. 408, findet sich zwar (ohne Lösung) die Übungsaufgabe, eine Schraubenröhrenfläche durch Ebenen zu schneiden, ich halte es aber nicht für wahrscheinlich, dass *Wiener* die obige Lösung im Sinne gehabt hat.

werden soll. Im zweiten Beispiele hat man eine beliebige Drehungsfläche, deren Axe parallel zur Aufrisstafel, aber nicht senkrecht zur Grundrisstafel ist, ebenfalls mit einer wagerechten Ebene geschnitten. Hier ergeben sich die Berührungspunkte p_1' und p_2' eines jeden Hilfskreises einfach dadurch, dass man im Aufriss den Parallelkreis bestimmt, nach welchem die betreffende Hilfskugel die Drehungsfläche berührt, und durch den Schnittpunkt p'' mit der Spur der gegebenen Ebene die Senkrechte zieht.[1])

---

1) Eine geometrographische Vergleichung würde zeigen, dass obige zusammengesetzte Konstruktion, obwohl sie gleichzeitig berührende Kreise und ihre Berührungspunkte liefert, an Einfachheit der gewöhnlichen, mittelst welcher man bloss Punkte der gesuchten Kurve erhält (s. etwa den Leitfaden der darstellenden Geometrie von *R. Müller*, S. 55, Nr. 116 Schluss), nicht nachsteht. Wie schon erwähnt, kann aber auf die Bestimmung der Berührungspunkte der (doppelt) berührenden Kreise verzichtet und so die Konstruktion wesentlich vereinfacht werden.

Ein neues „Perspektivlineal".

Von Dr. Carl Rohrbach in Gotha.

Überaus zahlreich und zum Teil überaus verwickelt sind die Vorrichtungen, die man ersonnen hat, um perspektivische Geraden zu zeichnen für den Fall, dass der Fluchtpunkt nicht in den Rahmen der Zeichnung selbst fällt.

Einer Berücksichtigung dieser Vorrichtungen im Unterricht steht meistens neben ihrem durch die Art der Konstruktion bedingten hohen Preise die Schwierigkeit, ihre Wirkungsweise zu übersehen, im Wege.

Allen diesen Konstruktionen gegenüber zeichnet sich eine meines Wissens neue Vorrichtung, die mein jetzt fünfundachtzigjähriger verehrter Freund und ehemaliger Lehrer, Herr Baumeister Ludwig Schmidt in Gotha vor wenigen Jahren erdacht hat, durch prinzipiell wie konstruktiv gleich verblüffende Einfachheit und dementsprechende Billigkeit der Herstellung aus. Sie beruht auf der Anwendung des einfachen geometrischen Satzes, dass die Projektion einer Kegelseite auf einen Hauptschnitt des Kegels stets durch dessen Spitze geht oder allgemeiner des Satzes: *Alle Projektionen einer beliebigen Geraden auf eine und dieselbe Ebene schneiden sich in einem Punkte (dem Schnittpunkte der projizierten Geraden mit der Bildebene).*

Auf einer dünnen Spiegelglasscheibe mit jedenfalls einer genau geraden Kante ist eine beliebige gegen diese Kante geneigte Gerade in irgend welcher Weise (mit dem Diamanten, mit Farbe, Aluminium, Seife oder dergl.) gezogen, ein paar Füsse oder Stützen, die seitlich angeklemmt werden, gestatten, die Scheibe ungefähr senkrecht auf die Zeichnung zu stellen. An der geraden Kante ist ein beliebiger Punkt durch einen Indexstrich bezeichnet.

In dieser seien von den zu einem Fluchtpunkte gehörigen (im Raume parallelen) Geraden zwei, G_1 und G_2, gegeben, die übrigen durch die Punkte p_3, p_4, ... zu ziehen. Man stellt nun die Glasscheibe zunächst mit ihrer unteren genauen Kante ($\mathfrak{G}_1$) auf die Gerade G_1 und verschiebt sie dann dieser entlang, bis bei geeigneter Stellung des Auges

die andere Gerade G_2 mit der auf dem Glase gezeichneten Geraden $\mathfrak{G}_2$ zusammenfällt, man markiert dann zweckmässig die Stellung des erwähnten Index auf der Zeichnung (um zufällige Verschiebungen zu vermeiden oder zu bemerken und um auch später dieselbe Einstellung ohne Mühe wieder erhalten zu können). Alsdann bringt man durch Verschiebung des Auges (oder durch Drehen der Glasplatte um ihre Grundkante, oder durch beide Bewegungen zugleich) die Punkte p_3, p_4 etc. zur Deckung mit dem Bilde der Geraden $\mathfrak{G}_2$ und braucht dann nur mit dem Bleistifte je einen zweiten Punkt π_3, π_4 etc. in der betreffenden Projektion von $\mathfrak{G}_2$ zu markieren, um nachher durch die Punktpaare $p_3\pi_3$, $p_4\pi_4$ etc. die gewünschten Geraden ziehen zu können.

Nachträglich sei noch bemerkt, dass es vorteilhaft sein kann, mehrere mit der Grundkante $\mathfrak{G}_1$ ein Strahlenbüschel bildende Gerade $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$ etc. auf der Glasplatte verzeichnet zu haben, indem hierdurch die nötigen Verschiebungen des Auges vermindert werden.

Dass es gleichgültig ist, mit welcher Geraden G man $\mathfrak{G}_1$ zu Anfang zusammenfallen lässt, und dass es zur Vermeidung ungünstiger Visuren zulässig ist, verschiedene Teile der Konstruktion auf verschiedene Gerade G unter jedesmaliger Neueinstellung zu stützen, bedarf keines besonderen Hinweises.

Zur Lösung der Aufgabe 1.

Von S. FINSTERWALDER in München.

Im 42. Bande dieser Zeitschrift habe ich folgende Aufgabe gestellt: „Das Netz eines Kugelballons besteht aus einer sehr grossen Anzahl (96 und mehr auf dem Umfange) rhombischer Maschen mit Winkeln von 60° und 120°, deren kurze Diagonalen nach Parallelkreisen und deren lange nach Meridianen angeordnet sind. Ihre Dimensionen wachsen regelmässig vom oberen Ventilringe bis zum Äquator. Das Netz reicht in dieser Form etwas unter den Äquator. Die Figur desselben ist demnach genähert durch zwei Scharen von Kugelloxodromen gebildet, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden.

Ein solches, für einen Ballon von bestimmtem Radius konstruiertes Netz soll nun für einen grösseren Kugelballon, oder auch für einen Ballon von anders geformtem Meridian benützt werden. Welche Figur bildet dann das Netz? Bis zu welchem Kugelradius lässt sich dasselbe noch verwenden? Welche Erscheinung tritt auf, wenn der Radius grösser wird? Welche Form hat das Netz in dem speziellen Falle eines unendlich grossen Radius, wenn also das Netz symmetrisch im Kreise herum in eine Ebene ausgebreitet wird?"

Der Radius des Ballons, für welchen das Netz hergestellt ist, sei r; u und v seien Poldistanz und geogr. Länge für einen Punkt der Ballonoberfläche, deren Linienelement daher gleich ist:

$$ds^2 = r^2 du^2 + r^2 \sin^2 u dv^2.$$

Es sei ferner n (in unserm Falle $\sqrt{3}$) das Verhältnis der langen zur kurzen Diagonale einer Raute des Netzes, dann besteht zwischen den Differentialen du und dv, welche eine solche unendlich klein gedachte Raute begrenzen, die Beziehung: $nr \sin u dv = - r du$.

Die entsprechenden Grössen für den grösseren Ballon seien mit grossen Buchstaben bezeichnet. Die beiden Kugeln sind dann bei Übertragung des Netzes so aufeinander bezogen, dass $dS = ds$ ist, wenn $dV = dv$ wird und die vorhin erwähnte Beziehung $n \sin u dv = - du$ besteht. Hieraus ergiebt sich folgende Differentialgleichung für den

Zusammenhang der Poldistanzen U und u der beiden Kugeloberflächen:

$$\frac{dU}{du} = \frac{1}{n}\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 (1+n^2) - \left(\frac{\sin U}{\sin u}\right)^2} \text{ oder für } n = \sqrt{3}:$$

$$\frac{dU}{du} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{\sin U}{\sin u}\right)^2}.$$

Diese Differentialgleichung muss nun so integriert werden, dass für $u = u_0$, wo u_0 die Poldistanz des Netzkranzes ist, der das kreisförmige obere Ventil umschliesst, $U = \frac{r}{R} u_0$ wird, da die Ventile beider Ballons als gleich gross vorausgesetzt werden müssen. Ist das Verhältnis $\frac{R}{r}$ gegeben, so können hierfür die numerischen Näherungsmethoden von Runge und Heun benutzt werden. Da u_0 ein sehr kleiner Winkel ist, wird sich der Anfangswert von $\frac{dU}{du} = 1$ ergeben. Die Rechnung wird so lange fortgesetzt, bis $\frac{dU}{du} = 0$ wird. Der zugehörige Wert entspricht dem Umstande, dass eine kleine Rhombendiagonale des Netzes beim Auflegen auf den grösseren Ballon sich auf die doppelte Rhombenseite verlängert hat, während die frühere lange Diagonale nun auf Null zusammengeschrumpft ist. Wenn das Netz am kleinen Ballon weiter reicht, als jenem Werte von u entspricht, so ist ein Aufpassen des Netzes auf den grösseren Ballon schon aus geometrischen Gründen unmöglich, aus mechanischen Gründen[1]) ist es schon längst vorher zu widerraten, da bei starken Deformationen der Netzmaschen die Beanspruchung der Maschenseiten ganz anders ausfällt, als sie bei der Herstellung des Netzes für den kleinen Ballon vorgesehen war. Soll die Verkürzung der langen Diagonale unter einem gewissen Mass bleiben, so muss: $\frac{R\,dU}{r\,du} < k$ sein und man wird also zusehen, ob innerhalb der Ausdehnung des Netzes diese Ungleichheit erfüllt bleibt. Da es sich in der Praxis somit nur um eine geringe Veränderung des Radius des Kugelballons handeln kann, so wird man versuchen, für diesen Fall eine näherungsweise giltige Differentialgleichung aufzustellen, die allgemein zu integrieren ist. Das gelingt hier sehr leicht. Setzt man: $R = r(1+p)$ und $R^2 = r^2(1+2p)$ ferner: $U = u + w$ und $\sin U = \sin u + w \cos u$, so wird die Differentialgleichung nach Entwickelung der Quadratwurzel und Beibehaltung der niedrigsten Potenzen von p und w:

---

1) Vergl. S. Finsterwalder: Die Beanspruchung des Netzes am Freiballon. Illustr. Aëron. Mitteilungen 1900.

$$\frac{dw}{du} + \frac{w}{n^2} \operatorname{ctg} u + p \frac{1+n^2}{n^2} = 0.$$

Ihr allgemeines Integral ist: $w = -p \frac{1+n^2}{n^2} \frac{\int\limits_{u_0}^{u} \sin^{\frac{1}{n^2}} du}{\sin^{\frac{1}{n^2}}}$ oder für $n = \sqrt{3}$:

$$w = -\frac{4p}{3} \frac{\int\limits_{u_0}^{u} \sqrt[3]{\sin u}\, du}{\sqrt[3]{\sin u}}.$$

Berechnen wir den für die Formänderung der Maschen massgebenden Wert von:

$$k = \frac{R\,dU}{r\,du} = 1 + p + \frac{dw}{du} = 1 - \frac{w}{3} \operatorname{ctg} u - \frac{4p}{3} + p$$

$$= 1 - \frac{p}{3} \left\{ 1 - \tfrac{4}{3} \operatorname{ctg} u \frac{\int\limits_{u_0}^{u} \sqrt[3]{\sin u}\, du}{\sqrt[3]{\sin u}} \right\}.$$

Für $p = 0{,}1$ also einen Ballon, dessen Radius um $10\,\%$ und dessen Volumen um $33\,\%$ grösser ist als jener, für den das Netz konstruiert war, finde ich:

$u =$	45^0	90^0	135^0
$k =$	0,993	0,967	0,865

Berücksichtigt man, dass bei einer Verkürzung der langen Diagonale im Verhältnis 0,865 : 1 die kurze im Verhältnis 1,325 : 1 verlängert wird, so sieht man, dass die äussersten Maschen bereits sehr erheblich verzerrt sind und die Grenze des Zulässigen wohl schon überschritten ist.

Die Form des Netzes beim Ausbreiten in die Ebene könnte man aus der zuerst entwickelten Differentialgleichung durch Grenzübergang für den Wert $R = \infty$ erhalten. Einfacher ist es, direkt die Differentialgleichung aufzustellen, welche die Abhängigkeit des Polarradius ϱ in der Ebene von der Poldistanz u auf der Kugel ausdrückt. Sie lautet: $\frac{d\varrho}{du} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4 - \left(\frac{\varrho}{\sin u}\right)^2}$. Hierbei ist der Kugelradius $r = 1$ gesetzt.

Eine genäherte numerische Integration ergiebt, dass für $u = 118{,}5^0$ das vollständige Ausstrecken der Maschen erreicht wird. Die ausgestreckten Maschen liegen auf einem Kreise vom Radius $\varrho_0 = 1{,}83$. Reicht das Netz nicht weiter als bis $u = 118{,}5^0$ oder $28{,}5^0$ unter den Äquator, so kann es in eine Ebene ausgebreitet werden, sonst nicht.

Was schliesslich die Frage nach anderen einfachen Rotationsflächen betrifft, auf welche das Netz leicht aufzuspannen ist, so sind in erster Linie Rotationsflächen konstanten Krümmungsmasses und zwar solche vom Spindeltypus zu erwähnen, auf denen die Netzfigur wieder aus Loxodromen, aber mit anderem Schnittwinkel, gebildet werden kann.

Kleinere Mitteilungen.

13. Bressa-Preis.

Unterm 1. Januar 1901 teilt die Kgl. Akademie der Wissenschaften in Turin gemäss den letztwilligen Verfügungen des *Dr. Cesare Alessandro Bressa* und den bezüglichen Bestimmungen vom 7. Dezember 1876 mit, dass am 31. Dezember 1900 der Wettbewerb für die Entdeckungen und wissenschaftlichen Werke des Zeitraums 1897—1900, an welchem nur die Gelehrten und Erfinder Italiens teilnehmen konnten, geschlossen worden ist. Zugleich erinnert die Akademie daran, dass am 1. Januar 1899 ein Wettbewerb eröffnet worden ist, zu welchem die *Gelehrten und Erfinder aller Völker* zugelassen sind. Die Bewerbung hat den Zweck, den Gelehrten oder Erfinder, welchem Volk er angehöre, zu belohnen, der in dem Zeitraum von 1897—1900 „au jugement de l'Académie des Sciences de Turin, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura produit l'ouvrage le plus célèbre en fait de sciences physiques et expérimentales, histoire naturelle, mathématiques pures et appliquées, chimie, physiologie et la statistique", und wird am 31. Dezember 1902 geschlossen. Der für diesen Preis festgesetzte Betrag beläuft sich nach Abzug der Steuer auf 9600 Franken. Wer sich bewerben will, muss dies in einem Briefe an den Vorsitzenden der Akademie erklären und das Werk einreichen, mit dem er sich bewirbt. Dieses Werk muss gedruckt sein; Handschriften werden nicht berücksichtigt. Die Werke, die den Preis nicht erlangen, werden nicht zurückgegeben. Kein Mitglied der Akademie in Turin kann den Preis erhalten. Die Akademie verleiht den Preis dem Gelehrten, den sie für den würdigsten hält, auch wenn er sich nicht beworben hat. Unterzeichnet ist vom Vorsitzenden der Akademie, *G. Carle,* und dem Sekretär des Preisgerichts, *E. D'Ovidio.*

Anfragen und Auskünfte.

C. R. in *H.* *Logarithmisches Papier* ist allerdings für mannigfache Zwecke sehr gut zu gebrauchen. Es war schon öfters die Rede davon, dass in Amerika und in England solches im Handel zu haben sei, jedoch wurde entweder keine Bezugsquelle angegeben, oder es erwies sich einfach als unmöglich, das Gewünschte zu erlangen. Eine sichere Quelle ist die Verlagshandlung *Van Campenhout frères & sœur*, Rue de la Colline 13, Brüssel. Logarithmisches Liniennetz schwarz auf dünnem, aber zähem

Papier in Bogen von 62 cm Länge und Breite, Einheit der logarithmischen Skala 50 cm (abgesehen von einem geringen Papiereingang), also wie bei den unteren Skalen eines grossen Rechenschiebers. Der Bogen dieses, auf Anregung und nach Angabe der Proff. *Pasquier* und *Suttor* in Löwen hergestellten logarithmischen Papiers kostet 75 Centimes. Freilich ist damit allen Bedürfnissen wohl noch nicht entsprochen, indem z. B. für die logarithmographische Lösung von Gleichungen eine kleinere Längeneinheit, etwa 5 cm, aber mehrmalige Wiederholung der Skala auf beiden Axen erwünscht wäre. M. —

W. D. in *M.* „*Stolzenberger Millionär*" ist eine neue, recht sonderbare Handelsbezeichnung für die Rechenmaschine von *Steiger* und *Egli*, die *H. Sossna* in der Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1899, S. 674, eingehend beschrieben und gewürdigt hat. Sie stimmt (was bei uns wenig bekannt zu sein scheint) in den wesentlichsten Punkten mit der, verschiedene Jahre älteren, sich äusserlich allerdings ganz anders darstellenden Maschine von *Bollée* überein, indem sie als Haupt-Werkteil ebenfalls ein verkörpertes Einmaleins hat, also (wie die höchst eigenartige neue Rechenmaschine von Prof. *Selling*, von der wir hoffen, in dieser Zeitschr. bald eine genaue Beschreibung bringen zu können) zu den eigentlichen Multiplikationsmaschinen gehört. Der Preis ist von M. 800 auf M. 900 gestiegen. M. —

Anfrage. M. *E. Lemoine* führt die ersten Gedanken der von ihm so genannten *Geometrographie* auf das Jahr 1888 zurück. Aber *Chr. Wiener* zählt 1884 in seiner darstellenden Geometrie (die M. *Lemoine* offenbar nicht kennt), z. B. auf S. 85 Bd. 1, auch schon Elementaroperationen ab, um ein Mass für die Einfachheit einer geometrischen Konstruktion zu gewinnen. Wer hat ausser Franzosen sonst noch auf diesem Gebiete gearbeitet? *Fr. M., K.*

Bücherschau.

Maurice d'Ocagne, Traité de Nomographie. gr. 8⁰, XIII und 480 S. mit 177 Fig. und 1 Tafel. Paris 1899, Gauthier-Villars.

Ein vorzügliches Werk, das von Seiten aller, die mit dem Ausrechnen häufig wiederkehrender Formeln, seien diese einfach oder verwickelt, ja mit Zahlenrechnen überhaupt zu thun haben, und nicht minder seitens der reinen Mathematiker die gröſste Beachtung verdient! Nomographie hat 1891 der Verfasser in einem nur ein fünftel so umfangreichen Vorläufer des jetzigen Buches, wofür ihm 1892 von der Pariser Akademie der Leconte-Preis zuerkannt worden ist, die Lehre von der geometrischen Darstellung gesetzmässiger Beziehungen zwischen veränderlichen Gröſsen genannt. Liegt irgend eine Gleichung zwischen mehreren Veränderlichen vor, so läſst sich, oft auf sehr verschiedene Weise, eine aus bezifferten („kotierten") geometrischen Elementen (d. h. Punkten, geraden oder krummen Linien) gebildete Tafel zeichnen — der Verfasser benützt im Anschluss an Lalanne dafür das Wort abaque (von abacus = ἄβαξ), das bekanntlich auch noch andere Bedeutungen hat — eine Tafel also, die erlaubt, wenn für alle Veränderliche bis auf eine derselben bestimmte Zahlenwerte gegeben sind, den jener Gleichung entsprechenden Zahlenwert der letzten Veränderlichen mechanisch durch Ablesen zu ermitteln, wobei nicht etwa (wie im sogenannten graphischen Rechnen) besondere Konstruktionen auszuführen, sondern blos gezeichnete Linien zu verfolgen oder allenfalls bewegliche Elemente einzustellen sind. Vor numerischen Tafeln haben solche graphischen ausser manchen anderen Vorzügen den, oft noch anwendbar zu sein, wo erstere (z. B. wegen zu groſser Zahl der Veränderlichen) vollständig versagen. Obwohl nun seit Jahrhunderten graphische Tafeln mancherlei Art in grosser Zahl entworfen und in den letzten Jahrzehnten beachtenswerte Versuche, eine allgemeine Theorie zu begründen, unternommen worden sind, ist es doch M. d'Ocagne vorbehalten gewesen, ein wirkliches Lehrgebäude der Nomographie, zu deren Entwicklung er durch Ausbildung neuer Methoden in zahlreichen zerstreuten Arbeiten ganz wesentlich beigetragen hatte, zu schaffen. Bewirkte die Schrift von 1891 schon, dass besonders in Italien und Belgien, ausser in Frankreich, sich Viele mit Begeisterung auf diese neue, so fruchtbare Wissenschaft warfen, so lassen sich dem jetzt vorliegenden Werke, das unvergleichlich viel mehr Anwendungen enthält und in dem die Theorie zu einem Abschluss gebracht ist, weit grössere Erfolge in Aussicht stellen, — als ein solcher ist die Einrichtung allgemeiner Vorlesungen über Nomographie an der Universität in Löwen (Louvain) zu betrachten, — und wir dürfen erwarten, dass auch in Deutschland sich ein nachhaltiger Einfluss zeigen wird.

Da es ohne Abbildungen nicht möglich ist, von dem Wesen der in dem Buche auseinandergesetzten Verfahren einen deutlichen Begriff zu geben, so muss ich mich leider auf einige kurze allgemeine Angaben über den Inhalt beschränken. Im 1. Kapitel ist die Darstellung von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen durch einander gegenüber gestellte „échelles de fonction" behandelt. Es hätten hier wohl die graphischen Logarithmentafeln von Tichy und ähnliche, die ein bequemeres Interpolieren gestatten, als Zahlentafeln, Erwähnung verdient. Das 2. Kapitel bringt die Darstellung von Gleichungen zwischen drei Veränderlichen durch Tafeln „à entrecroisement", zuerst die sehr bekannte und viel benützte Darstellung einer Funktion $z = f(x, y)$ durch einen Schichtenplan der zugehörigen Fläche, vom Verfasser „abaque cartésien" genannt, die Lalannesche Aufgabe der Anamorphose oder Umwandlung einer Tafel mit krummen Linien in eine solche mit geraden, hierauf die hexagonalen Tafeln von Lallemand, ferner die allgemeinere Auffassung von Massau, nach welcher einer jeden der drei Veränderlichen eine Schaar bezifferter Kurven zugewiesen wird und je drei vermöge der gegebenen Gleichung zusammen gehörige Kurven durch einen und denselben Punkt gehen, endlich die Anwendung von Polarkoordinaten statt der Cartesischen. Ich kann hier die Bemerkung nicht unterdrücken, dass der Verfasser im Allgemeinen zwar die grösste Sorgfalt auf Genauigkeit und Vollständigkeit der Verweise verwendet hat, dass er aber, wahrscheinlich durch die Schwierigkeiten der deutschen Sprache abgeschreckt, die einschlägigen deutschen Arbeiten vielfach nicht hinreichend geprüft und deshalb nicht richtig gewürdigt hat. So sind von Chr. A. Vogler nur die „Sechs graphischen Tafeln . . ." erwähnt, während das Hauptwerk (Anleitung zum Entwerfen graphischer Tafeln . . ., Berlin 1877), das zu seiner Zeit eine bedeutende Leistung war, ungemein viel durchgeführte praktische Beispiele und manche noch immer wertvolle Untersuchung (z. B. über die Genauigkeit graphischer Tafeln) enthält, nicht genannt ist; ferner wird von Helmert und Vogler gesagt, dass sie ihrerseits auf das Prinzip der logarithmischen Anamorphose gekommen zu sein schienen, dessen Priorität man jedoch Lalanne nicht streitig machen könne, während beide Lalannes Arbeiten sehr wohl gekannt und anzuführen nicht unterlassen haben. Auch den (im folgenden Kapitel in Betracht kommenden) Arbeiten Adlers scheint mir der Verfasser nicht gerecht worden zu sein, weshalb ich mir erlaube, auf meine geschichtliche Bemerkung in dieser Zeitschrift Bd. 44 (1899) S. 58 Anm. 2 hinzuweisen.

Mit dem 3. Kapitel betreten wir des Verfassers ureigenstes Arbeitsgebiet, die Lehre von den „abaques à alignement", die im Falle dreier Veränderlicher aus Cartesischen Tafeln mit drei Scharen von Geraden durch eine dualistische Transformation erhalten werden, bei denen also jeder Veränderlichen eine bezifferte Punktreihe oder Skala entspricht und je drei in einer Geraden liegende Punkte der drei Skalen zusammengehörige Werte der Veränderlichen liefern; geradezu verblüffend wirkt der, natürlich zu Gunsten der neuen Art von Tafeln ausfallende Vergleich in den Figuren 54 und 54bis. Von hier bis zum Schluss haben wir es mit überaus wichtigen Verfahren und Untersuchungen zu thun, die grösstenteils erst in den letzten 15 Jahren entstanden sind und der Nomographie einen so überraschenden Aufschwung gegeben haben. Das 4. Kapitel über Systeme von zwei Gleichungen ist vorwiegend einer viel behandelten Aufgabe des Ingenieurwesens, den Flächen-

inhalt von Auf- und Abtragprofilen mittelst graphischer Tafeln zu bestimmen, gewidmet, und es werden hier alle bekannten Lösungen durch Anwendung der bereits aufgestellten Grundsätze planmässig abgeleitet. Im 5. Kapitel wird auf die Darstellung von Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen eingegangen und die Verwendung mehrfach bezifferter Elemente sowie beweglicher Systeme gezeigt; u. A. sind hier auch als „abaques à images logarithmiques“ die aus der logarithmographischen Methode hervorgehenden Tafeln des Berichterstatters für die Auflösung von Gleichungen mit 3—6 Gliedern beschrieben. Nachdem so in stufenmässigem Fortschreiten von den einfachsten bis zu den verwickeltsten Fällen alle heute bekannten Hilfsmittel der Nomographie vorgeführt sind, wird endlich im 6. Kapitel, mit welchem der Verfasser sich vorzugsweise an Mathematiker wendet, zunächst die Aufgabe gelöst, alle Arten der ebenen Darstellung von Gleichungen zwischen n Veränderlichen, die möglich sind, zu bestimmen und einzuteilen, wobei sich die Einführung des Begriffs der Berührung zweier Elemente und eines Zeichens hierfür nützlich erweist, dann werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine vorgelegte Gleichungen einer der Hauptarten von Tafeln entspricht, in Gestalt von Differential- bezw. Funktionalgleichungen aufgestellt und zum Schlusse noch zwei spezielle Untersuchungen mitgeteilt, nämlich über die Gleichungen, die durch drei lineare Systeme fluchtrechter Punkte („points alignés“) darstellbar sind, sowie über die Darstellung quadratischer Gleichungen mit drei Veränderlichen durch Tafeln mit einer Schar von Kreisen und zwei Scharen von Geraden.

Nachdrücklich sei nochmals auf die mit erstaunlichem Fleisse zusammengetragenen Beispiele hingewiesen: bis ins Einzelne durchgeführte Tafeln aus allen erdenklichen Gebieten — der Bau- und Maschineningenieur, der Physiker, Astronom, Geodät, Offizier, Seemann, Rechnungs- und Versicherungsbeamte finden wie der Mathematiker, jeder für seine Zwecke, reiche Ausbeute darunter — die dem Verfasser Gelegenheit zu vielen nützlichen Bemerkungen über die zweckmässigste Herstellung gegeben haben und bei denen ihm sehr zu statten gekommen ist, dass er als Ingenieur die Zeichenkunst beherrscht. R. Mehmke.

Fr. Schilling, Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. 8⁰. 47 S. mit 28 Abb. Leipzig 1900, B. G. Teubner.

Dieses auf Anregung des Herrn Klein entstandene Schriftchen, das die weitere Ausführung eines vom Verfasser im Wintersemester 1899/1900 in der mathematischen Gesellschaft der Universität Göttingen gehaltenen Vortrages darstellt, ist für den im Titel angegebenen Zweck, in die Nomographie einzuführen und auf das Studium des vorher von uns besprochenen Werkes von d'Ocagne (aus dem auch die Abbildungen herüber genommen sind) vorzubereiten, recht brauchbar. Mit den darin benützten Benennungen ist der Unterzeichnete nicht durchweg einverstanden, insbesondere führt der auf S. 24 vorgeschlagene Name „collineare Rechentafel“, mit welchem „abaque à alignement“ (wofür wir allerdings noch keinen guten deutschen Ausdruck haben) wiedergegeben werden soll, in der Mehrzahl gebraucht leicht zu

Verwechslungen, da „collineare Rechentafeln“ nicht nur „abaques à alignement“, sondern auch mehrere Tafeln irgend welcher Art bedeuten kann, die im Sinne der projektiven Geometrie unter einander collinear sind; auch sei darauf hingewiesen, dafs „Rechentafel“, womit der Verfasser „abaque“ übersetzt, bei uns nicht selten statt Zahlen-Tafel (insbesondere Produktentafel) gebraucht wird — ich erinnere nur an die so verbreiteten Rechentafeln von Crelle —, weshalb der Unterscheidung wegen von graphischen Rechentafeln gesprochen werden sollte, wofür aber kürzer (wie längst üblich) „graphische Tafel“, oder wenn keine Verwechslung zu befürchten ist, einfach „Tafel“ gesagt werden kann (nach Ausweis der Wörterbücher bedeutet auch ἄβαξ ursprünglich nichts weiter als Brett oder Tafel, ohne eine bestimmte Verwendung auszudrücken). R. Mehmke.

Robert Haussner, Darstellende Geometrie von Gaspard Monge (1798). Übers. und herausg. von R. H. Mit zahlreichen Figuren in dem Texte und in den Anmerkungen. (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 117). 8⁰. 217 S. Leipzig 1900. Verlag von Wilhelm Engelmann.

Bei der erhöhten Wertschätzung, die man der darstellenden Geometrie gegenwärtig an den Universitäten entgegenbringt, ist die Veranstaltung einer wohlfeilen deutschen Ausgabe des grundlegenden Werkes von Monge jedenfalls ein dankenswertes und zeitgemässes Unternehmen, das namentlich in den Kreisen der Mathematik Studierenden mit Freuden begrüfst werden dürfte. Die vorliegende Übersetzung giebt von der unübertroffenen Klarheit und Anschaulichkeit der Darstellung, die das Originalwerk auszeichnen, ein deutliches Bild. Dass in den Figuren die veralteten ursprünglichen Buchstabenbezeichnungen durch die jetzt bei uns gebräuchlichen ersetzt worden sind, ist nur zu billigen. Eine wertvolle Zugabe für den Studierenden bilden die durchaus sachgemässen kritischen Anmerkungen des Herausgebers am Schlusse des Buches.

Braunschweig. R. Müller.

Neue Bücher[1]).

Arithmetik und Analysis.

Grossmann, Ludwig, Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie unter Rücksichtnahme auf die praktische Handhabung der Disciplinen der Finanzwissenschaft und Versicherungstechnik mit einigen, durch selbständige wissenschaftliche Errungenschaften auf dem Gebiete der reinen Mathematik begründeten, neuen Fundamenten der politischen Arithmetik, für Versicherungs- und Bank-Institute, sowie auch Lehrkräfte höherer Bildungsanstalten besonders geeignet. 12. (Schluss-)Lfg. gr. 8°. Suppl. Bd. VIII, 80 S. m. e. Kurventaf. Wien (III, Sofienbrückeng. 14) 1900, Selbstverlag. M. 5.

Herz, Norb., Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. (Sammlg. Schubert XIX.) 8°. IV, 381 S. m. 3 Tab. Leipzig 1900, Göschen. geb. in Leinw. M. 8.

Lüroth, J., Vorlesungen über numerisches Rechnen. gr 8°. VII, 194 S. m. 14 Fig. Leipzig 1900, B. G. Teubner. M. 8.

Rice, H. L., The theory and practice of interpolation, including mechanical quadrative and other important problems concerned with the tabular value of functions. With the required tables. Imp. 8vo. p. IX-234. London, Wesley. 16 s.

Runge, C., Praxis der Gleichungen (Sammlg. Schubert XIV.) III, 196 S. m. 8 Fig. Leipzig 1900, Göschen. M. 5. 20.

Astronomie und Geodäsie.

Adams, John Couch, Lectures on the Lunar theory. Edit. by R. A. Sampson. 8vo Cambridge, University Press. 5 s.

Ball, Sir Robert, A Primer of Astronomy. (Cambridge Science Primers.) Cr. 8vo. p. 192. Cambridge, University Press. 1 s. 6d.

Groth, Hugo, Zur Dynamik des Himmels. gr. 8°. IV, 74 S. Hamburg, Laeiss. M. 3.

Handwörterbuch der Astronomie. Hrsg. v. W. Valentiner. (Aus: Encyklop. d. Naturw.) III. Bd. 2. Abt. gr. 8°. XI, 611 S. m. 42 Abb. Breslau, Trewendt. M. 20; geb. M. 22. 40.

Neugebauer, P. V. Ein Beitrag zur Theorie der speciellen Störungen mit Anwendung auf eine Verbesserung der Bahn des Planeten (196) Philomela. Diss. Breslau. Fol., 48 S.

Turner, Herbert Hall, Modern Astronomy. Being some account of the revolution of the last quarter of a century. Cr. 8vo. p. 304. London, Constable. 6 s.

Uhlich, P., Lehrbuch der Markscheidekunde. gr. 8°. IX, 402 S. m. 482 Fig. Freiberg, Craz & Gerlach. M. 14.

---

1) Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1901.

VOGLER, CH. AUG., Geodätische Übungen f. Landmesser u. Ingenieure. 2. Aufl. 2. Tl. Winterübungen. gr. 8°. VI, S. 273—426 m. 25 Abb. Berlin 1900, Parey. Geb. in Segeltuch M. 5. 50.

Darstellende Geometrie. Steinschnitt.

CIANI, EDGARDO, La prospettiva cavaliera. 4°. p. 12, con 6 tavole. Milano 1900, Rebschini & Co.

MONGE, GASPARD, Darstellende Geometrie. (1798.) Übers. u. hrsg. v. ROB. HAUSSNER. Mit zahlreichen Fig. in dem Texte u. in den Anmerkgn. (Ostwald's Klassiker Nr. 117.) 8°. 217 S. Leipzig 1900, Engelmann. kart. M. 4.

SCHLOTKE, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Tl. Specielle darstellende Geometrie. 4 Aufl. gr. 8°. IV, 167 S. m. 199 Fig. Dresden 1900, Kühtmann. M. 3. 60; geb. M. 3. 80.

SCHRÖDER, J., Darstellende Geometrie. 1. Tl. Elemente der darstell. Geometrie. (Sammlung Schubert XII.) gr. 8°. VII, 282 S. m. 326 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. 5.

SCHRÖDER, MAX, Darstellende Geometrie. (Meth. Hittenkofer Nr. 8.) 4. Aufl. Lex. 8°. 20 S. m. 6 Bildern. Strelitz, Hittenkofer. M. 1. 25; 21 Übungsblätter dazu, gr. 4°, M. 6. 30.

—, Körperschattenlehre. (Methode Hittenkofer Nr. 11.) 2. Aufl, Lex. 8°. 10 S. m. 12 Abb. Ebenda. M. —. 50; 12 Übungsblätter dazu, gr. 4°, M. 3. 60.

BIERTHOF, FRANZ, Stéréotomie. Théorie et construction des arches biaises. In-8°, avec atlas petit in-4° de 10 pl. Louvain, Uytspruyst. Fr. 4. 50.

VECCHI, STANISLAO, Geometria descrittiva: lezioni dettate nella r. università di Parma nell'anno 1899—1900 e compilate per cura di Ezio Beggi. Disp. 47—82. 8°. p. 33—320. Parma 1900, lit. Zafferri.

WEISHAUPT, HEINR., Geometrische Schattenkonstruktion, nebst den Grundzügen der Beleuchtungskunde. (3. Abtlg. v.: Das Ganze des Linearzeichnens.) 4. Aufl. v. Max Richter. gr. 8°. VII, 102 S. m. Atlas v. 18 Taf. in qu. Folio. Leipzig, Zieger. kart. u. geb. in Leinw. M. 6.

Geschichte.

HERONIS Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. II. Fasc. I. Mechanica et catoptrica. Rec. L. Nix et W. Schmidt. — Herons v. Alexandria Mechanik u. Katoptrik. Hrsg u. übers. v. L. Nix u. W. Schmidt. Im Anh. Excerpte aus Olympiodor, Vitruv, Plinius, Cato, Pseudo-Euklid. 8°, XLIV, 415 S. m. 101 Fig. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

HOFF, J. H. VAN'T, Über die Entwickelung der exakten Naturwissenschaften im 19. Jahrh. u. die Betheiligung der deutschen Gelehrten. Vortrag. gr. 8°. 18 S. Hamburg 1900, Voss. M. —. 80.

Mechanik.

BÜTTNER, FRDR., Studien über die Green'sche Abhandlung: Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids (1832). (Preisschrift XXXVI der fürstl. Jablonowski'schen Ges.) Lex. 8°. V, 98 S. Leipzig 1900, B. G. Teubner. M. 6. 40.

CALDARERA, FR., Corso di meccanica razionale. Vol. I. (Cinematica; studio delle forze.) 8°. fig. p. IV, 323. Palermo 1900, tip. Matematica. L. 12. 50.

CLAUDEL, M., Théorie du navire. 1re partie. Équilibre et stabilité du navire en eau calme. In-8°, avec atlas in-4° de 56 pl. et 23 tableaux. Paris 1900, Challamel. Fr. 20.

COTTERILL, JAMES H., Applied Mechanics: an elementary general introduction to the theory of structures and machines. 5th ed., revised and enlarged. Roy. 8vo. p. 672. London, Macmillan. 18 s.

ERNST, AD., Eingriffverhältnisse der Schneckengetriebe m. Evolventen- u. Cykloiden-

verzahnung u. ihr Einfluss auf die Lebensdauer der Triebwerke. Ein Abriss der graph. Untersuchg. v. Schneckenräderwerken f. die Praxis u. den Unterricht an techn. Lehranstalten. Mit 77 Konstruktionsfig. (im Text u. auf 17 Tafeln). gr. 8°. VI, 92 S. Berlin, Springer. geb. in Leinw. M. 4.

Farrow, F. R., Stresses and Strains. Cr. 8vo. London 1900, Whittaker. 5 s.

Flamant, A., Hydraulique. 2e édition considérablement augmentée. Gr. in-8°. Paris 1900, Béranger. Fr. 25.

Gross, W., Die Berechnung der Schusstafeln. gr. 8°. IV, 89 S. m. 14 Fig. Leipzig, Teubner. M. 3.

Henrotte, J., Turbines hydrauliques. Pompes et ventilateurs centrifuges. Principes théoriques, dispositions pratiques et calculs des dimensions. In-4° avec fig. Liège 1900, Vve Dunod. Fr. 10.

Korn, Arth., Abhandlungen zur Potentialtheorie. 1. u. 2. Hft. gr. 8°, je 34 S. Berlin, Dümmler. Je M. 1.

—, Lehrbuch der Potentialtheorie. II. Allgem. Theorie des logarithmischen Potentials u. der Potentialfunktionen in der Ebene. gr. 8°. X, 366 S. m. 58 Fig. Berlin 1900, Dümmler. M. 9.

Kraft und Energie. Eine kritische Betrachtg. üb. die Grundbegriffe der Mechanik. gr. 8°. VI, 65 S. Wiesbaden 1900, Bergmann. M. 1.30.

Lorenz, H., Dynamik der Kurbelgetriebe m. besond. Berücksicht. der Schiffsmaschinen, gr. 8°. V, 156 S. m. 66 Fig. Leipzig, Teubner. M. 5

Molnár, E., Bestimmung der zweiten Ableitungen der Flächenpotentiale. Diss. Zürich 1900. 8°. 68 S.

Prandtl, Ludw., Kipp-Erscheinungen. Ein Fall v. instabilem elastischem Gleichgewicht. Diss. gr. 8°. 75 S. m. Abb. u. 2 Taf. Nürnberg, Ebner. M. 2.40.

Roberts, H. A., A treatise on elementary Dynamics. Dealing with relative motion mainly in two dimensions. Cr. 8vo, p. 270. London 1900, Macmillan. 4 s. 6 d.

Valentiner, Siegfr., Untersuchungen üb. die Beziehung zwischen dem Potential e. homogenen Kugel u. dem des Mittelpunktes. Diss. gr. 8°, 65 S. Karlsruhe 1900, Braun. M. 1.60.

Vallier, E., Théorie et tracé des freins hydrauliques, usités en artillerie. In-4° avec 61 fig. Paris 1900, Vve Dunod. Fr. 4.

Voigt, Wold., Elementare Mechanik als Einleitung in das Studium der theoretischen Physik. 2. Aufl. gr. 8°. X, 578 S. m. 56 Fig. Leipzig 1900, Veit & Co. M. 14, geb. in Halbfrz. M. 16.

Vraagstukken over theoretische mechanica, opgegeven bij het examen C aan de polytechnische school te Delft sedert 1883. Met antwoorden van J. A. Bonnermann. post 8°, 38. Delft, Waltman Jr. 1900. F. —.50.

Weiss, Heinr., Grundsätze der Kinematik. 1. Heft. Mit e. Atlas v. 10 Taf. in qu. Fol. gr. 8°. S. 1—256. Leipzig 1900, Felix. M. 10.

Physik und Geophysik.

De Bast, Omer, Éléments du calcul et de la mesure des courants alternatifs. In-8°. Paris 1900, Béranger. Fr. 7.50.

Colaço Belmonte, E. M. J., Energie en electriciteit. post 8°, 4 en 152, m. 93 fig. Groningen, Wolters. geb. F. 1,50.

Eckerlein, P. A., Über die Wärmeleitungsfähigkeit der Gase und ihre Abhängigkeit von der Temperatur (bei tiefen Temperaturen). Diss. München 1900. 8°. 56 S. u. 1 Taf.

Everett, J. D., Deschanels Natural Philosophy. Part 3, Electricity. An expansion of Everett's Deschanel. Part 3 on the lines of modern electrical theory. 8vo, p. 370. London, Blackie. 4 s. 6 d.

Fleming, J. A., The alternate current transformer in theory and practice. Vol. 1,

the introduction of electric currents. 3rd ed. 8vo, p. 628. London, Electrician Office. 12 s. 6 d.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1899. Dargestellt v. der physik. Gesellschaft zu Berlin. 55. Jahrg. 2. u. 3. Abt. gr. 8°. Braunschweig 1900, Vieweg & Sohn.
2. Physik des Äthers. LIII, 935 S. M. 34.
3. Kosmische Physik. XLIV, 544 S. M. 20.

Gross, Thdr., Kritische Beiträge zur Energetik. I. Die Verwandlungen der Kraft nach Robert Mayer. gr. 8°. XVIII, 58 S. Berlin, Krayn. M. 1. 75.

Hann, Jul., Lehrbuch der Meteorologie. Mit mehreren Taf. in Lichtdruck, verschiedenen Karten sowie zahlr. Abb. im Text. (In etwa 8 Lfgn.) 1. Lfg. gr. 8°. S. 1—80. Leipzig, Tauchnitz. M. 3.

Juliusburger, P., Über das Dupré-Rankine'sche Dampfspannungsgesetz. Diss. München 1900. 8°, 131 S. u. 3 Taf.

Koenigsberger, Joh., Ueber die Absorption des Lichtes in festen Körpern. Habilitationsschrift. gr. 8°. (48 S. m. Fig.) Leipzig 1900, Teubner. M. 1. 20.

Mémoires originaux sur la circulation générale de l'atmosphère (Halley, Hadley, Maury, Ferrel, W. Siemens, Möller, Overbeck, Von Helmholtz), annotés et commentés par Marcel Brillouin. In-8° avec fig. Paris 1900, Carré & Naud. Fr. 6.

Nobbe, A., Die Reflektion des Lichtes an den Metallen. II. Progr. 4°, 34 S. Berlin 1900.

Rapports présentés au Congrès de physique réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de physique rassemblés et publiés par Ch. Ed. Guillaume et L. Poincaré. 3 vol. gr. in-8° avec fig. Paris 1900, Gauthier-Villars. Fr. 50.
T. I: Questions générales. Metrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire. Fr. 18.
T. II: Optique. Électricité. Magnétisme. Fr. 18.
T. III: Eléctro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique. Fr. 18.

Rudolphi, Max, Die Molekularrefraktion fester Körper in Lösungen u. verschiedenen Lösungsmitteln. gr. 8°. 57 S. Ravensburg, Maier. M. 1. 20.

Schaefer, Cl., Ueber den Einfluss der Temperatur auf die Elasticität der Metalle. Diss. Bonn 1900. 8°. 70 S. u. 3 Taf.

Traité de physique biologique publié sous la direction de MM. d'Arsonval, Gariel, Chauveau, Marey. Secrétaire de la rédaction M. Weiss. (3 volumes.) T. I. Mécanique. Actions moléculaires de la chaleur. Par MM. Charrin, Dastre, Gariel, Hallion, Imbert, Langlois etc. In-8°. Paris, Masson. Fr. 25.

Villard, P., Les rayons cathodiques. (Scientia, partie physico-mathematique, n° 10.) In-12°. Paris 1900, Carré & Naud. Fr. 2.

Warburg, E., Über die kinetische Theorie der Gase. Festrede. gr. 8°. 32 S. Berlin, Hirschwald. M. —. 80.

Weinstein, B., Thermodynamik und Kinetik der Körper. 1. Bd. Allgemeine Thermodynamik u. Kinetik u. Theorie der idealen und wirklichen Gase u. Dämpfe. gr. 8°, XVIII, 484 S. m. Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 12.

Tafeln.

Bremiker's logarithmisch-trigonometrische Tafeln mit 6 Decimalstellen. Neu bearb. v. Th. Albrecht. 13 Ausg. gr. 8°. XVIII, 518 S. Berlin 1900, Nicolai. M. 4. 20; geb. M. 5.

Domke, F. Nautische, astronomische u. logarithmische Tafeln nebst Erklärung u. Gebrauchs-Anweisung f. die königl. preussischen Navigationsschulen. 10. Aufl. Neu bearb. v. O. Canin. Lex. 8°. XXIII, 360 S. Berlin 1900, v. Decker. M. 9. 80; geb. in Leinw. M. 10. 80.

Heger, Rich., Fünfstellige logarithmische u. goniometrische Tafeln, sowie Hülfstafeln zur Auflösung höherer numerischer Gleichungen. Für den Gebrauch an höheren Schulen bearb. Lex. 8°. IV, 112 S. Leipzig 1900, Teubner. Geb. in Leinw. M. 1.60

Junker, Karl M., Flächen-Tabellen f. die Cubatur-Berechnung v. Erdarbeiten. Lex. 8°. 56 S. m. 4 Fig. Budapest 1900. (Wien, Lehmann u. Wentzel.) M. 1.50.

Kugler, E. J., Multiplikator. Rieseneinmaleins. Imp. 4°. (1 Bl.) Pressburg 1900, Heckenast's Nachf. M. —.50.
(Auch engl. u. französ. Ausg.)

Ligowski, W., Sammlung fünfstelliger logarithmischer, trigonometrischer u. nautischer Tafeln, nebst Erklärungen der Tafeln der Astronomie. (Nautische Tafeln.) 4. Aufl. gr. 8°. (XXIII, 212 u. 48 S.) Kiel 1900, Universitäts-Buchh. geb. in Leinw. M. 8

Murai, Heinr., Zinzeszinsen-, Einlage-, Renten- u. Amortisations-Tabellen auf 10 Decimalstellen berechnet. Mit 480 ausgearb. Amortisationsplänen. 2. Aufl. gr. 8°. (189 u. 527 S.) Budapest (Redoute) 1900, Selbstverlag. Geb. in Leinw. M. 20.

Rohr, M. v., Die Logarithmen der Sinus u. Tangenten f. 0° bis 5° u. der Cosinus u. Cotangenten f. 85° bis 90° von tausendstel zu tausendstel Grad. Als Ergänzung zu C. Bremikers 5stell. Logerithmentafeln hrsg. gr. 8°. XX S. Berlin 1900, Weidmann. M. —.60.

Salmoiraghi, A., Nouvelles tables des coordonnées rectangulaires à 5 et à 4 décimales calculées suivant la division centésimale du quadrant et tables auxiliaires pour les calculs de la tachéometrie. Milan, Guidetti & Mondini. 4°. fig. p. VII, 189. L. 15.

Verschiedenes.

Ahrens, W., Mathematische Unterhaltungen u. Spiele. 2 Hälften. gr. 8°. XII, 428 S. m. Fig. u. e. Taf. Leipzig 1900, Teubner. Je M. 5; in 1 Leinw.-Bd. M. 10.

Über Wurzelgruppen, welche durch Umläufe ausgeschnitten werden.

Von Prof. Dr. W. HEYMANN in Chemnitz.

1. Vorbemerkungen.

Im 113. Bande[1]) des Journals für Mathematik (1894) habe ich gezeigt, dafs die Koordinaten der reellen Schnittpunkte zweier Kurven

$$(1) \qquad y = \varphi(x), \quad y = \psi(x)$$

stets durch direkte oder inverse Iterationsprozesse ermittelt werden können, und zwar ist

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \psi^{(-1)}\varphi\psi^{(-1)}\varphi \cdots \psi^{(-1)}\varphi(x_0), \\ x = \varphi^{(-1)}\psi\varphi^{(-1)}\psi \cdots \varphi^{(-1)}\psi(x_0), \end{cases}$$

je nachdem der konvergente Lauf auf der Kurve φ oder ψ (in Abscissenrichtung) beginnt.[2]) Es handelt sich, wie man sieht, um ein Annäherungsverfahren, welches vermöge seiner geometrischen Grundlage an Deutlichkeit von keinem anderen übertroffen wird. In gewissen Fällen läfst allerdings die Konvergenz zu wünschen übrig; aber auch dann braucht man die Methode nicht aufzugeben, sobald man

1) „Theorie der An- und Umläufe und Auflösung von Gleichungen."

2) Es sei gestattet, hier nachträglich eine Bemerkung einzuschalten. Die Brechpunkte der An- und Umläufe denken wir uns stets auf den Curven φ und ψ gelegen, aber das ist, wenn auch zweckmäfsig, so doch keineswegs nötig. Wenn die Gleichungen (1) in der Form $y = \varphi(x)$, $x = \psi^{(-1)}(y)$ vorausgesetzt werden, so kann die Iteration mit einem passend gewählten x_0, y_0 begonnen werden, wobei also jener Anfangspunkt den Curven nicht angehört. Dafs der Iterationsprozefs trotzdem nach dem Schnittpunkte konvergiert, erkennt man aus den explicite hingeschriebenen Kettenfunktionen. Es wird nämlich

$$y_1 = \varphi(x_0),\ x_1 = \psi^{(-1)}(y_0);\ y_2 = \varphi(x_1) = \varphi\psi^{(-1)}(y_0),\ x_2 = \psi^{(-1)}(y_1) = \psi^{(-1)}\varphi(x_0);$$

also schliefslich

$$y_{2k} = [\varphi\psi^{(-1)}(y_0)]^{(k)}, \quad x_{2k} = [\psi^{(-1)}\varphi(x_0)]^{(k)}.$$

Das sind aber bei hinreichend grofsem k in der That die Koordinaten des Schnittpunktes.

das Kurvensystem (1) durch zwei äquivalente Kurven ersetzt, d. h. durch solche, welche sich in den gleichen Schnittpunkten, jedoch unter veränderter Richtung schneiden. Auf solche Weise wird man direkt zur Newtonschen Annäherungsmethode hingeführt, wie a. a. O. genauer dargelegt worden ist.

Die Technik des Verfahrens läfst sich auch sonst noch in mannigfacher Art weiter ausbilden. Ich gedenke bei anderer Gelegenheit hierauf zurückzukommen und will nur vorübergehend auf den Wert von Modelltafeln hinweisen. Solche Tafeln, wie ich sie mit Erfolg für Unterrichtszwecke benutzt habe, enthalten die graphische Darstellung der einfachsten Funktionen ohne willkürlichen Parameter, wie $y = x^p (p = 2, 3, \cdots)$, $y = \log x$, $y = \sin x$, $y = (x^2 \pm 1)^2$ etc., und zwar in einem gehörig beschränkten aber ausreichenden Intervall von x. Neben den Originalkurven, welche den Tafelrand zumeist überschreiten würden, sind ihre „Fortsetzungen" aufgetragen, sodafs das Blatt überhaupt eine Reihe einzelner „Kurven-Repräsentanten" enthält, welche auf verschiedene Einheiten bezogen sind. Eigentliche Kurvenscharen, wie sie einem veränderlichen Parameter entsprechen würden, schliefsen wir für unsere Zwecke aus. Mittelst eines schweren, scharfkantigen Lineals, welches den durchgehends mit Millimeterteilung versehenen Tafelrand überragt, erledigt man die Auflösung trinomischer Gleichungen von der Form

$$\varphi(x) = mx + n,$$

gleichgültig ob sie algebraisch oder transcendent sind. Mit Hilfe des Modells $y = (x^2 \pm 1)^2$ und einer Geraden wird sich die Gleichung

$$(x^2 \pm 1)^2 = mx + n$$

lösen lassen, auf welche eine allgemeine Gleichung vierten Grades leicht zurückkommt. Auch die allgemeinere viergliedrige Gleichung

$$x^p = ax^2 + bx + c$$

kann immer so umgestaltet werden, dafs ihre Auflösung durch Schnitt eines Modells

$$y = (x^r \pm 1)^2$$

mit einer Geraden ausgeführt werden kann, wenn p, beziehentlich r gegebene Zahlen sind.

Die Abscissen, welche man als zu den Schnittpunkten gehörig der Zeichnung entnimmt, sind geeignete Anfangswerte für jedwedes Annäherungsverfahren. Bedient man sich im besonderen der An- und Umläufe, so entscheidet die graphische Darstellung noch darüber, auf welcher Kurve der konvergente Lauf beginnt, und welche der beiden

Ketten (2) in Anwendung zu bringen ist. — Dafs übrigens die für die Modelle verlangte Abscheidung überflüssiger Parameter auch eine Entlastung der Ketten bewirkt und die Iterationsprozesse vereinfacht, liegt auf der Hand. Es würde hier zu weit führen, über die Tafeln Näheres mitzuteilen, zumal jedes Blatt seine besondere Einrichtung hat, die ja durch die charakteristischen Eigenschaften der dargestellten Funktionen von selbst gegeben ist. Das Wesentliche bleibt immer, dafs auf beschränkter Fläche die Kurve in möglichst grofser Erstreckung zur Geltung kommt. Bei gewissen Kurven, wie der logarithmischen Linie, der Sinusoide, kann das Intervall auf natürlichem Wege eingeschränkt werden; bei anderen müssen die Repräsentanten, welche nötigenfalls mit gekürzten oder gestreckten Ordinaten aufzutragen sind, berücksichtigt werden.

Wenn man konvergente Umläufe graphisch oder durch Iteration verfolgt, kann der eigentümliche Fall eintreten, dafs der Lauf in sich zurückkehrt, bevor noch der eingeschlossene Schnittpunkt erreicht ist. Wir nennen solche, die Konvergenz störende Läufe indifferent oder stagnant. Es ist aber deutlich, dafs man aus den aufeinanderfolgenden Iterationsprozessen unmittelbar erkennt, in welcher Weise die durch Umläufe bestimmten Abscissenwerte hin und her schwanken, und dafs man also durch Fixierung einer Zwischenlage eine „Dämpfung" der Schwingungen herbeiführen kann. Mit anderen Worten: Ein Umlauf, welcher den Schnittpunkt wirklich erreichen soll, mufs stets innerhalb des stagnierenden Umlaufes, welcher jenen Punkt am engsten umgiebt, begonnen werden. Sollte der stagnierende Umlauf unendlich nahe an den Schnittpunkt heranrücken, so ist für diesen „kritischen Punkt"

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{d\psi}{dx}, \tag{3}$$

und damit erledigt sich die Sache von selbst.

In unseren früheren Arbeiten kam es uns darauf an, die stagnanten Umläufe als störende Elemente möglichst bei Seite zu setzen. Inzwischen hat es sich gezeigt, dafs gerade diese Gebilde das höhere Interesse beanspruchen, insofern sie zu ganzen Gruppen von Wurzeln gewisser Gleichungen führen. In der That kann das antike Intersektionsproblem dahin erweitert werden, dafs man nach den Punktgruppen im System zweier Kurven fragt, welche von konvergenten Umläufen ausgeschnitten werden, so nämlich, dafs letztere in stagnante Umläufe übergehen, d. h. ein geschlossenes rechtwinkliges Vieleck bilden. Die eigentlichen Schnittpunkte der Kurven gehören dann dem besonderen Falle an, in welchem jenes Vieleck unendlich kleine Dimensionen besitzt.

Hiermit kommen wir zu dem eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung: Wir betrachten solche Gleichungen, deren Wurzeln durch stagnante Umläufe höherer Art bestimmt sind.

2. Konvergente und stagnante Umläufe höherer Art.

Die Schnittpunktsabscissen des Kurvensystems (1) sind bestimmt durch die Gleichung

$$(4)\qquad \varphi(x) = \psi(x), \text{ d. h. } x = \psi^{-1}\varphi(x) = f(x),$$

und es erweist sich für theoretische Betrachtungen als zweckmäfsig, das System (1) zu ersetzen durch

$$(5)\qquad y = x, \; y = f(x).$$

Die reellen Abscissen der Schnittpunkte, welche die Gerade $y = x$ auf der Kurve f ausschneidet, werden jetzt durch die Ketten

$$(6)\qquad x_k = f^{(k)}(x_0), \text{ resp. } x_k = f^{(-k)}(x_0)$$

dargestellt, je nachdem der konvergente Lauf auf f oder auf der Geraden beginnt.

Die Bedingung, dafs ein Lauf stagnant wird, ist, je nachdem das sofort oder aber in einem später folgenden Brechpunkte eintritt,

$$x_1 = x_0, \; x_2 = x_0, \; \cdots\cdot x_m = x_0,$$

und hiernach unterscheiden wir Läufe erster, zweiter, $\cdots$ $m$ter Art.[1]) Unterdrücken wir die Indices, so ist ein Lauf $m$ter Art definiert durch

$$(7)\qquad x = f^m(x).$$

Ein stagnanter Lauf $m$ter Art besteht in einem rechtwinkligen $2m$-Eck, dessen Seiten sich durchsetzen können, wenn $m > 2$; für $m = 2$ treten Quadrate, beziehentlich Rechtecke auf. Jeder stagnante Lauf kann im allgemeinen durch einen parallel laufenden konvergenten Lauf, welcher schlechthin Lauf derselben Art heifsen möge, ausgeschnitten werden. Bei besonderer Gestalt und Lage der Kurve f können alle, an beliebiger Stelle begonnenen Läufe stagnieren, ein Fall, welchen wir für sich behandeln wollen.

Ist $m = 1$, so bestimmt die Gleichung

$$(7a)\qquad x = f(x)$$

einfach die Schnittpunkte des Kurvensystems (5), von denen jeder

1) Den Begriff „$p$ter Ordnung“, welcher in der früheren Arbeit vorkommt, geben wir auf. Die Ordnung p würde der Art $2p$ entsprechen.

reelle durch einen konvergenten An- oder Umlauf erster Art ausgeschnitten wird. Der stagnierende Lauf erster Art liegt dem Schnittpunkt unendlich nahe und besteht in der unendlich kleinen Fortsetzung des entsprechenden Laufes erster Art.

Die Gleichung (7) bestimmt neben den stagnanten Läufen $m$ter Art auch jene erster Art, d. h., sie enthält die Wurzeln der Gleichung (7a) in sich. Ist $m = pqr\cdots$ eine zusammengesetzte Zahl, so ergiebt (7) die Abscissen, welche die stagnanten Läufe $p, q, r\cdots$ ter Art festlegen. Anders gefafst giebt dies den Satz: Alle reellen Wurzeln der Gleichung $x = f^{(m)}(x)$ können durch Schnitt der einfachen Kurve f mit der Geraden $y = x$ erhalten werden, wenn neben den die Schnittpunkte bestimmenden Läufen erster Art auch alle möglichen Läufe höherer Art Verwendung finden.

3. Reduzibilität der Gleichung $x = f^{(m)}(x)$.

Es sei von jetzt ab f eine ganze rationale Funktion vom Grade n; im übrigen unterscheiden wir, ob m eine zusammengesetzte Zahl ist oder nicht.

A) Es sei m eine Primzahl. Alle Wurzeln der Gleichung werden dann ausgeschnitten durch n Läufe erster Art (Schnittpunkte) und k Läufe $m$ter Art ($2m$-Ecke), daher ist.

$$n^m = n + km, \text{ d. h. } k = \frac{n^m - n}{m}. \tag{8}$$

Die Zahl k giebt zugleich den Grad der Resolvente an, vermittelst welcher die Gleichung $(n^m - n)$ten Grades zur Bestimmung der Läufe $m$ter Art in Gleichungen vom Grade m zerlegt wird. Damit k, wie notwendig, eine ganze Zahl werde, mufs m entweder in n oder in $(n^{m-1} - 1)$ enthalten sein. Bedeutet daher m eine Primzahl, welche in n nicht aufgeht, so wird

$$n^{m-1} - 1 \equiv 0 \pmod{m}, \tag{9}$$

und das ist der Satz von Fermat.

B) Es sei $m = pq$, unter p, q zwei verschiedene Primzahlen verstanden. In diesem Falle werden alle Wurzeln der Gleichung $x = f^{(m)}(x)$ ausgeschnitten durch n Läufe erster Art, enthalten in $x = f(x)$; k' Läufe $p$ter Art, enthalten in $x = f^{(p)}(x)$; k'' Läufe $q$ter Art, enthalten in $x = f^{(q)}(x)$ und k Läufe pqter Art, enthalten in dem letzten Faktor der zerfallenden Gleichung. Daher ist

$$n^{pq} = n + k'p + k''q + kpq. \tag{10}$$

Weil p, q Primzahlen sind, so bestimmen sich k' und k'' wie unter A), d. h.

$$(11)\qquad k' = \frac{n^p - n}{p},\ k'' = \frac{n^q - n}{q},$$

folglich geht 10) über in

$$(12)\qquad n^{pq} = n^p + n^q - n + kpq,$$

sodafs

$$(13)\qquad k = \frac{n^{pq} - n^p - n^q + n}{pq}$$

die Anzahl der Läufe pqter Art ergiebt. Hieran schliefst sich mit Notwendigkeit die Kongruenz

$$(14)\qquad n^{pq-1} - n^{p-1} - n^{q-1} + 1 \equiv 0 \text{ (mod. } pq).$$

C) Es sei $m = p^\alpha$, unter p eine Primzahl und unter α eine ganze positive Zahl verstanden. Im Falle $m = p^2$ werden alle Wurzeln der Gleichung $x = f^m(x)$ ausgeschnitten durch n Läufe erster Art, k' Läufe $p$ter Art und k'' Läufe von der Art p^2. Daher ist

$$(15)\qquad n^{p^2} = n + k'p + k''p^2,$$

wobei k' wie unter A) zu berechnen ist; mithin ergiebt sich

$$(16)\qquad k'' = \frac{n^p(n^{p(p-1)} - 1)}{p^2}.$$

Im Falle $m = p^3$ führt eine ähnliche Abzählung zu

$$(17)\qquad n^{p^3} = n + k'p + k''p^2 + k'''p^3,$$

sodafs mit Rücksicht auf 15) die Anzahl der Läufe von der Art p^3 durch

$$(18)\qquad k''' = \frac{n^{p^2}(n^{p^2(p-1)} - 1)}{p^3}$$

bestimmt ist. Allgemein ergiebt sich die Anzahl der Läufe von der Art p^α zu

$$(19)\qquad k^{(\alpha)} = \frac{n^{(p^\alpha)} - n^{(p^{\alpha-1})}}{p^\alpha},$$

an welche Formel sich die bekannte Kongruenz

$$(20)\qquad (n^s)^{p-1} - 1 \equiv 0 \text{ (mod. } p^\alpha),\ s = p^{\alpha-1}$$

anschliefst.

D) Es sei $m = pqr$, unter p, q, r verschiedene Primzahlen verstanden. In selbstverständlicher Bezeichnungsweise hat man

$$21)\qquad n^{pqr} = n + k'p + k''q + k'''r + k_1qr + k_2rp + k_3pq + kpqr,$$

wobei die Zahlen k' bis k''' wie unter A) und k_1 bis k_3 wie unter B)

zu bestimmen sind. Die Anzahl der Läufe von der Art pqr beträgt daher

$$(22) \qquad k = \frac{n^{pqr} - n^{qr} - n^{rp} - n^{pq} + n^p + n^q + n^r - n}{pqr}$$

während sich gleichzeitig die Kongruenz

$$(23) \quad n^{pqr-1} - n^{qr-1} - n^{rp-1} - n^{pq-1} + n^{p-1} + n^{q-1} + n^{r-1} - 1 \equiv 0 \pmod{pqr}$$

als notwendig herausstellt. Letztere läſst sich symbolisch darstellen wie folgt

$$(24) \qquad (n^{p-1} - 1)(n^{q-1} - 1)(n^{r-1} - 1) \equiv 0 \pmod{pqr},$$

wobei nach der Multiplikation

$$p + q - 2 \text{ durch } pq - 1, \; p + q + r - 3 \text{ durch } pqr - 1$$

zu ersetzen ist, und hieraus ersieht man, welches Bildungsgesetz im allgemeinen Falle stattfinden würde.

E) Es sei $m = p^\alpha q^\beta$, unter p, q verschiedene Primzahlen und unter α, β ganze positive Zahlen verstanden: Wenn wir zunächst $\alpha = 2$, $\beta = 1$ wählen, so ergiebt sich die Beziehung

$$(25) \qquad n^{p^2 q} = n + k'p + k''q + k_1 p^2 + k_2 pq + kp^2 q,$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf bereits entwickelte Formeln

$$(26) \qquad k = \frac{n^{p^2 q} - n^{p^2} - n^{pq} + n^p}{p^2 q}.$$

Die entsprechende Kongruenz lautet

$$(27) \qquad n^{p(pq-1)} - n^{p(p-1)} - n^{p(q-1)} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2 q}.$$

In ähnlicher Weise hat man für $\alpha = 2$, $\beta = 2$

$$(28) \qquad k = \frac{n^{p^2 q^2} - n^{p^2 q} - n^{pq^2} + n^{pq}}{p^2 q^2}$$

und

$$(29) \qquad n^{pq(pq-1)} - n^{pq(p-1)} - n^{pq(q-1)} + 1 \equiv 0 \pmod{p^2 q^2}.$$

Die Kongruenzen (27) und (29) schreibt man symbolisch:

$$(27a) \qquad [(n^p)^{p-1} - 1][(n^p)^{q-1} - 1] \equiv 0 \pmod{p^2 q},$$

$$(29a) \qquad [(n^{pq})^{p-1} - 1][(n^{pq})^{q-1} - 1] \equiv 0 \pmod{p^2 q^2},$$

wobei die Verbindung $p + q - 2$ zu ersetzen ist durch $pq - 1$.

Allgemein hat man für den Fall $m = p^\alpha q^\beta$ die Kongruenz

$$(30) \qquad (n^s)^{pq-1} - (n^s)^{p-1} - (n^s)^{q-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha q^\beta}$$

oder symbolisch

(30a) $$[(n^s)^{p-1}-1][(n^s)^{q-1}-1]\equiv 0 \pmod{p^\alpha q^\beta},$$

wobei

$$s = p^{\alpha-1}q^{\beta-1} \text{ und } p+q-2 \text{ ident. } pq-1.$$

Hiernach läfst sich die Kongruenz für den Fall $m = p^\alpha q^\beta r^\gamma \ldots$ unmittelbar anschreiben.

3a. Ableitung der aufgestellten Kongruenzen aus dem Satze von Fermat.

Da die im vorhergehenden Abschnitt angegebenen Kongruenzen bei der Abzählung von Umläufen auftreten, aber diese geometrischen Gebilde imaginär sein können, so wollen wir die Resultate nachträglich auch rein analytisch ableiten und dabei ausschliefslich den Satz von Fermat als bekannt voraussetzen.

Betreffs der Kongruenz (14) bemerke man, dafs der Ausdruck

$$n^{pq-1}-n^{p-1}-n^{q-1}+1$$

identisch umgeformt werden kann in

$$n^{p+q-2}(n^{(p-1)(q-1)}-1)+(n^{p-1}-1)(n^{q-1}-1),$$

und dann ist die Teilbarkeit durch pq unmittelbar zu erkennen. Bei der Kongruenz 30) beachte man, dafs der Ausdruck

$$(n^s)^{pq-1}-(n^s)^{p-1}-(n^s)^{q-1}+1 \quad (s=p^{\alpha-1}q^{\beta-1})$$

identisch ist mit

$$(n^s)^{p+q-2}[(n^s)^{(p-1)(q-1)}-1]+[(n^s)^{p-1}-1][(n^s)^{q-1}-1],$$

welche Gröfse durch $p^\alpha q^\beta$ teilbar ist.

Um endlich auch die Teilbarkeit der linken Seite von (23) darzuthun, führe man die Bezeichnungen ein

$$n^{p-1}-1=|p|,\ n^{(p-1)(q-1)}-1=|pq|,\ n^{(p-1)(q-1)(r-1)}-1=|pqr|,$$

wobei allgemein $|m|$ eine durch m teilbare Grösse bedeutet. Der in (23) auftretende Ausdruck

$$n^{pqr-1}-n^{qr-1}-n^{rp-1}-n^{pq-1}+n^{p-1}+n^{q-1}+n^{r-1}-1$$

läfst sich dann folgendermafsen schreiben

$$n^{qr+rp+pq-p-q-r}\cdot|pqr|$$
$$+\,n^{p+q+r-3}\cdot[|qr|\cdot|rp|\cdot|pq|+|rp|\cdot|pq|+|pq|\cdot|qr|+|qr|\cdot|rp|]$$
$$+\,n^{q+r-2}\cdot|p|\cdot|qr|+n^{r+p-2}\cdot|q|\cdot|rp|+n^{p+q-2}\cdot|r|\cdot|pq|+|p|\cdot|q|\cdot|r|,$$

und hier findet man den Faktor pqr in jedem einzelnen Gliede.

4. Algebraische Gleichungen, deren Wurzeln durch Umläufe zweiter Art ausgeschnitten werden.

Wir betrachten die Gleichung

$$x = f^{(2)}(x), \tag{31}$$

in welcher f eine ganze Funktion $n$ten Grades bezeichnet. Die einmal iterirte Funktion $f^{(2)}$ erlangt den Grad n^2, und da (31) die ursprüngliche Gleichung $x = f(x)$ rational ausscheiden läſst, so bleibt eine Gleichung vom Grade $n(n-1)$ zurück, welche in $k = \frac{1}{2} n(n-1)$ quadratische Gleichungen zerspalten werden kann, von denen eine jede einen stagnanten Umlauf zweiter Art bestimmt. Unsere Aufgabe besteht darin, daſs wir jene quadratischen Gleichungen und die zugehörige Resolvente $k$ten Grades explicite darstellen.

Um durchweg an geometrischen Vorstellungen festhalten zu können, spalten wir die Gleichung (31) in

$$f(x) = f^{(-1)}(x) = y \tag{32}$$

und betrachten demgemäſs das neue Kurvensystem

$$y = f(x) \text{ und } x = f(y). \tag{33}$$

Für diese Kurven hat die Gerade $y = x$ die Eigenschaft eines ebenen Spiegels. Die n Schnittpunkte der Originalkurven

$$y = x, \quad y = f(x) \tag{5}$$

fallen auf die spiegelnde Gerade, während die übrigen $n(n-1)$ Punkte zu beiden Seiten symmetrisch verteilt liegen. Wählen wir die spiegelnde Gerade als Ordinatenachse eines rechtwinkligen Systems UV und behalten den alten Koordinatenanfang O bei, so werden sich die n^2 Schnittpunktsabscissen u der auf das neue System bezogenen Kurven folgendermaſsen verteilen: n Abscissen fallen mit O zusammen und reduzieren sich also auf Null, $\frac{1}{2} n(n-1)$ Abscissen bedecken die positive U-Achse, und ebensoviele gleichgroſse entgegengesetzte Abscissen finden sich auf der negativen U-Achse vor. Hierdurch ist das Zerfallen der in Betracht kommenden Gleichung sicher gestellt. — Beiläufig sei bemerkt, daſs die angegebene Transformation auch auf den zunächst noch ausgeschlossenen Fall paſst, wenn f eine algebraische gebrochene Funktion bedeutet, oder wenn überhaupt zwei sich spiegelnde Kurven

$$F(x, y) = 0 \text{ und } F(y, x) = 0$$

vorgelegt sind, unter F eine rationale Funktion der Veränderlichen verstanden.

Wir behandeln nun die Sonderfälle $n = 3$ und $n = 4$.

A) Umläufe zweiter Art im Kurvensystem

(34) $$y = x \text{ und } y = x^3 + \alpha x + \beta = f(x).$$

Die Bestimmungsgleichung für die Schnittpunkte wird

(35) $$x^3 + (\alpha - 1)x + \beta = 0,$$

und diejenige, welche die Läufe erster und zweiter Art gleichzeitig ergiebt, lautet

(36) $$x = (x^3 + \alpha x + \beta)^3 + \alpha(x^3 + \alpha x + \beta) + \beta = f^{(2)}(x).$$

Transformieren wir nun, wie in Abschnitt 4 angegeben, die beiden Kurven

(37) $$\begin{cases} y = x^3 + \alpha x + \beta = f(x) \\ x = y^3 + \alpha y + \beta = f(y) \end{cases}$$

mittelst

(38) $$x = \tfrac{1}{2}(u + v),\ y = \tfrac{1}{2}(-u + v),$$

wobei die numerischen Faktoren zweckmäfsig abgeändert wurden, ohne dafs die geometrische Interpretation darunter leidet. Den addierten und subtrahierten Gleichungen (37) entsprechen dann die beiden anderen

(39) $$v^3 + 3u^2v + 4(\alpha - 1)v + 8\beta = 0,$$

(40) $$u[u^2 + 4(\alpha + 1) + 3v^2] \qquad = 0.$$

Aus (40) ergiebt sich zunächst $u = 0$, d. h. $v = 2x$, womit 39) übergeht in

(35) $$x^3 + (\alpha - 1)x + \beta = 0,$$

wie zu erwarten war. Berücksichtigt man dagegen den zweiten Faktor von (40), so geht (39) über in

(41) $$v^3 + (\alpha + 2)v - \beta = 0.$$

Dieses ist die gewünschte Resolvente, während die quadratischen Gleichungen für die drei stagnanten Umläufe zweiter Art in der gemeinsamen Form

(42) $$x^2 - vx + (v^2 + \alpha + 1) = 0$$

enthalten sind.

Ein für die Konstruktion günstiges Beispiel ergiebt die spezielle Annahme $\alpha = -9$, $\beta = -6$. Die Resolvente (41) geht über in

$$v^3 - 7v + 6 = (v - 1)(v - 2)(v - 3) = 0;$$

die drei entsprechenden quadratischen Gleichungen werden

$$\alpha)\ x^2 - x - 7 = 0,\ \ \beta)\ x^2 - 2x - 4 = 0,\ \ \gamma)\ x^2 - 3x + 1 = 0,$$

und hierzu kommt die Gleichung für die Schnittpunkte

$$\delta)\ x^3 - 10x - 6 = 0.$$

Alle diese Gleichungen besitzen nur reelle Wurzeln, und ihr Produkt führt in der That zu

$$(x^3 - 9x - 6)^3 - 9(x^3 - 9x - 6) - x - 6 = 0.$$

Der Vorgang ist in Fig. 1 dargestellt, in welcher die Kurve

$$y = x^3 - 9x - 6$$

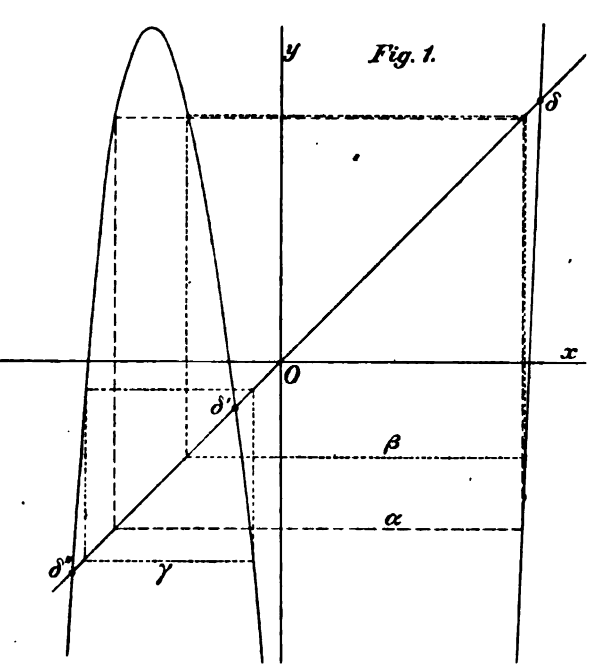
von der Geraden $y = x$ geschnitten wird. Die aus einem Zuge bestehende Kurve kulminiert tief unter der x-Achse und ist daher unterbrochen gezeichnet worden. Die Einheit beträgt 10 mm. Die Wurzeln der drei quadratischen Gleichungen α), β), γ) werden durch drei stagnante Umläufe ausgeschnitten, welche entsprechend dieselben Buchstaben tragen. Außerdem trifft die Gerade die Kurve in den Punkten δ, δ', δ'', deren Abscissen

$x = 3{,}427\,88;$

$x' = -0{,}624\,34;$

$x'' = -2{,}803\,54$

der kubischen Gleichung δ) genügen.



B) Umläufe zweiter Art im Kurvensystem

(43) $$y = x \text{ und } y = x^4 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = f(x).$$

Transformieren wir die sich spiegelnden Kurven $y = f(x)$ und $x = f(y)$ in der erwähnten Weise, so entsteht

(44) $$(u^2 + v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4\alpha(u^2 + v^2) + 8(\beta - 1)v + 16\gamma = 0,$$

(45) $$u[v(u^2 + v^2) + 2\alpha v + 2(\beta + 1)] = 0.$$

Für $u = 0$, d. h. $v = 2x$ geht (44) über in

(46) $$x^4 + \alpha x^2 + (\beta - 1)x + \gamma = 0,$$

was der Gleichung $x = f(x)$ entspricht. Dagegen führt die Elimination

von u aus der verschwindenden Klammergröfse und der Gleichung (44) zu der Resolvente

$$(47)\qquad v^6 + 2\alpha v^4 + 4v^3 + (\alpha^2 - 4\gamma)v^2 - (\beta + 1)^2 = 0.$$

Die quadratischen Gleichungen zur Bestimmung der sechs stagnanten Umläufe sind enthalten in

$$(48)\qquad x^2 - vx + \tfrac{1}{2}\left(v^2 + \alpha v + \frac{\beta+1}{v}\right) = 0.$$

Es sei bemerkt, dafs die Gleichung (47) mittelst $v = \varrho t$ in eine Gleichung mit beliebigen Koeffizienten transformiert werden kann, und dafs eine völlig allgemeine, nicht defekte Gleichung sechsten Grades nach Adjunktion der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades auf unsere Gleichung zurückkommt.

Nicht ohne Interesse sind hier gewisse Sonderfälle. Es sei $\beta = 0$, dann kann man der zweiten Gleichung unter (43) die Form

$$(49)\qquad y = (x^2 - a)^2 - b = f(x)$$

erteilen, wobei $\alpha = -2a$, $\gamma = a^2 - b$ gesetzt wurde. Denkt man sich nun die Aufgabe gestellt, es sollten die stagnanten Umläufe zweiter Art im Kurvensystem

$$(50)\qquad y = x^2 - a = \varphi(x),\ y = \sqrt{b + x} = \psi(x)$$

bestimmt werden, so würde das zu der Bedingung

$$(51)\qquad \psi^{(-1)}\varphi(x) = \varphi^{(-1)}\psi(x)$$

führen, welche mit

$$f(x) = f^{(-1)}(x),\ \text{d. h. } x = f^{(2)}(x)$$

identisch ist. Vergl. Abschn. 2. In der That lassen sich zwischen zwei Parabeln, deren gegenseitige Lage durch (51) gegeben ist, sechs rechtwinklige Umläufe zweiter Art angeben, deren zwölf Abscissen in Verbindung mit den Abscissen der vier Schnittpunkte genau den sechzehn Wurzeln unserer Aufgabe entsprechen.

Die betreffenden Abscissen und Ordinaten können wir entweder durch Kettenpotenzen oder Kettenwurzeln darstellen. Im letzteren Falle übersieht man die Vieldeutigkeit besonders leicht, denn man hat folgende Stammfunktionen:

$$(52)\qquad \begin{cases} x = f^{(-1)}(y),\ \text{d. h.} \\ x = \sqrt{a + \sqrt{b + y}} \\ x = \sqrt{a - \sqrt{b + y}} \\ x = -\sqrt{a + \sqrt{b + y}} \\ x = -\sqrt{a - \sqrt{b + y}} \end{cases} \qquad (53)\qquad \begin{cases} y = f^{(-1)}(x),\ \text{d. h.} \\ y = \sqrt{a + \sqrt{b + x}} \\ y = \sqrt{a - \sqrt{b + x}} \\ y = -\sqrt{a + \sqrt{b + x}} \\ y = -\sqrt{a - \sqrt{b + x}} \end{cases}$$

Trägt man eine der Stammfunktionen für y in eine solche für x ein oder auch umgekehrt, so erscheint die erwähnte Gleichung sechzehnten Grades für x beziehentlich y in irrationaler Form, nämlich

(54) $$x = f^{(-2)}(x), \text{ bez. } y = f^{(-2)}(y).$$

Wird diese Eintragung mit irgend zwei bestimmten Stammfunktionen wiederholt und hinreichend oft vorgenommen, so entstehen die Kettenwurzeln

(55) $$x = f^{(-2k)}(x), \text{ bez. } y = f^{(-2k)}(y),$$

d. h.

(56) $$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{a + \sqrt{b + \cdots}}}}$$

welche, wenn sie konvergent sind, vermöge des durch die Stammwurzeln genau indizierten Vorzeichenwechsels sowohl die sechzehn Werte für x, als auch für y darstellen. Wirklich konjugiert sind natürlich nur solche Werte von x und y, welche aus ebendenselben beiden Stammfunktionen entspringen.

Bilden wir mit Rücksicht auf (38)

(57) $$v = x + y,$$

wobei x und y konjugiert sind, so wird in vier Fällen $y = x$, also $v = 2x$, und damit kommen wir zu den Auflösungen der Gleichung vierten Grades (vergl. (46))

(58) $$x^4 + \alpha x^2 - x + \gamma = 0.$$

Die übrigen zwölf konjugierten x und y liefern, paarweise verknüpft, nur sechs wirklich verschiedene Summen, weil x und y vertauschbar sind, und dadurch gelangt man zu den sechs Wurzeln der Gleichung

(59) $$v^6 - 4av^4 + 4v^3 + 4bv^2 - 1 = 0.$$

Betreffs der Anfangswerte x_0 und y_0 in den Kettenwurzeln (56) sowie des Falles, in welchem statt der Wurzeln Kettenpotenzen eintreten, verweisen wir auf unsere früheren Arbeiten, wo diese Fragen ausführlich behandelt worden sind.

Gehen wir in der Spezialisierung noch einen Schritt weiter und setzen $b = a$, so wird $\psi(x) = \varphi^{(-1)}(x)$, Gleichung (51) geht über in

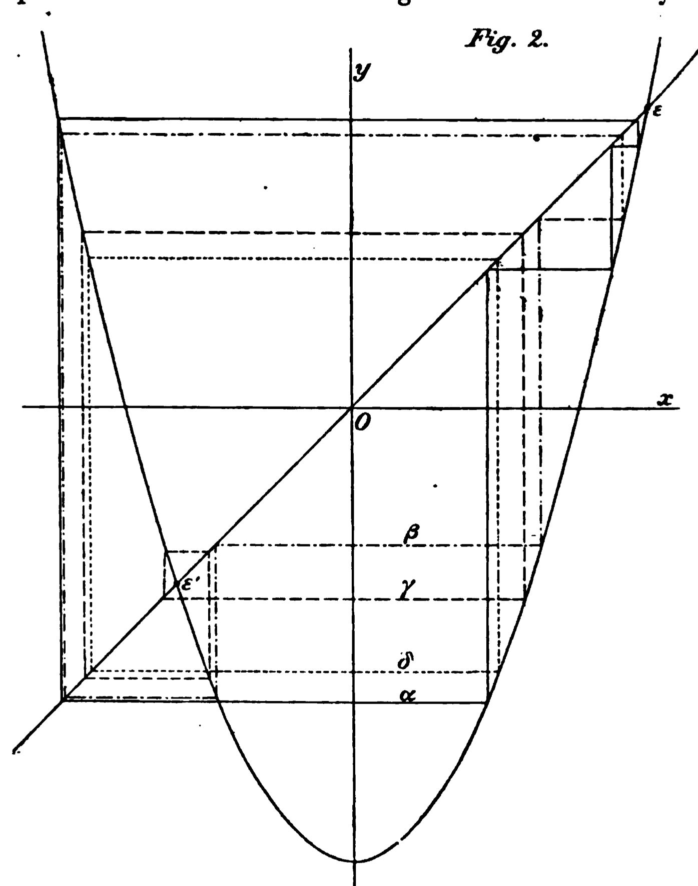
(60) $$\varphi^{(2)}(x) = \varphi^{(-2)}(x), \text{ d. h. } x = \varphi^{(4)}(x),$$

und solchergestalt gelangen wir zur Bestimmungsgleichung der stagnanten Läufe vierter Art im Kurvensystem

(61) $$y = x \text{ und } y = x^2 - a.$$

Wir verfolgen diesen Fall hier nicht weiter und bemerken nur, daſs Gleichung (59) jetzt zu einer reziproken wird. Es entspricht das

völlig der früher gegebenen Theorie, insofern die Resolvente dritten Grades jener reziproken Gleichung die drei stagnanten Umläufe vierter Art bestimmt, neben denen noch ein Lauf zweiter Art sowie zwei Schnittpunkte vorhanden sind. In Fig. 2 ist das Kurvensystem (61)



unter Annahme von $a = 4$ und der Längeneinheit 15 mm dargestellt. Die Umläufe vierter Art tragen die Buchstaben α, β, γ, der Umlauf zweiter Art ist mit δ bezeichnet, die Schnittpunkte heissen ε und ε'.

5. Algebraische Gleichungen, deren Wurzeln durch Umläufe dritter Art ausgeschnitten werden.

Wir wenden uns der Gleichung

(62) $$x = f^{(3)}(x)$$

zu, deren Auflösung durch Umläufe dritter Art im Kurvensystem

(63) $$y = x \text{ und } y = f(x)$$

zu vollziehen ist. Wenn wir die Gleichung (62), wie in den früheren Abschnitten, durch ein äquivalentes Schnittpunktsproblem ersetzen wollten, so müfsten wir eines der Kurvensysteme

$$y = x \text{ und } y = f^{(3)}(x) \text{ oder } y = f^{(-1)}(x) \text{ und } y = f^{(2)}(x)$$

benutzen. Da indessen auf solche Weise die Symmetrie verloren geht, so bringen wir an Stelle der vorgelegten Gleichung die drei simultanen

(64) $$x = f(y),\; y = f(z),\; z = f(x),$$

an, welchen sich räumliche Betrachtungen leicht anschliefsen lassen. Mit Rücksicht auf den Fall einer gröfseren Anzahl von Veränderlichen schlagen wir jedoch einen analytischen Weg ein, wie er in der Theorie der Abelschen Gleichungen vorgezeichnet ist.

Es sei

(65) $$x^3 - 3px^2 + 3qx - r = 0 = g(x)$$

die Bestimmungsgleichung für die Abscissen eines stagnanten Umlaufes dritter Art. Nach Abschn. 3. A) giebt es

(66) $$k = \tfrac{1}{3}(n^3 - n)$$

solcher Umläufe; aber zu diesen gesellen sich noch die n Umläufe erster Art, welche in (62) mit enthalten sind. Diese Umläufe werden durch unseren Ansatz nicht ausgeschlossen, sondern als unendlich kleine Läufe dritter Art mit zusammenfallenden Abscissen eingeführt. Die kubische Gleichung (65) tritt daher nicht blofs k mal, sondern

(67) $$k' = k + n = \tfrac{1}{3}(n^3 + 2n)$$

mal auf. Hiernach mufs die Bestimmung der Koeffizienten der Gleichung (65) auf eine Resolvente vom Grade k' führen. Inzwischen kann eine solche Gleichung, etwa die für p, nicht irreduzibel sein; sie läfst vielmehr die Gleichung

(68) $$p = f(p)$$

rational abscheiden und erlangt wieder den Grad k. Da nämlich unmittelbar ersichtlich ist, dafs die drei Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ identisch sind mit einem Wertetripel der cyklischen Gleichungen (64), so ist für stagnierende Umläufe erster Art

(69) $$x = y = z = p$$

und also $p = f(p)$.

Die Berechnung der Koeffizienten p, q, r der Gleichung (65) erfolgt nun so, dafs wir die Gleichungen (64) zusammenstellen mit

(70) $$g(x) = 0,\quad g(y) = 0,\quad g(z) = 0,$$

wobei die Theorie der symmetrischen Funktionen von Nutzen ist. Behandeln wir die Sonderfälle $n = 2$ und $n = 3$.

A. Umläufe dritter Art im Kurvensystem

(71) $$y = x^2 = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = c + x = \psi(x).$$

Die Gleichungen, welche die Läufe erster, beziehentlich dritter Art bestimmen, sind

(72) $$x = x^2 - c = f(x),$$

(73) $$x = [(x^2 - c)^2 - c]^2 - c = f^{(3)}(x),$$

und wenn die erste aus der zweiten ausgeschieden wird, so verbleibt

(74) $$x^6 + x^5 + (1 - 3c)x^4 + (1 - 2c)x^3 + (1 - 3c + 3c^2)x^2 + (1 - c)^2 x + (1 - c + 2c^2 - c^3) = 0.$$

Ersetzen wir die Gleichung achten Grades (73) durch die cyklischen Gleichungen

(75) $$x = y^2 - c, \quad y = z^2 - c, \quad z = x^2 - c,$$

und führen die Bezeichnungen ein

(76) $$\begin{cases} x + y + z = -p_1, \quad yz + zx + xy = p_2, \quad xyz = -p_3, \\ x^n + y^n + z^n = s_n, \end{cases}$$

so ergiebt sich durch zweckmäfsige Kombination der Gleichungen 75)

(77) $$s_2 = 3c + s_1, \quad s_3 = cs_1 + p_2, \quad s_4 = 3c^2 + 2cs_1 + s_2.$$

Werden die s durch die p ersetzt, so entsteht

(78) $$\begin{cases} p_1^2 - 2p_2 = 3c - p_1 \\ p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = cp_1 - p_2 \\ p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 4p_1p_3 + 2p_2^2 = 3c^2 - 2cp_1 + p_1^2 - 2p_2, \end{cases}$$

und hieraus findet man

(79) $$\begin{cases} p_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 - 3c) \\ p_3 = \frac{1}{6}(p_1^3 + 2p_1^2 - 7cp_1 - p_1 + 3c), \end{cases}$$

während p_1 durch eine Gleichung vierten Grades

(80) $$p_1^4 + 2p_1^3 - (10c + 1)p_1^2 + 6(c + 1)p_1 + 9c(c - 2) = 0$$

bestimmt ist, wie nach (67) zu erwarten war. Um nun die Läufe erster Art auszuscheiden, bemerke man, dafs für diese

(81) $$x = y = z = -\tfrac{1}{3}p_1, \quad x^2 - x - c = 0,$$

und also der abzulösende Faktor

(82) $$p_1^2 + 3p_1 - 9c = 0$$

wird. Thatsächlich zerfällt auch (80) in

(83) $$[p_1^2 + 3p_1 - 9c]\,[p_1^2 - p_1 - c + 2] = 0,$$

und mithin führt

(84) $$p_1^2 - p_1 - c + 2 = 0$$

zu den beiden Läufen dritter Art.

Vermöge (84) vereinfachen sich die Ausdrücke für p_2 und p_3 unter (79) wie folgt

(85) $$p_2 = p_1 - c - 1, \quad p_3 = -cp_1 + c - 1,$$

und daher sind die Abscissen eines jeden stagnanten Umlaufes dritter Art enthalten in der kubischen Gleichung

(86) $$x^3 + p_1 x^2 + (p_1 - c - 1)x - cp_1 + c - 1 = 0.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung und aus (84) die Gröfse p_1, so entsteht

(87) $$\begin{cases} [x^3 - (c+1)x + c - 1]^2 \\ + [x^3 - (c+1)x + c - 1][x^2 + x - c] \\ \qquad - (c-2)[x^2 + x - c]^2 = 0, \end{cases}$$

und das ist genau die Gleichung (74), jedoch in solcher Anordnung der Glieder, dafs die Reduzibilität unmittelbar ersichtlich wird.

Wir haben in den Figuren 3 bis 6 den Vorgang unter Annahme eines $c = 2$ und einer Längeneinheit von 10 mm dargestellt. Um aller Rechnung überhoben zu sein, sind in Fig. 3 die acht in Frage kommenden Schnittpunkte durch Schnitt der Kurven

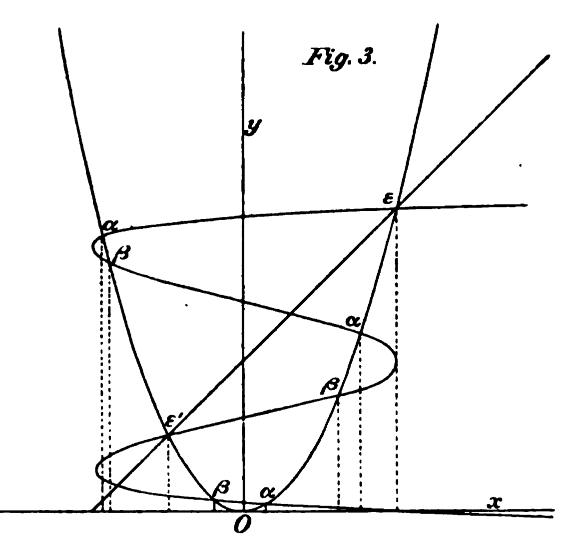
(88) $y = x^2 = \varphi(x)$

und

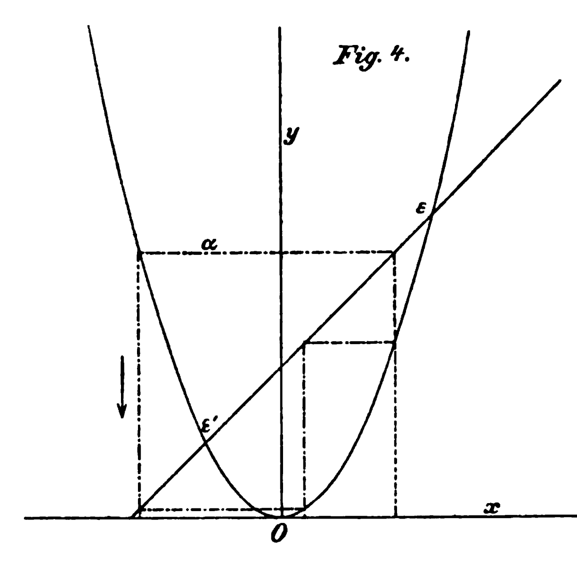
$x = [(y-c)^2 - c]^2 - c$

$= \psi^{-1}\varphi\psi^{-1}\varphi(y)$

ermittelt worden. Die zugehörigen Abscissen kehren zu je dreien in den Figuren 4 und 5 wieder und bestimmen dort die stagnanten Umläufe dritter Art, welche mit α und β bezeichnet sind, entsprechend den sechs Punkten α und β der Fig. 3. Die Gerade $y = c + x = \psi(x)$ schneidet überdies in allen Figuren die Läufe erster Art, d. h. die Schnittpunkte ε und ε' aus. In Fig. 6 ist zu ersehen, wie ε durch



einen konvergenten Anlauf, ε' durch einen links drehenden Umlauf erster Art ausgeschnitten wird. Auch die Umläufe dritter Art, welche man sich in den Figuren 4 und 5 gegen die stagnanten Umläufe konvergierend zu denken hat, sind in unserem Beispiele links drehend. Man erkennt dies aus Fig. 3, in welcher sämtliche konvergente Läufe, welche die acht Schnittpunkte ausschneiden, auf der Kurve vierter Ordnung begonnen werden müssen. Demgemäſs berechnen sich auch sämtliche Abscissen



durch die achtwertige Kettenwurzel

$$x_{k+1} = \pm\sqrt{c \pm \sqrt{c \pm \sqrt{c + x_k}}}. \qquad (x_0 = 0) \tag{89}$$

Die oben aufgestellten Gleichungen werden im Falle $c = 2$ besonders bequem, und zwar gehen (82) und (84) über in

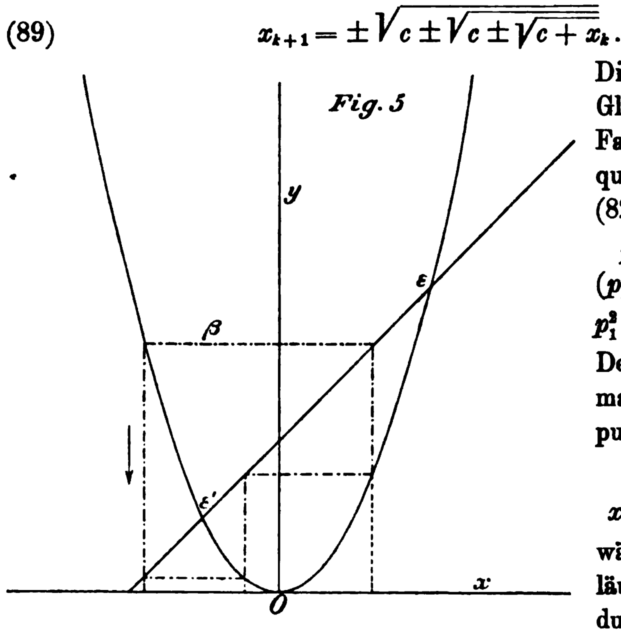
$$p_1^2 + 3p_1 - 18 = (p_1 + 6)(p_1 - 3) = 0,$$

$$p_1^2 - p_1 = p_1(p_1 - 1) = 0.$$

Dementsprechend hat man für die Schnittpunkte ε und ε'

$$x = -\tfrac{1}{3}p_1, \quad \text{d. h.}$$

$$x = 2, \quad x' = -1,$$



während die beiden Umläufe dritter Art α und β durch die Gleichungen

$$(\alpha) \qquad x^3 - 3x + 1 = 0, \qquad (\beta) \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

bestimmt sind.

B. Umläufe dritter Art im Kurvensystem

(90) $$y = x^3 = \varphi(x) \quad \text{und} \quad y = c - x = \psi(x).$$

Es existieren hier drei Läufe erster Art, welche die Wurzeln der Gleichung

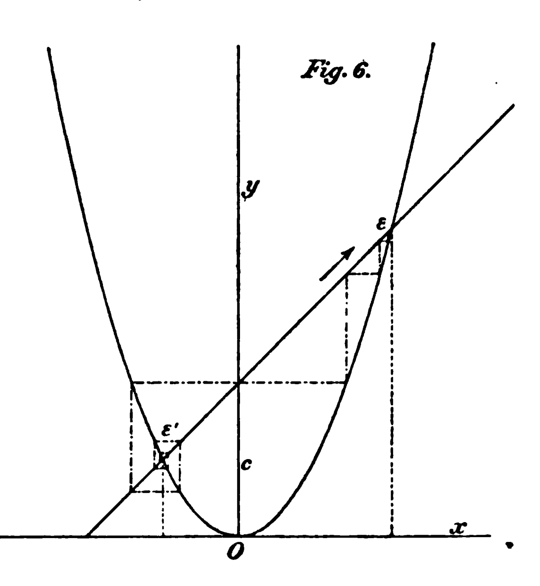
(91) $$x = c - x^3 = f(x)$$

ausschneiden und acht stagnante Umläufe dritter Art. Die Abscissen, welche jene Läufe bestimmen, sind sämmtlich enthalten in

(92) $$x = c - [(c - x^3)^3]^3 = f^{(3)}(x)$$

oder auch in dem System cyklischer Gleichungen

(93) $$x = c - y^3, \quad y = c - z^3, \quad z = c - x^3.$$



Denken wir wieder die Abscissen eines jeden Umlaufes dritter Art vereinigt in

(94) $$x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0 = g(x),$$

so ergiebt eine ähnliche Rechnung wie vorhin

(95) $$s_2 = 3c - s_1, \quad s_4 = cs_1 - p_2, \quad s_6 = 3c^2 - 2cs_1 + s_2.$$

Ersetzt man die s durch die p, so gewinnt man zunächst

(96) $$3p_3 = -p_1^3 + 3p_1p_2 - p_1 - 3c$$

und sodann zwei Gleichungen in p_1, p_2, deren erste

(97) $$p_1^4 + 4p_1^2 + 9cp_1 - 3p_2 - 6p_2^2 = 0$$

lautet, während die zweite nach zweckmäfsiger Kombination in der Form

(98) $$(p_1^2 - 3p_2)(p_1^4 - 2p_1^2p_2 + 3cp_1 + p_2 + 2) = 0$$

geschrieben werden kann.

Das Vorhandensein einer Gleichung zwischen p_1 und p_2, welche den Faktor

(99) $$p_1^2 - 3p_2$$

ausscheiden läfst, steht bei der Bestimmung der Umläufe dritter Art

im Voraus fest. Denn da unser Ansatz auch die Läufe erster Art enthält, für welche $x = y = z$, so ist im besonderen

(100) $$p_1 = -3x, \quad p_2 = 3x^2, \quad p_3 = -x^3,$$

und mithin mufs das Gleichungssystem der p gewisse partikuläre Gleichungen, wie

(101) $$p_1^2 = 3p_2, \quad p_1 p_2 = 9p_3, \quad p_1^3 = 27p_3$$

in sich fassen. Indem man eine solche Gleichung möglichst zeitig abscheidet, erreicht man, dafs die Endgleichung für p_1 den ihr zukommenden Grad

(102) $$k = \tfrac{1}{3}(n^3 - n)$$

annimmt, während er sonst um n Einheiten höher liegen würde. Diese Bemerkung passt auch für den zuletzt unter A besprochenen Fall, doch ist sie dort nicht so belangreich wie hier, wo der Grad von 11 auf 8 herabzusetzen ist.

Der Fall $p_1^2 = 3p_2$ liefert nun mit Hinblick auf (96) und (97)

(103) $$3p_3 = -p_1 - 3c, \quad p_1(p_1^3 + 9p_1 + 27c) = 0,$$

so dafs

(104) $$p_1^3 = 27p_3.$$

Die Gleichung (94) reduziert sich hierdurch auf

(105) $$(x + \tfrac{1}{3}p_1)^3 = 0$$

und ergiebt Läufe dritter Art mit zusammenfallenden Koordinaten, d. h. Läufe erster Art. Die vordem angegebene Gleichung

(106) $$p_1^3 + 9p_1 + 27c = 0$$

zeigt, dafs drei solche Läufe vorhanden sind, und setzt man $p_1 = -3x$, so kommt man thatsächlich zu

(107) $$x^3 + x - c = 0$$

zurück, welche Gleichung die Schnittpunkte bestimmte.

Berücksichtigt man den zweiten verschwindenden Faktor der Gleichung 98) so erhält man

(108) $$p_2 = \frac{p_1^4 + 3cp_1 + 2}{2p_1^2 - 1},$$

(109) $$3p_3 = \frac{p_1^5 - p_1^3 + 3cp_1^2 + 7p_1 + 3c}{2p_1^2 - 1},$$

und trägt man p_2 in (97) ein, dann resultiert für p_1 die gewünschte Gleichung achten Grades, nämlich

110) $$p_1^8 - 3p_1^6 + 18p_1^4 + 27cp_1^3 + (27c^2 + 4)p_1^2 + 27cp_1 + 9 = 0.$$

Diese Resolvente ist noch sehr speziell, ein Umstand, der vermieden werden kann, wenn wir das System cyklischer Gleichungen unter (93) allgemeiner fassen. In der That liefert das erweiterte System

$$(111)\qquad \begin{cases} x^3 = ax + by + cz + d \\ y^3 = ay + bz + cx + d \\ z^3 = az + bx + cy + d \end{cases}$$

bei ganz gleicher Behandlungsweise die allgemeinere Resolvente

$$(112)\qquad \begin{aligned} & p_1^8 - 3(2a - b - c)p_1^6 + 9(a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - ac)p_1^4 - 27d(b+c)p_1^3 \\ & - (4a^3 + 4b^3 + 4c^3 + 21ab^2 + 21ac^2 - 6a^2b - 6a^2c - 6b^2c - 6bc^2 \\ & - 30abc - 27d^2)p_1^2 + 27d(b-c)^2 p_1 + 9(b-c)^2(a^2 + b^2 + c^2 \\ & - ab - ac - bc) = 0, \end{aligned}$$

wobei

$$(113)\qquad p_1 = -(x + y + z).$$

Das System (111) ist im allgemeinen äquivalent mit dem cyklischen

$$(114)\qquad \begin{cases} Ax^3 + By^3 + Cx + Dy + E = 0 \\ Ay^3 + Bz^3 + Cy + Dz + E = 0 \\ Az^3 + Bx^3 + Cz + Dx + E = 0, \end{cases}$$

wie nach Elimination von z, x, y ersichtlich wird. Die Resolvente (112) kann daher indirekt aufgelöst werden, wenn man die stagnanten Umläufe dritter Art des Kurvensystems

$$(115)\qquad Ax^3 + By^3 + Cx + Dy + E = 0 \quad \text{und} \quad y = x$$

aufsucht. Durch Aufnahme weiterer Glieder zweiten und dritten Grades kann man dafür sorgen, dafs die angeführte Gleichung achten Grades völlig allgemein wird, während andererseits gewisse Sonderfälle, wie etwa der Fall $c = b$, zu merkwürdig einfachen Resolventen führen.

C. Über permanent geschlossene Umläufe.

Wir bemerkten bereits in Abschn. 2, dafs in gewissen Kurvensystemen alle, an beliebiger Stelle eingetragenen Umläufe in sich zurücklaufen. Von Konvergenz oder Divergenz der Läufe ist dann überhaupt nicht mehr die Rede; dieselben sind permanent geschlossen.

Ein trivialer Fall, welcher zu solchen Umläufen, speziell von der zweiten Art, führt, entsteht, wenn sich eine Kurve in einer der Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems spiegelt. So sind z. B. alle rechtwinkligen Umläufe zwischen den Kurven $y = \varphi(x)$ und $y = -\varphi(x)$

andauernd geschlossen; die spiegelnde X-Achse ist hier der Träger sämtlicher Schnittpunkte.

Von Interesse sind die permanent geschlossenen Umläufe zwischen der Geraden $y = x$ und der Hyperbel

$$y = \frac{a + bx}{c + dx} = f(x). \tag{116}$$

Die Umläufe erster Art sind bestimmt durch die quadratische Gleichung

$$dx^2 + (c - b)x - a = 0, \tag{117}$$

die Umläufe zweiter Art durch

$$x = \frac{a(b + c) + (ad + b^2)x}{ad + c^2 + d(b + c)x} = f^{(2)}(x) \tag{118}$$

oder auch durch

$$(b + c)(dx^2 + (c - b)x - a) = 0. \tag{119}$$

Für die Läufe $n$ter Art findet man leicht

$$\vartheta \cdot (x - f(x)) = 0, \text{ d. h. } \vartheta . (dx^2 + (c - b)x - a) = 0, \tag{120}$$

wobei ϑ eine noch zu bestimmende Gröfse bezeichnet, die nur von den Konstanten a, b, c, d abhängt.

Verschwindet der quadratische Faktor, so gelangen wir zu den beiden stagnanten Läufen erster Art, wie denn auch die Schnittpunkts-abscissen durch zwei konvergente Kettenbrüche unmittelbar erhalten werden können. Das Verschwinden von ϑ dagegen weist auf gewisse Scharen von permanent geschlossenen Umläufen hin, welche zwischen der Geraden $y = x$ und der durch die Bedingung $\vartheta = 0$ modifizierten Hyperbel vorhanden sind. Übrigens sind die obigen Gleichungen noch mit überflüssigen Konstanten behaftet, welche durch lineare Transformation beseitigt werden können. Gewisse periodische Kettenbrüche entwickelt man am bequemsten aus

$$y = x + a \quad \text{und} \quad xy = b, \tag{121}$$

sodafs die reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + ax = b \tag{122}$$

wie bekannt, durch die Kettenbrüche

$$\begin{cases} x = b \mid a + b \mid a + b \mid a \ldots. \\ x = -a + b \mid -a + b \mid -a \ldots. \end{cases} \tag{123}$$

dargestellt sind. Die Konvergenz derselben beurteilt man an der vorgelegten gleichseitigen Hyperbel; insbesondere führt der Fall $a = 0$ zu einer unendlichen Schar von geschlossenen Umläufen (Quadraten), gleichgiltig ob reelle Schnittpunkte vorhanden sind oder nicht.

Bevor wir auf Kettenbrüche genauer eingehen, wollen wir einen Blick auf die geometrische Theorie gewisser Reihen werfen. Wir betrachten die An- oder Umläufe zwischen den Geraden

$$y = x \quad \text{und} \quad y = a + bx \tag{124}$$

und erhalten für die Schnittpunktsabscisse einerseits

$$x = \frac{a}{1 - b}, \tag{125}$$

andererseits durch Iteration

$$x = a + b\,[a + b\,(a + b\,(a + \ldots\,))],$$

d. h.

$$x = a\,[1 + b + b^2 + b^3 + \ldots\,]. \tag{126}$$

Je nachdem b positiv oder negativ ist, entsteht ein An- oder Umlauf. Die Konvergenz der Läufe erfordert, daſs $b < 1$, andernfalls muſs die inverse Entwickelung mittelst

$$x = \frac{x - a}{b} \tag{127}$$

durchgeführt werden.

Die Bedingung eines geschlossenen Umlaufs zweiter Art ist

$$x = a + b(a + bx),$$

d. h.

$$x(1 - b^2) = a(1 + b), \tag{128}$$

und sie ist für $b = -1$ unabhängig von x erfüllt. Wir kommen hiermit zu einer unendlichen Schar von Quadraten, welche den Schnittpunkt umgeben. Dieser aber selbst, obgleich er durch $x = y = \frac{a}{2}$ festgelegt ist, kann durch Läufe und unendliche Prozesse in keiner Weise bestimmt werden. Die Bedingung eines geschlossenen Umlaufs dritter Art wird

$$x(1 - b^3) = a(1 + b + b^2), \tag{129}$$

aber ein solcher existiert (reell) nicht; die Gleichung liefert nur die Schnittpunktsabscisse. Überhaupt wird ersichtlich, daſs im System der vorgelegten Geraden auſser dem Schnittpunkt und der etwa auftretenden Schar von Quadraten weitere Umläufe unmöglich sind.

Betreffs des Kurvensystems

$$y = x \quad \text{und} \quad y = a + x^n \tag{130}$$

dürfte vielleicht die Bemerkung interessieren, daſs die durch Iteration abgeleitete Potenzreihe hypergeometrisch von der $(n-1)$ten Ordnung wird und im Konvergenzfalle jene Wurzel der trinomischen Gleichung

$$x^n - x + a = 0 \tag{131}$$

liefert, welche mit a gleichzeitig verschwindet. Es wird wohl keinen elementareren Weg geben, um jene oft diskutierte Reihe herzustellen.

7. Zur geometrischen Theorie gewisser Kettenbrüche.

Wir gehen von dem Kurvensystem

(132) $$y = 1 + cx, \qquad xy = 1$$

aus und erhalten

(133) $$x = \frac{1}{1 + cx} = f(x),$$

woran sich die Kettenbruchentwickelung

(134) $$x = 1|1 + c|1 + c|1 + c|1 + \cdots$$

schliefst. Des weiteren richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den früher eingeführten, jetzt nur von c abhängigen Faktor ϑ, d. h. wir fragen nach allen Werten von c, für welche zwischen der unveränderlichen Hyperbel und den Geraden des Büschels permanent geschlossene Umläufe stattfinden.

Offenbar besitzt $f^{(n)}(x)$ die Form

(135) $$f^{n}(x) = \frac{A_n + B_n x}{A_{n+1} + B_{n+1} x},$$

wobei

(136) $$A_{n+2} = A_{n+1} + A_n c, \qquad B_{n+2} = B_{n+1} + B_n c.$$

Die Läufe $n$ter Art sind bestimmt durch die Gleichung

(137) $$x = f^{(n)}(x), \quad \text{d. h.} \quad B_{n+1}x^2 + (A_{n+1} - B_n)x - A_n = 0,$$

aber da selbige die beiden Schnittpunktsabscissen enthalten mufs, so wird sie identisch sein mit

(138) $$\vartheta_n \cdot (cx^2 + x - 1) = 0,$$

wobei ϑ_n mit A_n zusammenfällt. Zur Ermittelung von ϑ_n dient daher die Differenzengleichung

(139) $$\vartheta_{n+2} = \vartheta_{n+1} + c\vartheta_n,$$

aus welcher sich sofort

(140) $$\vartheta_n = k_1 \left[\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + c}\right]^{n-2} + k_2 \left[\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + c}\right]^{n-2}$$

ergiebt. Die willkürlichen Konstanten k_1, k_2 bestimmt man durch die Annahme $n = 2$; 3, womit $\vartheta_2 = 1$, $\vartheta_3 = 1 + c$ wird, und also lautet der endgiltige Ausdruck

(141) $$\vartheta_n = \frac{\left[\tfrac{1}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4} + c}\right]^n - \left[\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4} + c}\right]^n}{2\sqrt{\tfrac{1}{4} + c}}.$$

Hiernach ist ϑ_n für ganze positive n immer eine rationale ganze Funktion von c; im Besonderen findet man

$$(142)\begin{cases} \vartheta_1=1, & \vartheta_2=1, \\ \vartheta_3=1+c, & \vartheta_4=1+2c, \\ \vartheta_5=1+3c+c^2, & \vartheta_6=1+4c+3c^2=(1+c)(1+3c), \\ \vartheta_7=1+5c+6c^2+c^3, & \vartheta_8=1+6c+10c^2+4c^3=(1+2c)(1+4c+2c^2). \end{cases}$$

. . . .

Wir erhalten demgemäfs permanent geschlossene Umläufe von der

3ten Art für $c=-1$
4ten „ „ $c=-\frac{1}{2}$
5ten „ „ $c=\frac{1}{2}(-3+\sqrt{5})$ und $c=\frac{1}{2}(-3-\sqrt{5})$
6ten „ „ $c=-1$ und $c=-\frac{1}{3}$.

Vergl. hierzu die Figuren 7 und 8, wo die beiden Läufe 5ter Art mit willkürlichem x_0 eingezeichnet und auf die Einheit 10 mm bezogen sind.

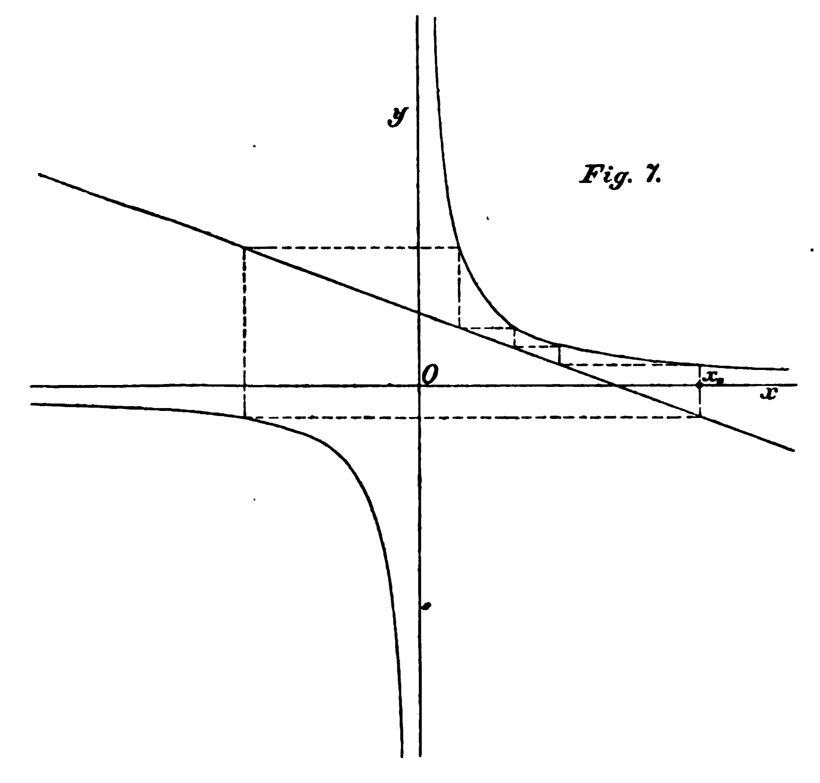


Fig. 7.

Die Gleichung $\vartheta_n=0$ zerfällt rational, wenn n eine zusammengesetzte Zahl und gröfser als 5 ist, wie eine Zerlegung des Zählers von (141) sofort zeigt. Geometrisch bedeutet das, dafs sich unter den

geschlossenen Läufen von der Art $n = pqr\cdots$ auch solche der Art $p, q, r, \cdots$ befinden. Die erwähnte Gleichung besitzt nur reelle Wurzeln, und sie kann trigonometrisch leicht aufgelöst werden. Man findet zunächst

(143) $$c = -\frac{1}{\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)^2}, \qquad \varepsilon^n = 1,$$

oder wegen

(144) $$\varepsilon = \cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

(145) $$c = -\frac{1}{2\left(1 + \cos\frac{2k\pi}{n}\right)}.$$

Der Fall $k = 0$, d. h. $c = -\frac{1}{4}$ weist auf Berührung hin und scheidet aus; im übrigen hat man gerade und ungerade n zu unter-

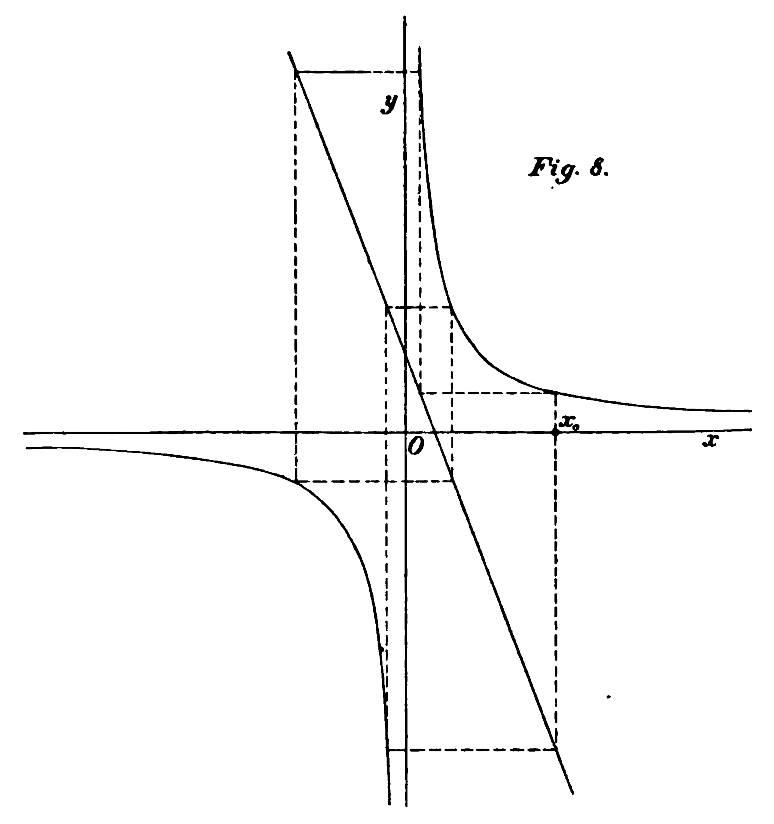


Fig. 8.

scheiden und findet im ersten Falle $\frac{1}{2}(n-2)$ Wurzeln, $\left(k = 1, 2, \cdots, \frac{n-2}{2}\right)$, im zweiten Falle $\frac{1}{2}(n-1)$ Wurzeln, $\left(k = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}\right)$.

Das Ergebnis ist daher folgendes: Im Kurvensystem 132) giebt es $\frac{1}{2}(n-2)$, bezw. $\frac{1}{2}(n-1)$ verschiedene reelle, permanent geschlossene Umläufe $n$ter Art, von denen etliche auch in solche niederer Art zerfallen können, je nachdem n gerade oder ungerade ist, und der entsprechende Kettenbruch hat die Eigenschaft, dafs alle seine Näherungswerthe, deren Indices um n verschieden sind, übereinstimmen. Er ist also für die ermittelten, durchweg negativen c divergent. Aus den Formeln erkennt man überdies, dafs, solange Umläufe dritter oder höherer Art auftreten, solche erster und zweiter Art nicht vorhanden sein können.

Wir haben bislang c als konstant angenommen; inzwischen kann auch c eine mit n veränderliche Gröfse sein; sodafs der Kettenbruch durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + c_n x_n} \tag{146}$$

eingeführt wird. In diesem Falle läfst sich der Vorgang geometrisch dahin auffassen, dafs man die Läufe zwischen der festen Hyperbel $xy = 1$ und den sich drehenden Strahlen des Büschels $y = 1 + c_n x$ betrachtet. Die Gleichung (146) kommt überein mit einer Differenzengleichung

$$c_n x_{n+1} x_n + x_{n+1} - 1 = 0, \tag{147}$$

welche für

$$x_n = \frac{v_n}{v_{n+1}} \tag{148}$$

übergeht in

$$v_{n+2} - v_{n+1} - c_n v_n = 0. \tag{149}$$

Diese letzte definiert, je nach der Abhängigkeit des c_n von n, eine grofse Anzahl von Funktionen, so z. B. die hypergeometrischen von Gaufs, wie denn auch bekannt ist, dafs der Quotient zweier benachbarten hypergeometrischen Funktionen in einen Kettenbruch verwandelt werden kann. Die hiermit angedeuteten Untersuchungen gehören indessen nicht mehr in den Rahmen unserer Arbeit, weil wir damit den Boden der Algebra völlig verlassen würden.[1])

8. Über konvergente und stagnante Umläufe in Systemen von mehr als zwei Kurven.

Sollen die reellen Schnittpunkte des Flächensystems

$$F_1(x, y, z) = 0, \qquad F_2(x, y, z) = 0, \qquad F_3(x, y, z) = 0 \tag{150}$$

durch konvergente Umläufe, beziehentlich Iterationsprozesse bestimmt

---

1) Vergl. eine Abhandlung des Verf. „Über Differenzengleichungen etc." Journal f. Math., Bd. 122, S. 164.

werden, so verschaffe man sich mittelst Elimination die äquivalenten Cylindergleichungen

(151) $$x = \varphi(y), \qquad y = \psi(z), \qquad z = \chi(x),$$

und stelle die drei Leitlinien in dem ersten, zweiten und dritten Quadranten eines rechtwinkligen Koordinatensystems dar. Vergl. Fig. 9. Da diese Quadranten genau den drei in eine Ebene umgeklappten Projektionstafeln entsprechen, so haben wir bezüglich der räumlichen Orientierung nichts hinzuzufügen. Der Umlauf beginnt mit einem willkürlich gewählten x_0 und ist in der einen oder anderen Drehrichtung konvergent, vorausgesetzt, daſs sich die Flächen überhaupt schneiden. Der Prozess ist beendet oder, genauer gesprochen, hinreichend weit getrieben, wenn der konvergente Lauf von einem stagnanten nicht mehr zu unterscheiden ist. Der Erfolg des Verfahrens ist dadurch sicher gestellt, daſs eine der Ketten

(152) $$x = [\varphi\psi\chi(x_0)]^{(k)} \quad \text{bez.} \quad x = [\chi^{-1}\psi^{-1}\varphi^{-1}(x_0)]^{(k)}$$

nach früherer Erörterung bei vorhandener reellen Wurzel und passend gewähltem x_0 zweifellos konvergieren muſs, es sei denn, daſs das Flächensystem eine Schar permanent geschlossener Umläufe besitzt. Unter Verzicht auf Gleichmäſsigkeit in der geometrischen Darstellung könnte man natürlich statt der drei Leitkurven auch nur die Kurven

(153) $$x = \varphi(y) \quad \text{und} \quad y = \psi\chi(x)$$

in Betracht ziehen und zu den früheren Vorgängen zurückkehren.

Wir haben offenbar wieder Umläufe erster bis $n$ter Art zu unterscheiden und definieren als stagnante Umläufe erster Art solche, für welche

(154) $$x_1 = x_0, \quad \text{d. h.} \quad x = \varphi\psi\chi(x);$$

in gleicher Weise ist für stagnante Umläufe zweiter Art

(155) $$x_2 = x_0, \quad \text{d. h.} \quad x = (\varphi\psi\chi(x))^{(2)}.$$

Vergl. Fig. 10.

Ein stagnanter Umlauf zweiter Art zwischen den Kurven φ, ψ, χ kann ersetzt werden durch einen erster Art zwischen den Kurven

(156) $$x = \varphi\psi(y), \qquad y = \chi\varphi(z), \qquad y = \psi\chi(x)$$

und umgekehrt. Wir wollen diese naheliegenden Betrachtungen nicht weiter fortsetzen und nur auf das Prinzip hinweisen, nach welchem die Gleichung

(157) $$x = (\varphi\psi\chi(x))^{(k)}$$

immer durch einen weiter gefaſsten Schnitt der ursprünglichen Kurven φ, ψ, χ auflösbar ist, wenn stagnante Umläufe höherer Art zugelassen werden.

Die Figuren 9 und 10 weisen von selbst darauf hin, dafs die Anordnung noch anders getroffen werden kann. Zerlegt man die gesamte Ebene durch drei Strahlen OX, OY, OZ in drei Bereiche, so lassen sich die Kurven φ, ψ, χ auf die neuen Coordinatensysteme X-Y, Y-Z, Z-X beziehen, und dann erlangen die stagnanten Umläufe die Gestalt von Sechsecken. Vergl. Fig. 11 und 12. Bei dieser Darstellung wird die Verbindung mit räumlichen und projektiven Vorstellungen wieder aufgehoben. Dagegen ergiebt sich sofort, wie durch eine Teilung der Ebene in n Bereiche der Fall eines Systems von n Kurven zu behandeln ist.

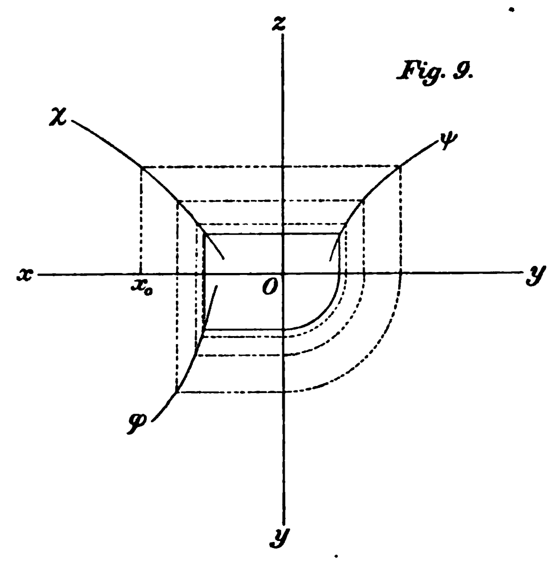


Fig. 9.

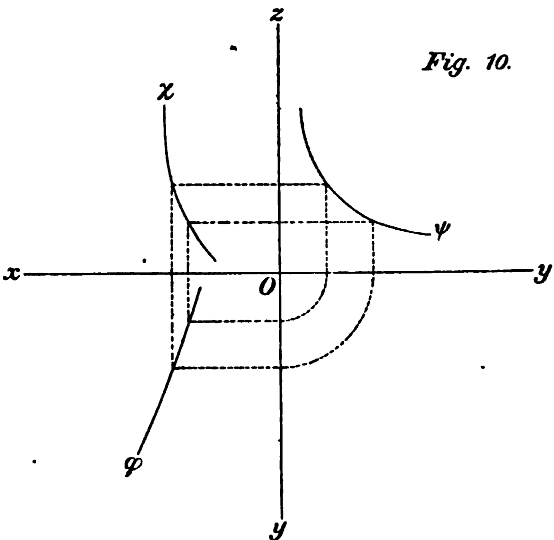


Fig. 10.

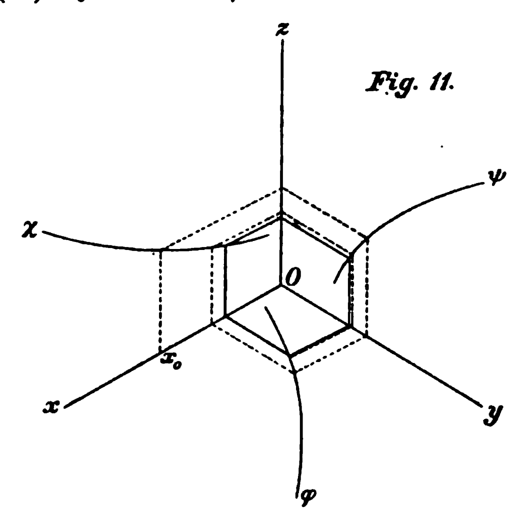
Um indessen bei dem Fall $n = 3$ zu bleiben, wollen wir das in Abschnitt 5A) erledigte Beispiel

(75) $$x = y^2 - c,\quad y = z^2 - c,\quad z = x^2 - c,\quad (c = 2)$$

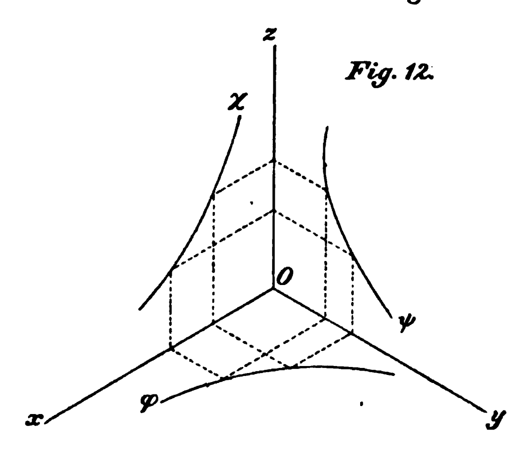
so auffassen, dafs wir uns diese drei Kurven in einem ebenen Koordinatensystem mit drei Achsen dargestellt denken. Es würden alsdann acht konvergente Umläufe vorhanden sein, welche, nachdem sie stagnant geworden, die acht Wurzeln der Gleichung

(73) $$x = [(x^2 - c)^2 - c]^2 - c$$

auf der X-Achse ausschneiden; gleiches gilt für die zugeordneten Wurzeln y und z bezüglich der andern beiden Achsen. Aber, da die Gleichungen (75) cyklisch sind, so kommen wir auch mit einer



Parabel $x = y^2 - c$ aus, wenn wir zwischen dieser und den Geraden $y = z$ und $z = x$ zwei stagnante Umläufe erster Art und zwei von der dritten Art konstruieren. Es ist das in Fig. 13 bis 15 geschehen.



Figur 13 zeigt die beiden stagnanten Umläufe erster Art ε und ε', welche auf der X-Achse die Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - x - 2 = 0, \quad \text{d. h.} \quad x = 2, \qquad x' = -1$$

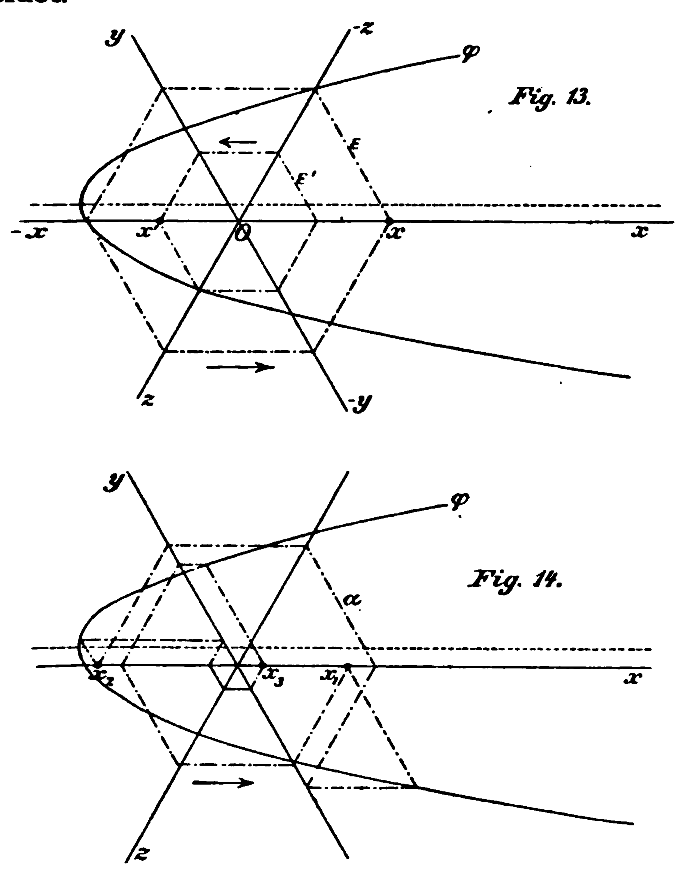
ausschneiden. Der Vorgang entspricht genau demjenigen, welcher früher in Fig. 6 dargestellt wurde und dort die Schnittpunkte ε und ε' mit den Abscissen $x = 2$ und $x' = -1$ lieferte.

Figur 14 zeigt einen stagnanten Umlauf dritter Art α, welcher dem **Umlauf** α der Figur 4 entspricht und wie dort die Wurzeln der Gleichung

$$(\alpha) \qquad x^3 - 3x + 1 = 0,$$

d. h. $\quad x_1 = 1,532, \quad x_2 = -1,879, \quad x_3 = 0,347$

ausschneidet.



Figur 15 zeigt endlich den zweiten stagnanten Umlauf dritter Art β, welcher dem gleichbenannten in Fig. 5 entspricht und zur Bestimmung der Wurzeln der Gleichung

$$(\beta) \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

d. h. $\quad x_1 = 1,247, \quad x_2 = -1,802, \quad x_3 = -0,445$

führt. Die Längeneinheit beträgt 10 mm, und man vergleiche allenthalben Abschnitt 5 A).

Wir brechen hiermit diese Betrachtungen ab, nicht weil sie als abgeschlossen erscheinen, sondern weil die weiterhin auftretenden

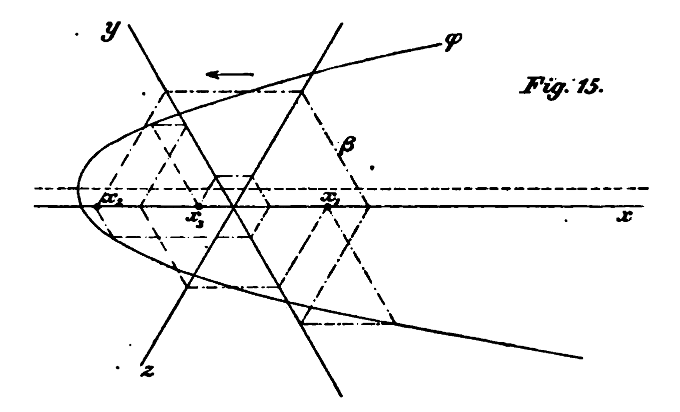


Fig. 15.

Fragen über cyklische Gleichungen mit mehr als drei Veränderlichen zu sehr ausgedehnten Untersuchungen Anlafs geben.

Berechnung der Ellipse aus Umfang und Inhalt.

Von Prof. Dr. W. Heymann in Chemnitz.

Bezeichnet p den Umfang, q die Fläche der Ellipse, so würden die Halbachsen a und b aus den beiden Formeln

(1) $$p = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$ (2) $$q = ab\pi$$

zu bestimmen sein. Es handelt sich bei dieser fundamentalen Aufgabe demnach um die Auflösung einer eigentümlichen transcendenten Gleichung.

Mit Rücksicht auf bekannte Tabellen kann man schreiben

(3) $$p = 4af(c), \quad c = \frac{b}{a}, \quad a \geqq b,$$

wobei $f(c)$ numerisch bekannt ist, wenn c das etwa in Hundertel geteilte Intervall 0 bis 1 durchläuft. (Vergl. z. B. das fünfstellige Tabellenwerk von Schlömilch.)

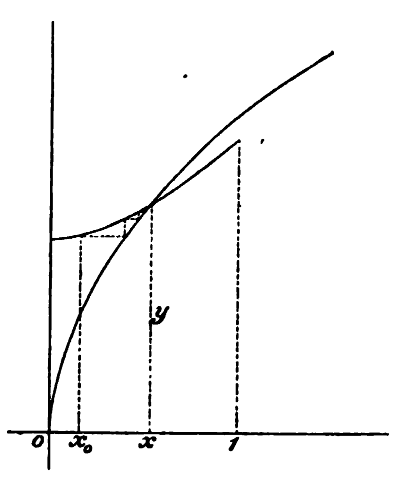
Setzt man vorübergehend $c = x$, $p : 4a = y$, so wird

(4) $$a = \frac{p}{4y}, \quad b = \frac{px}{4y}, \quad q = \frac{p^2x\pi}{16y^2},$$

und nun findet man x, y durch den Schnitt der Kurve $y = f(x)$ mit der Parabel $y^2 = \frac{p^2\pi}{16q}x$. Zeichnet man diese Kurven im Intervall $x = 0$ bis 1, so übersieht man augenblicklich, daſs der Schnittpunkt stets durch einen auf der Kurve f beginnenden konvergenten Anlauf erhalten werden kann. Die Iteration ist demnach zu vollziehen mittelst

$$(5) \qquad x_{k+1} = \frac{16q}{p^2\pi}f^2(x_k), \quad 0 < x_0 < 1.$$

Für solche x, welche der ersten Hälfte des Intervalls angehören, konvergiert der Iterationsprozeſs stark. Im Falle $b = a$, d. h. $p^2 = 4\pi q$ rückt der Schnittpunkt an das Ende des Intervalls, und es tritt Berührung ein, wodurch die Konvergenz des Anlaufes beträchtlich abgeschwächt wird. Die Formel (5) ist also für Ellipsen mit kleiner Exzentrizität nicht zu empfehlen, und wir wollen daher die Aufgabe noch in anderer Weise behandeln.



Das Integral (1) kann in mannigfacher Weise durch einfachere Ausdrücke ersetzt werden. So ermittelt z. B. Schlömilch in seinem Übungsbuch der Analysis, Teil II, § 35, einen Parabelbogen, welcher sich der Kurve $y = f(x)$ im Intervall $x = 0$ bis 1 derartig eng anschlieſst, daſs das arithmetische Mittel der Fehlerquadrate ein Minimum wird. Die betreffende Formel lautet

$$E(a, b) = \frac{p}{4} = 0{,}98244 \cdot a + 0{,}31199 \cdot b + 0{,}28580 \cdot \frac{b^2}{a},$$

und für selbige bleibt der absolute Betrag des Fehlers unter 0,006. Verknüpfte man dieses Resultat mit der Bedingung $q = ab\pi$, so würde man bezüglich a oder b zu einer Gleichung vierten Grades gelangen. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, habe ich den in Frage kommenden transzendenten Bogen der Kurve $y = f(x)$ durch andere, für die Rechnung bequemere Bögen zu ersetzen gesucht und gefunden, daſs sich die Kurve

$$(6) \qquad y = \sqrt[n]{1 + x^n}$$

der ursprünglichen Kurve im Intervall $x = 0$ bis 1 derartig anschmiegt, daſs der absolute Betrag des gröſsten Fehlers, welcher in der Nähe

von $x = 0{,}2$ eintritt, die Zahl 0,0038 nicht übersteigt. Der Exponent n bestimmt sich durch die Bedingung, daſs $y = \frac{\pi}{2}$ für $x = 1$ sein muſs; es ist daher

$$(7) \qquad 2^{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2}, \text{ d. h. } n = 1{,}53493,$$

und die Näherungsformel für den Ellipsenumfang lautet

$$(8) \qquad p = 4\sqrt[n]{a^n + b^n}.$$

Man vergl. die ausführlichere Darstellung in Hoffmanns Zeitschrift, 30. Jahrg., S. 416. — Benutzt man die Formel (8) bei der Auflösung unserer Aufgabe, so folgt aus

$$(9) \qquad a^n + b^n = \left(\frac{p}{4}\right)^n \quad \text{und} \quad ab = \frac{q}{\pi}$$

das Resultat

$$(10) \qquad \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}\left(\frac{p}{4}\right)^n \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\frac{p}{4}\right)^{2n} - \left(\frac{q}{\pi}\right)^n}}.$$

Zur Realität gehört die Bedingung

$$\frac{1}{\sqrt[n]{4}}\left(\frac{p}{4}\right)^2 \geqq \frac{q}{\pi}$$

oder, weil nach der Definition von n offenbar $\sqrt[n]{4} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ ist, so muſs

$$(11) \qquad p^2 \geqq 4\pi q$$

sein. Im Falle der Gleichheit kommt man zum Kreis, und dann ist wirklich

$$(12) \qquad a = b = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \cdot \frac{p}{4} = \frac{p}{2\pi}.$$

Die Bedingung (11) sagt also aus, daſs von allen Ellipsen mit gleichen Umfängen der Kreis den gröſsten Inhalt besitzt.

Wir fügen zur Prüfung der Methode ein Zahlenbeispiel an.

Es sei $a = 6$, $b = 3$, also nach fünfstelligen Tafeln $p = 29{,}0654$ und $q = 56{,}5487$. Die Formel (10) liefert

$$a' = 5{,}97961, \quad b' = 3{,}01024,$$

also werden die absoluten Fehler

$$a - a' = 0{,}02039, \quad b - b' = -0{,}01024$$

und die relativen

$$\frac{a - a'}{a} = 0{,}0034, \quad \frac{b - b'}{b} = -0{,}0034.$$

Wir haben am a. O. gezeigt, dafs die Kurve $y = f(x)$ im Intervall $x = 0$ bis 1 auch durch die Hyperbel

$$(13) \qquad y = \frac{1 + \lambda x + x^2}{1 + x}, \quad \lambda = \pi - 2$$

ersetzt werden kann. Hier beträgt der absolute Fehler im ungünstigsten Falle 0,0064 und zwar in der Nähe von $x = 0{,}2$. Schreibt man (13) in der Form

$$(14) \qquad \frac{p}{4} = \frac{a^2 + (\pi - 2)ab + b^2}{a + b} = a + b - \frac{(4 - \pi)ab}{a + b}$$

und verbindet dieses mit $q = ab\pi$, so ergiebt sich

$$(15) \qquad (a + b)^2 - \frac{p}{4}(a + b) - \frac{4 - \pi}{\pi} q = 0.$$

Demgemäfs sind a und b die Wurzeln ein und derselben quadratischen Gleichung, nämlich

$$(16) \qquad z^2 - \left[\frac{p}{8} + \sqrt{\left(\frac{p}{8}\right)^2 + \frac{4 - \pi}{\pi} q}\right] z + \frac{q}{\pi} = 0.$$

Die in (16) vorkommende Quadratwurzel wird stets reell und ist positiv zu nehmen. Im Übrigen gehört zur Realität, wie früher, dafs $p^2 \geqq 4\pi q$.

Bei Zugrundelegung des oben angeführten Zahlenbeispiels ergiebt sich hier

$$a'' = 5{,}97162, \qquad b'' = 3{,}01426,$$
$$a - a'' = 0{,}02838, \quad b - b'' = -0{,}01426,$$

mithin werden die relativen Fehler

$$\frac{a - a''}{a} = 0{,}00473, \quad \frac{b - b''}{b} = -0{,}00475.$$

Über Drehungen in der darstellenden Geometrie.

Von Eduard Salfner in Nürnberg.

1. Von dem Hilfsmittel passender Drehungen wird in der darstellenden Geometrie meines Wissens noch nicht bis zur letzten Möglichkeit Gebrauch gemacht. Das Drehen einer Geraden und einer Ebene in eine Projektionsebene wird zwar benutzt, doch geht man nicht soweit, die Drehung fortzuführen, bis die geometrischen Gebilde in der neuen Lage sich auf dieselben Projektionsebenen mit der nämlichen Achse beziehen, wodurch sie stets in solche Lage gebracht werden könnten, dafs die vorliegende Aufgabe zu einer einfachen wird. Im Nachfolgenden wird nun versucht, an der Hand einiger Beispiele darzuthun, auf welche Weise dahin zielende Drehungen vorzunehmen sind.

2. Die Drehung einer Geraden soll an der Aufgabe gezeigt werden, den kürzesten Abstand zweier windschiefen Geraden anzugeben.

Als einfache Lagen der Geraden erwähnen wir die zwei folgenden:

1. Die eine Gerade, etwa A, sei senkrecht zu einer Projektionsebene, etwa zu XY, die andere, B, habe eine allgemeine Lage.

2. Die eine Gerade A liege in einer Projektionsebene, die andere B, sei derselben parallel.

Steht eine der beiden Geraden senkrecht zu einer Projektionsebene, so ist die Projizierende der andern auf dieselbe parallel zur ersteren. Legt man dann durch beide Gerade Ebenen senkrecht zu dieser Lotebene, so enthält die Schnittlinie die Strecke ihrer kleinsten Entfernung.

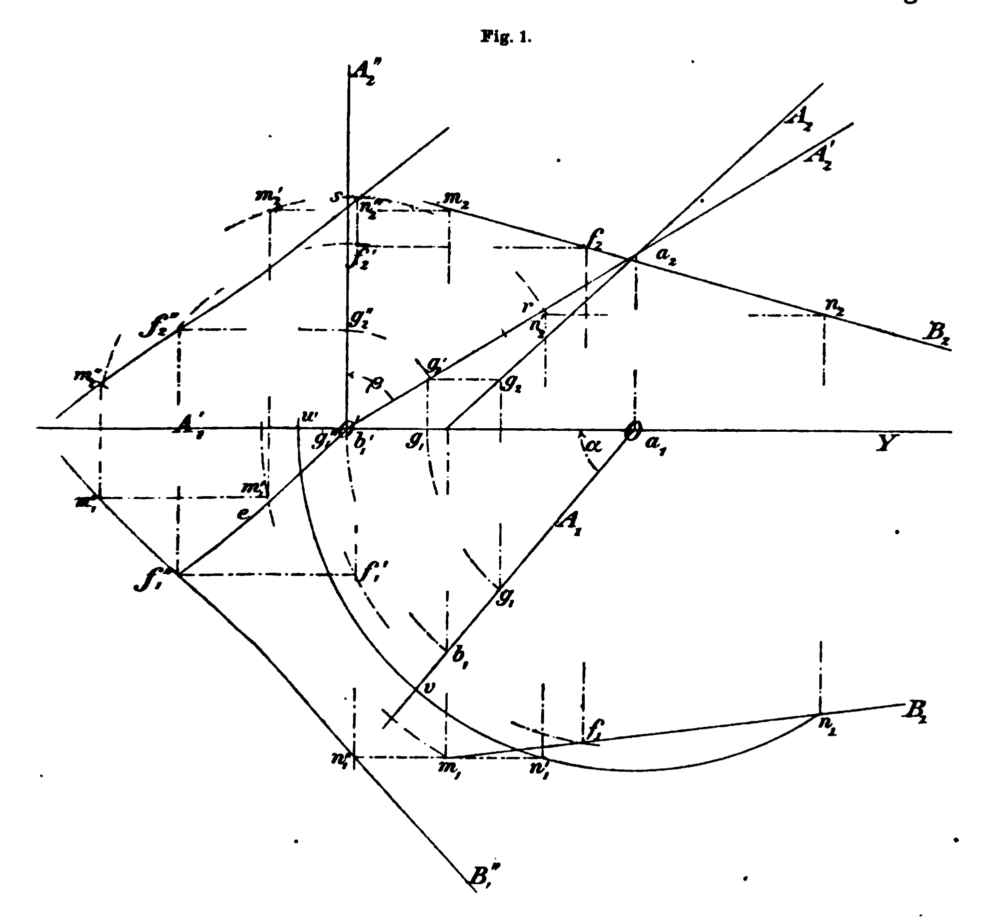
Diese Überlegung führt für den Fall einer allgemeinen Lage beider Geraden auf folgende Konstruktion, bei der man durch passende Drehungen den erstgenannten Fall besonderer Lage erreicht und dann zur eigentlichen Lösung schreitet.

Figur 1. A und B seien die gegebenen windschiefen Geraden. A werde senkrecht zur XY-Ebene gestellt durch zwei Drehungen: einmal um den Winkel α und um Oa_2, so dafs A als A_2' in die Pro-

jektionsebene YZ fällt; hierauf um den Winkel β innerhalb dieser um O', wodurch sie in senkrechte Lage zu XY gebracht wird. Bei der Drehung um O bleibt Punkt a in seiner Lage, b als Spur in XY kommt nach O', in die Achse Y. Die Senkrechte durch O' (Drehung um β Grad) zur Y ist ohne weiteres $A''_{2|}$ (A selbst).

Die Drehungen um dieselben Winkel α und β und dieselben Drehachsen durch O und O' im nämlichen Sinn und derselben Folge

Fig. 1.

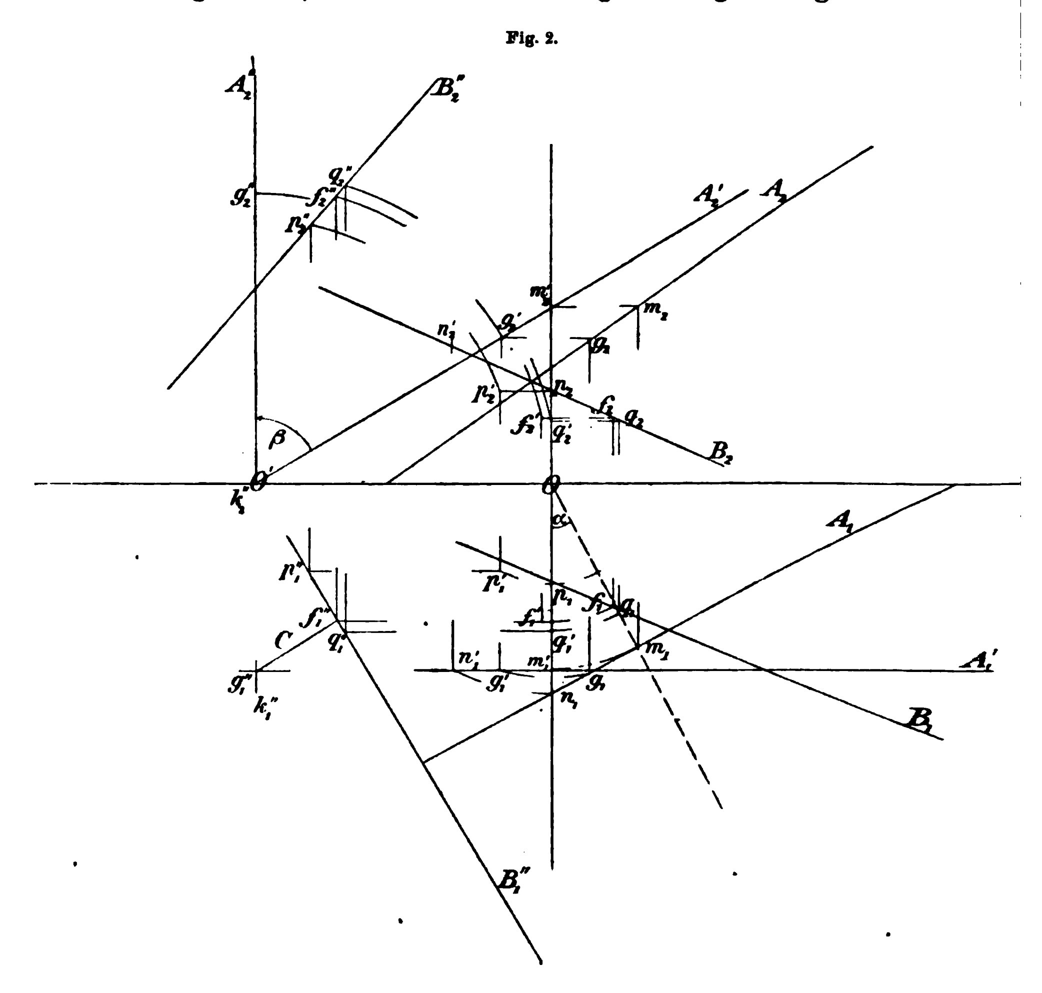


hat auch die Gerade B mitzumachen. Die zwei Punkte m und n auf derselben kommen mit ihren Projektionen zuerst nach $m'_1 m'_2$, $n'_1 n'_2$, dann nach $m''_1 m''_2$, $n''_1 n''_2$, wobei zu beachten ist, daſs der Kreisbogen, welcher etwa um O durch n_1 geht, $n_1 n'_1 = vw$ sein muſs. n'_2 wird erhalten als Schnitt des Lotes zu Y durch n'_1 und, da bei der Drehung der Abstand von der XY-Ebene unverändert bleibt, auf der Parallelen durch n_2 zu Y. Die weitere Drehung des Punktes n um O' und den

Winkel β geschieht, indem man um O' einen Kreisbogen mit $O'n_2'$ als Radius zeichnet und $n_2'n_2'' = \widehat{sr}$ macht. — Wie n sind die übrigen Punkte zu behandeln.

Durch diese Drehungen wurde erreicht, daſs A und B immer noch auf das ursprüngliche Projektionssystem bezogen sind, aber in eine Lage kamen, die eine einfache Lösung der Aufgabe möglich macht.

Fig. 2.

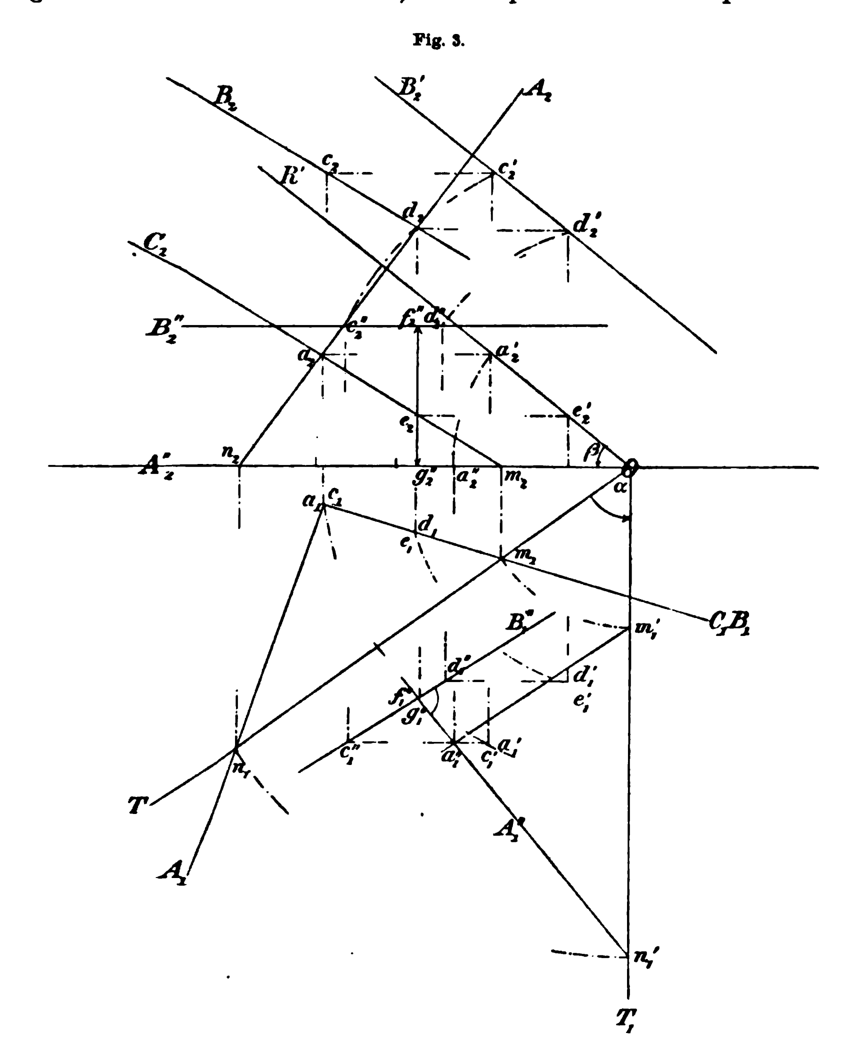


Die Lotebene B_1'' und eine zu ihr senkrechte Ebene durch $A_2''(A)$ geben in ihrer Schnittlinie die kürzeste Entfernung beider. Deren Endpunkte sind f und g, ihre Lage auf den ursprünglichen Projektionen kann durch zurückgehende Konstruktion angegeben werden. $e = f_1'' g_1''$.

3. Es kann der Fall eintreten, daſs der Schnitt der Lotebene durch A_1 in der YZ-Ebene über das Zeichnungsblatt hinaus-

fällt. Dann wählen wir einen uns passend scheinenden Punkt O auf Y aus, fällen von ihm aus die Senkrechte auf A_1 und drehen wie in Figur 2 um den Winkel α so, daſs A_1 und damit A parallel zur

Fig. 3.



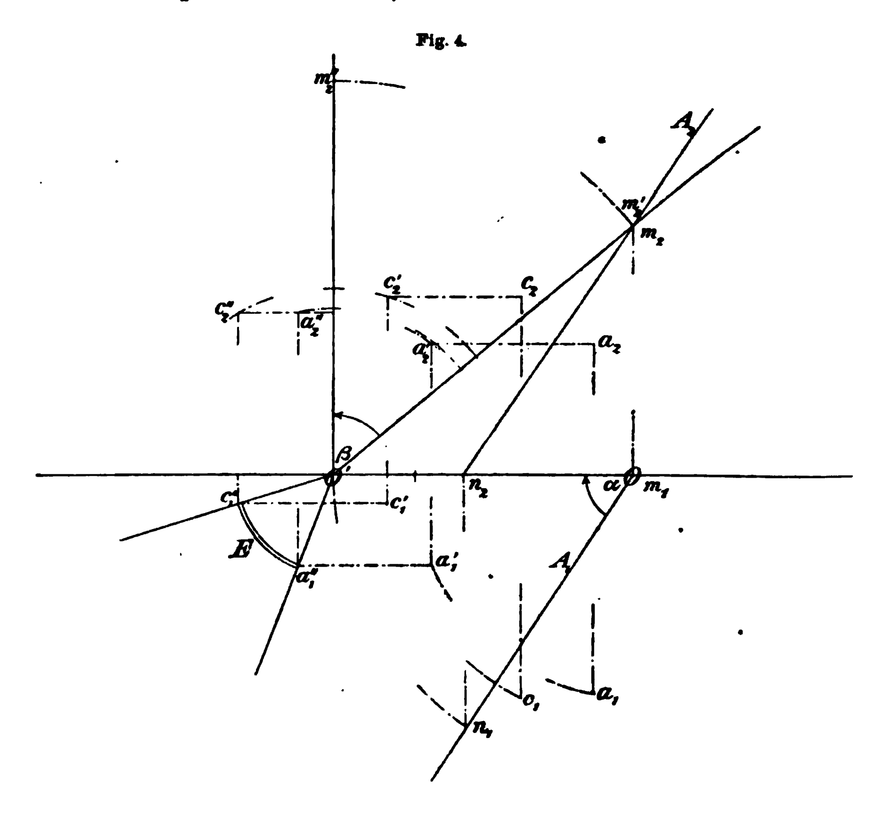
YZ-Ebene liegt. Eine weitere Drehung um Winkel β stellt A senkrecht zur XY-Ebene. Der weitere Gang der Lösung stimmt dann mit der ersten überein.

Die Gerade B muſs selbstverständlich diese Drehungen starr mit A verbunden mitmachen.

4. Um die von uns gedachte Drehung einer Ebene anzugeben, benutzen wir dieselbe Aufgabe. Diesmal lösen wir sie, indem wir

durch eine der windschiefen Geraden A eine Ebene parallel zur andern (B) legen. Gerade und Ebene drehen wir dann so, dafs die in No. 2 unter 2. erwähnte einfache Lage erscheint.

Durch Punkt a (Fig. 3) wurde die zu B parallele C gelegt. Die Spur der Ebene AC mit XY heifse T. Eine Drehung um O, den Schnitt der Spur mit Achse Y, und um α Grad stellte T und Ebene



AC senkrecht zur YZ-Ebene. R' ist nun Spur in dieser Ebene. Eine zweite Drehung um O und β Grad legte AC in die XY-Ebene, mit ihr natürlich auch Gerade A.

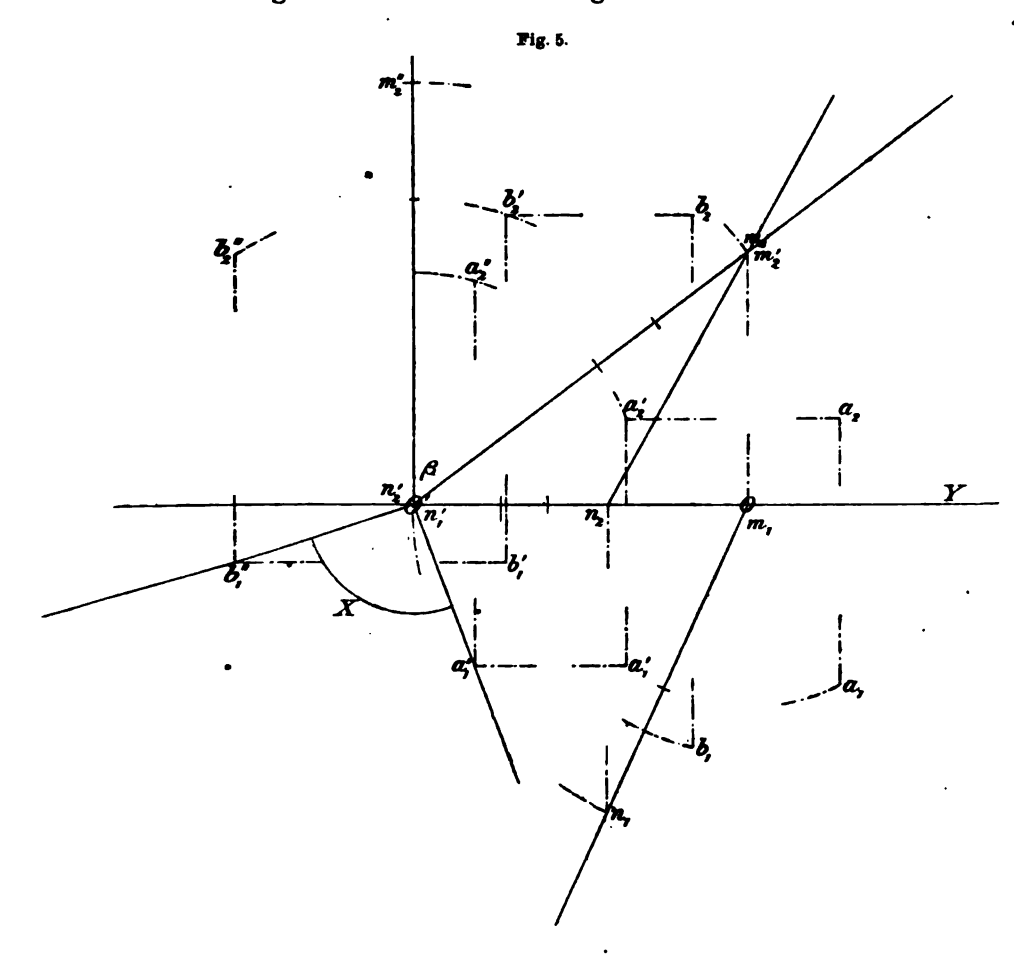
Weil Gerade B parallel zur Ebene AC ist, so ist ihre Projektion auf YZ nach der ersten Drehung parallel zur R', nach der zweiten parallel zur XY-Ebene. Die gesuchte Entfernung fg mit den Endpunkten, aber auch der Winkel der Geraden A und B, nämlich $d_1''f_1''a_1''$, ist damit gefunden.

5. Eine Gerade A und ein Punkt a seien gegeben. Punkt a soll um ε Grad und A als Drehachse gedreht werden. (Figur 4.)

Wie in Figur 1 wurde die Gerade A durch zweimalige Drehung **senkrecht** zur XY-Ebene gestellt. Punkt a hat bei diesen Drehungen **die** A **zu** begleiten.

Nun kann Punkt a um O', den Fufspunkt der senkrecht gestellten A, um **den** vorgeschriebenen Winkel ε gedreht werden. Nach dieser

Fig. 5.



Drehung erhielt er die Bezeichnung c, dargestellt durch c_1'' und c_2''. **Mit** A in die ursprüngliche Lage zurückgeführt sind c_1 und c_2 seine **Projektionen**.

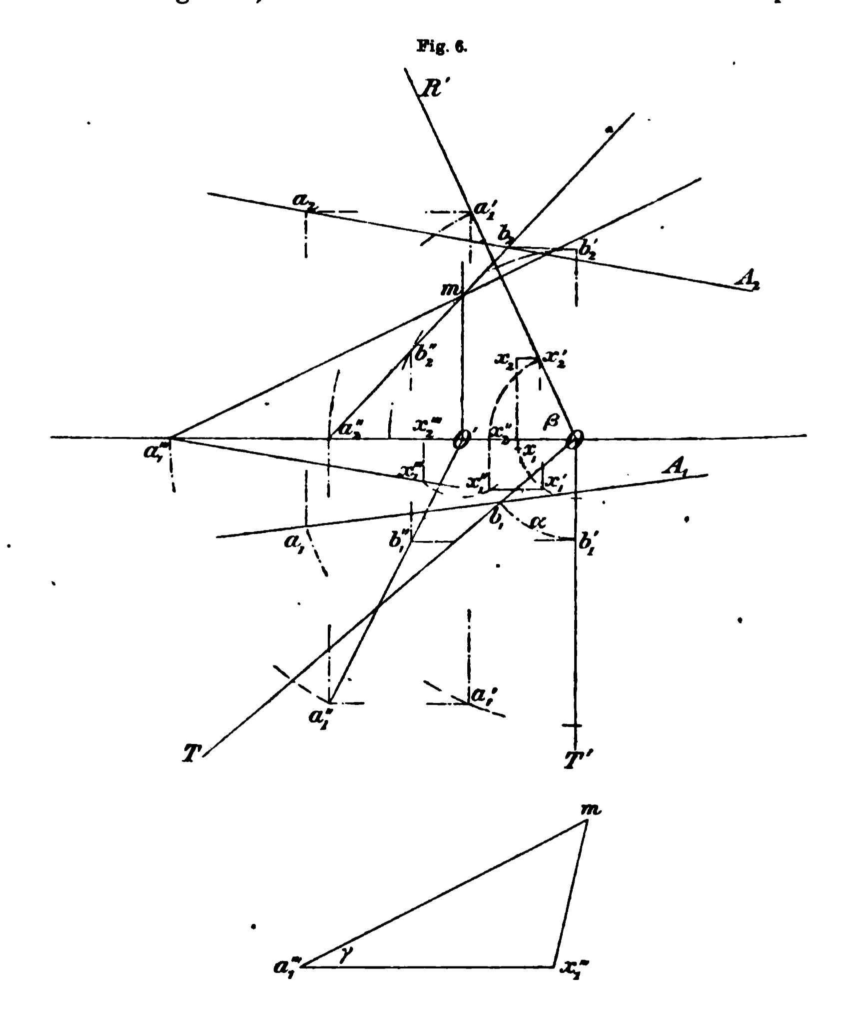
6. Es werde der Winkel gesucht, den zwei durch ihre Schnittgerade mn **und je einen weiteren Punkt** (a **und** b) **gegebenen Ebenen bilden.** (Figur 5.)

Durch zwei Drehungen um O und O' wurde die Schnittgerade mn senkrecht zur XY-Ebene gestellt. Die Projektionen a_1'' und b_1''

geben mit O' als Scheitel den Winkel der beiden Ebenen an. Fällt der Schnitt der Spur mit der Y-Achse über das Zeichnungsblatt, so kann ähnlich wir in No. 3, Figur 2 verfahren werden, um die gegebenen Ebenen senkrecht zur XY zu stellen.

7. Die Forderung, eine Gerade einer allgemein gegebenen Ebene anzugeben, welche mit einer zur letzteren nicht paral-

Fig. 6.



lelen Geraden A einen vorgeschriebenen Winkel γ bildet, gehört wohl zu den schwierigeren dieses Kapitels. In Figur 6 wurde sie mittels Drehungen gelöst. Die Ebene Ta (a ist der Schnittpunkt der gegebenen Stücke) wurde durch zweimalige Drehung, zuerst um α, dann um β Grad in die XY-Ebene gelegt; Gerade A erscheint dabei starr mit Ta

verbunden. Nun ist die Aufgabe in folgende Form gebracht: Eine beliebige Gerade A ist gegeben, gesucht eine Gerade ax, welche in der XY-Ebene liegt und mit A einen gegebenen Winkel γ einschliefst.

Zu dem Ende wurde A ($= a_1''a_2''$ und $b_1''b_2''$) um die Drehachse $O'm$ in die YZ-Ebene gedreht und so die Länge $a_1''m$ gefunden. Hierauf wurde in der Nebenfigur Dreieck $a_1'''mx_1'''$ mit $a_1''m$ und $\sphericalangle \gamma$ gezeichnet, mx_1''' beliebig. Letztere ist Mantellinie des Kegels mit der Achse $O'm$, woraus der Radius $x_1'''O'$ des Grundflächenkreises gefunden wird. In der Entfernung $a_1'''x_1'''$, wie sie die Nebenfigur angiebt, erhält man dann den Punkt x_1''' auf der eben genannten Kreislinie. Die Projektionen der gesuchten Geraden in der ursprünglichen Lage anzugeben, bietet keine Schwierigkeit.

8. Die dargelegte Methode der Drehungen giebt ein Mittel an die Hand, Punkte, Geraden, Ebenen und Körper jederzeit in solche Lage zu den Projektionstafeln zu bringen, dafs die Aufgabe zu einer einfachen wird.

Eine ausführliche Darlegung der hier nur angedeuteten Theorie, „Drehungen in der darstellenden Geometrie“, erscheint demnächst bei Karl Koch, Nürnberg.

Eine direkte Lösung der Aufgabe: Ein Dreikant aus den drei Flächenwinkeln zu konstruieren.

Von Eduard Salfner in Nürnberg.

Denken wir uns ein durch keine Querebene begrenztes dreiseitiges Prisma! In dasselbe kann eine Kugel geschoben werden, welche die Seitenflächen in den Punkten a, b und c berührt. Verbindet man den Mittelpunkt m der Kugel mit den drei Berührungspunkten, so ergänzen je zwei der Verbindungslinien durch ihren Winkel den gegenüber liegenden Flächenwinkel des Prismas zu zwei Rechten; zugleich ist der Kugelmittelpunkt der Mittelpunkt des dem Dreieck uvw, dem Schnitt des Prismas mit der Ebene abc, einbeschriebenen Kreises.

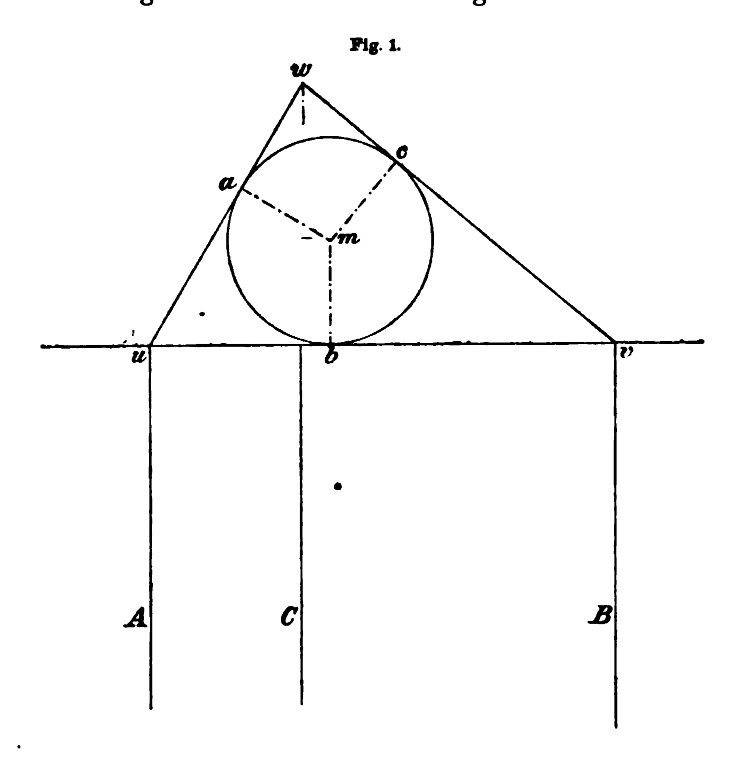
Ferner denken wir uns zwei der Prismenebenen, bestimmt durch die Kanten AB und AC (s. Figur 1), als festliegend und drehen die Ebene BC um bm als Achse, etwa auf die uns zugekehrte Seite der YZ-Ebene zu; dann dreht sich mit dieser Ebene auch mc und beschreibt einen Kegel. Die Mantellinien desselben machen in der Prismenstellung des Radius mc mit ma den gröfsten Winkel; sobald aber die Ebene BC die Pris-

menlage verläſst, wird der Winkel des mc mit am kleiner und ist am kleinsten, wenn er zum zweiten Male mit der ma in derselben Ebene liegt. Ist im Prismenschnitt $uw = vw$, so trifft mc nach der Drehung der Ebene BC um $2R$ mit ma zusammen und Ebene BC liegt auf AC, wenn auch in umgekehrter Folge.

Es interessiert uns nun, Rechenschaft über die Veränderungen zu erhalten, welche diese Drehung der Ebene BC bewirkt.

Die Änderung des Winkels amc ist bereits klar gelegt. Weiter! Da am fest liegt und mc bei der Drehung senkrecht zur Ebene BC

Fig. 1.

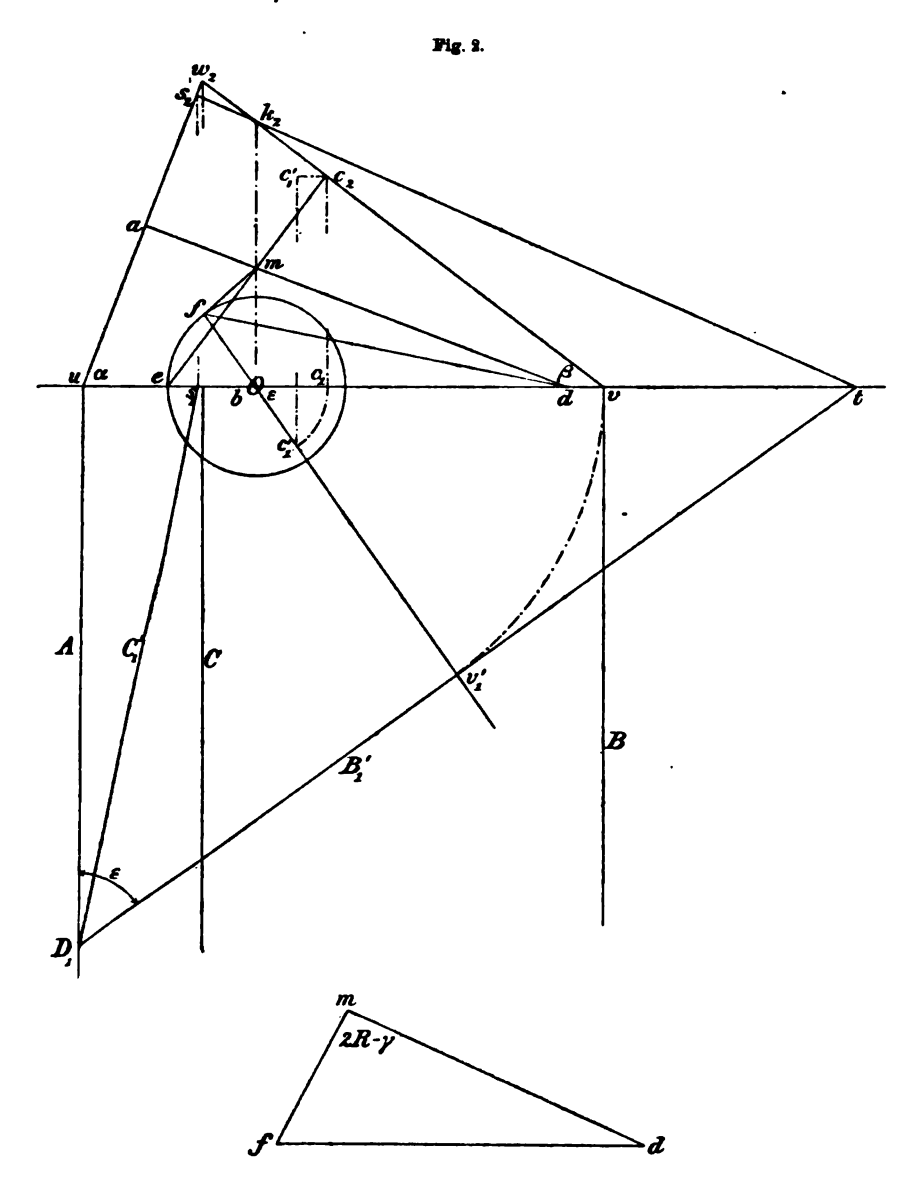


bleibt, so steht Ebene amc stets senkrecht auf der Kante C und auch nach der Drehung, d. i. nach der Verkleinerung, bleibt amc Supplementwinkel zum Flächenwinkel C, also wird der Flächenwinkel um ebensoviel gröſser als jener kleiner.

Die Verlängerung der mc über m (s. Figur 2) schneidet während der Drehung auf der Ebene AB einen Kreis aus, dessen Mittelpunkt b ist, während die zu ad verlängerte am fest bleibt. Hat die Drehung der Ebene BC um den Winkel ε stattgefunden, so hat sich Punkt e nach f begeben und fmd ist der Supplementwinkel zu dem Flächenwinkel des nunmehrigen Dreikants $AB'C'$. Aus md, $mf = me$ und

dem eingeschlossenen Winkel, zwei Rechte minus dem bekannten Flächenwinkel γ, kann daher das Dreieck fmd konstruiert werden, wodurch die Seite df erhalten wird.

Fig. 2.



Die Drehung der Ebene BC um die Achse bm und den Winkel ε giebt zugleich den Kantenwinkel des Dreikants an, der dem gegebenen Flächenwinkel γ gegenüberliegt.

Ist daher ein Dreikant aus den drei Flächenwinkeln α, β, γ zu konstruieren, so zeichnet man zuerst ein ebenes Dreieck uvw mit zwei gegebenen Winkeln, etwa aus α und β. Der demselben einbeschriebene Kreis hat als Berührungspunkte a, b und c. Die Verlängerungen der Berührradien am und ac schneiden uv in d und e. Mit be als Radius ist nun um b der Kreis zu beschreiben. Das Dreieck fmd erhält man jetzt aus md, $mf = me$ und dem Winkel $(2R - \gamma)$.

Seine Seite fd wird nun Radius des Kreises um d. Der Schnitt beider Kreise giebt Punkt f. (Nur ein Schnittpunkt gilt für ein Dreikant, das zwischen unserm Auge und der Ebene uvw liegt). Damit wird auch Bogen ef erhalten, welcher den Winkel ε mifst, um den wir die Ebene BC drehen müssen, damit BC mit AC den Winkel γ einschliefse. Macht man weiter $bv_1' = bv$ und zieht durch v_1' die Senkrechte zu jener, so ist dies die gesuchte Kante B'.

Kante C' ist der Schnitt der Ebenen Aa und $B'c$. Ein Punkt desselben ist D_1; einen zweiten sucht man als Schnitt (s) der Ebene $B'c'$ und der Aa im ebenen Dreieck uvw. Bei der Drehung der Ebene Bc um die Achse bm geht sie stets durch den Punkt k, den Schnittpunkt der Achse bm mit vw. Somit sind k und t (der Schnitt der Kante B' mit uv) zwei Punkte der gesuchten Schnittlinie in der Ebene uvw und der Schnitt kt mit ua giebt den zweiten Punkt s der Kante C' an. s_1D_1 ist die Projektion der Kante C' auf die XY-Ebene, us die auf YZ.

Winkel γ kann sowohl spitz als stumpf sein; wenn nur die Bedingung für die Winkelsummen eines Dreikants erfüllt ist.

Verlängert man die Kanten A und B' nach rückwärts, behält aber das (nicht verlängerte) C' bei, so hat man ein zweites Dreikant, das als Flächenwinkel $(2R - \alpha)$, $(2R - \beta)$ und γ hat, das folglich, da α und β als spitz vorausgesetzt sind, zwei stumpfe und einen spitzen Winkel besitzt, wenn γ im ersten Dreikant ein spitzer Winkel war, dagegen drei stumpfe Winkel, wenn γ im ersten Dreikant stumpf war. Hieraus folgt, dafs man in diesen Fällen das Dreikant mit zwei spitzen Winkeln zuerst zeichnet und durch rückwärtige Verlängerung zweier Kanten das gesuchte Dreikant erhält.

Über eine Aufgabe der darstellenden Geometrie.

Von H. E. Timerding in Strafsburg.

1.

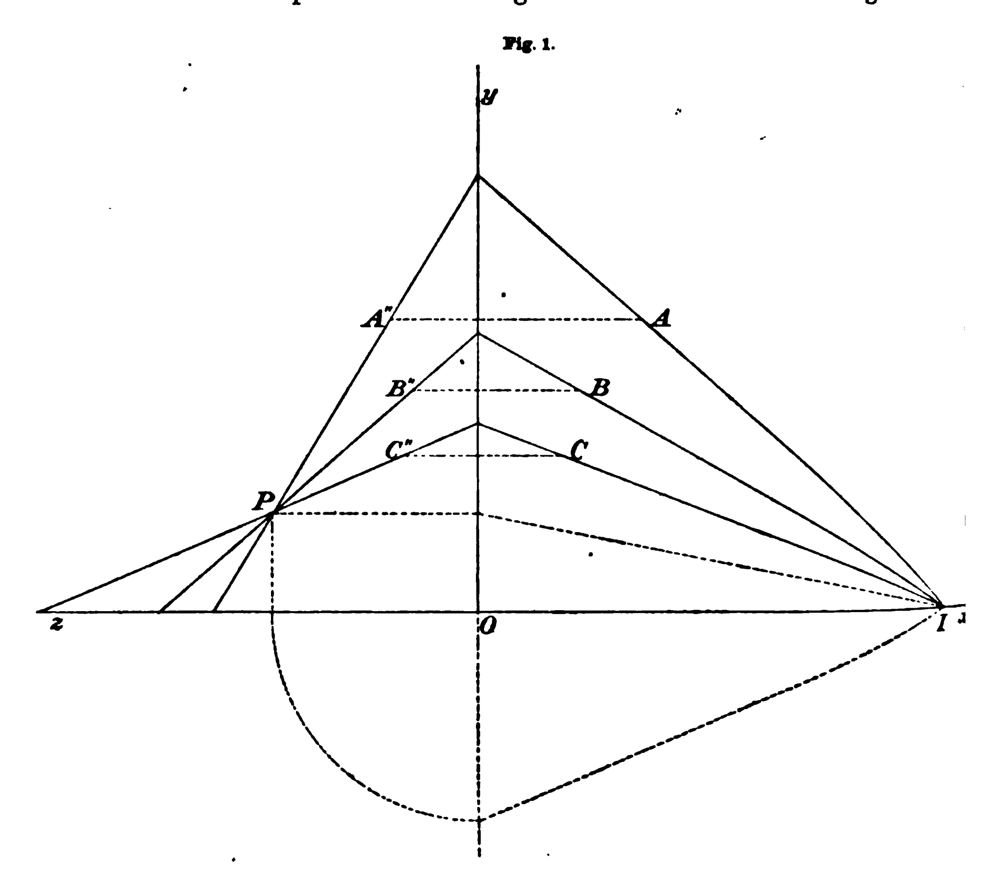
Die folgenden Seiten sind der Aufgabe gewidmet, die Konstruktion der beiden geraden Linien, die vier im Raume gegebene gerade Linien schneiden, in Aufrifs und Grundrifs wirklich auszuführen. Für die Behandlung wird eine grofse Vereinfachung erzielt, wenn man eine der gegebenen Linien zur Schnittlinie x der Aufrifs- und Grundrifsebene wählt. Dann ist das Problem auf die Bestimmung derjenigen beiden Punkte I und J dieser Linie zurückgeführt, durch welche sich eine gerade Linie so legen läfst, dafs sie die drei übrigen gegebenen Linien, a, b, c, trifft.

Nehmen wir einen dieser Punkte, etwa I, als gefunden an, nennen wir ferner A, B, C die Schnittpunkte der drei Linien a, b, c mit der Grundrifsebene, A', B', C' ihre Schnittpunkte mit der Aufrifsebene und A'', B'', C'' diejenigen mit der Seitenrifsebene, so hat man, indem man diese letztere Ebene zu Hilfe zieht, den Punkt I mit A, B, C zu verbinden, um die Grundrifsspuren der Verbindungsebenen von I mit a, b, c zu erhalten. Die Schnittpunkte dieser Linien mit der Schnittlinie y von Grundrifs- und Seitenrifsebene verbinde man mit den zugehörigen Punkten A'', B'', C''. Diese drei Linien, die Seitenrifsspuren der genannten Ebenen, müssen sich dann in einem Punkte P schneiden, und dies ist der Punkt, in dem die gesuchte Linie die Seitenrifsebene durchstöfst. Fällt man von P die Lote auf die y- und z-Achse (oder Verlängerung der x-Achse), verbindet den Fufspunkt des ersteren Lotes mit I und trägt die Länge des zweiten Lotes auf der Verlängerung der x-Achse als z-Achse ab, um den Endpunkt dieser Strecke ebenfalls mit I zu verbinden, so sind diese beiden Linien durch I die Projektionen einer der beiden gesuchten Linien auf die Grundrifs- und Aufrifsebene und das Problem somit als gelöst zu betrachten. (Fig. 1.)

Um nun auf der Linie x die beiden Punkte I und J zu bestimmen, denken wir sie mit A, B, C einerseits sowie mit A', B', C' anderer-

seits durch zwei Kegelschnitte, $\varkappa$ und $\varkappa'$, verbunden. Diese Kegelschnitte bilden dann den Schnitt der Grundrifs- und Aufrifsebene mit der quadratischen Regelfläche, die durch die drei Linien a, b, c bestimmt wird, und sie sind durch die Regelschar, der diese Linien angehören, projektiv auf einander bezogen, so dafs ihre Schnittpunkte I und J sich selbst entsprechen. Die Aufgabe kann demnach auch folgender-

Fig. 1.



mafsen gefafst werden: durch zweimal drei gegebene Punkte sollen zwei Kegelschnitte so gelegt werden, dafs sie sich zweimal auf einer gegebenen geraden Linie schneiden, und diese beiden Punkte sollen in derjenigen projektiven Beziehung zwischen den Punkten beider Kegelschnitte sich selbst zugeordnet sein, welche durch die dreimal zwei gegebenen Punkte als drei Paare entsprechender Punkte bestimmt wird.

Die Seiten der Dreiecke ABC und $A'B'C'$ schneiden auf der Linie x zwei Punktetripel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ aus, die auf dieser Linie als paarweise homologe Punkte ebenfalls eine projektive Ver-

wandtschaft begründen. Ich behaupte nun, daſs die Doppelpunkte dieser Verwandtschaft eben die gesuchten Punkte I und J sind. Zum Beweise braucht man nur die Ebene kollinear so zu transformieren, daſs das Dreieck ABC in $A'B'C'$ und die Linie x in sich selbst übergeführt wird. Sind dann I und J die in Rede stehenden Doppelpunkte auf x, so wird der Kegelschnitt, der durch A, B, C, I, J bestimmt ist, in den durch A', B', C', I, J gelegten Kegelschnitt übergehen, und beide Kurven sind gleichzeitig in der verlangten Weise projektiv auf einander bezogen, da die Punkte I und J ja sich selbst entsprechen. Diese Punkte sind daher in der That die verlangten.

Um sie zu konstruieren, kann man folgendermaſsen zu Werke gehen. Man zeichne irgend einen Kreis, der die Linie x berührt. Durch jeden der sechs Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ geht an diesen dann noch eine zweite Tangente. Seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ diese sechs Tangenten, so verbinde man

den Schnittpunkt von $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'$ mit dem Schnittpunkte von $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}$,
" " " $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}'$ " " " " $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{a}$,
" " " $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'$ " " " " $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$.

Nach dem Satze von Brianchon schneiden sich diese drei Linien in einem Punkte. Die an den Kreis aus diesem Punkte gelegten Tangenten treffen die Linie x in den gesuchten Punkten I und J.

(Man vergleiche Fiedlers Darstellende Geometrie 1. Band, Art. 28, und die von anderen Gesichtspunkten ausgehende Lösung unserer Aufgabe im 2. Bande, Art. 38.)

2.

Hiermit ist die gestellte Aufgabe bereits gelöst. Es wäre aber verfehlt, auf diesem Punkte stehen bleiben zu wollen. Vielmehr liegt das ganze Interesse des Problems in seiner weiteren Diskussion.

Denken wir uns zunächst einen beliebigen Punkt P der Linie x mit den Punkten A, B, C und A', B', C' verbunden. Dann können wir durch ihn eine weitere gerade Linie p so legen, daſs sie mit den Strahlen nach A, B, C dasselbe Doppelverhältnis bildet wie die Linie x selbst mit den Strahlen nach A', B', C'. Die Punkte I und J sind dann dadurch gekennzeichnet, daſs für sie die Linie p mit x zusammenfällt. In der That sind die Punkte I, J, A, B, C und die Punkte I, J, A', B', C' homologe Punkte auf den Kegelschnitten $\varkappa$ und $\varkappa'$, und müssen deshalb die Strahlen, die beispielsweise I mit A, B, C und J verbinden, das nämliche Doppelverhältnis bilden wie die Strahlen, welche denselben Punkt I mit A', B', C', J verbinden

Nun umhüllt die Linie p, wenn der Punkt P sich auf x bewegt, eine rationale Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung, welche x selbst doppelt berührt, nämlich in den Punkten I und J. Zu den Tangenten dieser Kurve gehören ferner die Seiten a, b, c des Dreiecks ABC und die Linien a_1, b_1, c_1, welche die Schnittpunkte $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ der Linie x und der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ mit den homologen Ecken des Dreiecks ABC verbinden. Die Kurve ist durch diese sechs Tangenten, die zu dreien durch die Punkte A, B, C gehen, und durch ihre Doppeltangente x vollkommen bestimmt. Sie hängt sonach aufser von den vier Linien a, b, c, x nur von der Lage der Punkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ auf x und weiter nicht von der Lage des Dreiecks $A'B'C'$ ab. Dies letztere kann vielmehr, ohne dafs die Kurve sich ändert, durch irgend eine perspektive Kollineation transformiert werden, welche x zur Kollineationsachse hat.

In der reziproken Form lauten diese Sätze folgendermafsen: Sind aufser einem festen Punkte X zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ gegeben, und bestimmt man auf jedem Strahle durch X den Punkt, der mit den Schnittpunkten des Strahles und der Seiten des einen Dreiecks dasselbe Doppelverhältnis bildet wie der feste Punkt mit den Schnittpunkten des Strahles und der Seiten des anderen Dreiecks, dann erfüllen diese Punkte eine rationale Kurve dritter Ordnung, die durch den Punkt X doppelt hindurchgeht. Die Tangenten im Doppelpunkte sind die Doppelstrahlen der projektiven und konjektiven Strahlenbüschel, zu denen die Verbindungslinien des festen Punktes X mit den Ecken beider Dreiecke als sich paarweise entsprechende Strahlen gehören.

Alle Kegelschnitte, die durch den Punkt X und die auf der Kurve dritter Ordnung gelegenen Ecken des ersten Dreiecks gehen, bilden ein Kegelschnittbüschel, das auf das Büschel aller durch X gehenden Strahlen projektiv bezogen ist und mit ihm die Kurve dritter Ordnung erzeugt. Die Tangenten der Kegelschnitte im Punkte X stehen zu dem Strahlenbüschel in der soeben erörterten projektiven Verwandtschaft, deren Doppelstrahlen die Doppelpunktstangenten bilden. Die zerfallenden Kurven in dem Kegelschnittbüschel bestehen aus je einer Seite des ersten Dreiecks und dem Strahle vom Doppelpunkte nach dem gegenüberliegenden Eckpunkte desselben Dreiecks, und ihnen entspricht jedesmal der Strahl nach der homologen Ecke des zweiten Dreiecks, der sonach allemal die zugehörige Seite des ersten Dreiecks in einem Punkte der Kurve dritter Ordnung trifft. Diese Betrachtungen zeigen, dafs man den vorangehenden Satz auch umkehren und dann so aussprechen kann:

Wenn man irgend einer rationalen Kurve dritter Ordnung ein Dreieck einbeschreibt, auf den Linien, welche von dem Doppelpunkte

nach den dritten Kurvenpunkten auf den Seiten dieses Dreiecks gehen, die Ecken eines zweiten Dreiecks annimmt und einen beliebigen Kurvenpunkt P mit dem Doppelpunkte X verbindet, so bilden auf dieser Verbindungslinie die Schnittpunkte mit den Seiten des ersten Dreiecks zusammen mit P immer dasselbe Doppelverhältnis wie die Schnittpunkte der Linie mit den Seiten des zweiten Dreiecks zusammen mit X.

3.

Wir wollen nun unser Augenmerk wieder auf die quadratische Regelfläche richten, die durch die drei Linien a, b, c bestimmt wird. Diese Regelfläche schneide die Aufriſs- und Grundriſsebene, wenn wir beide in ihrer ursprünglichen Lage, senkrecht gegen einander, annehmen, in den Kegelschnitten $\varkappa$ und $\varkappa'$. Diese beiden Kegelschnitte sind durch die Regelschar, der die Linien a, b, c angehören, projektiv auf einander bezogen, so daſs ihre Schnittpunkte I und J sich selbst entsprechen. Denken wir uns nun, wie es gewöhnlich geschieht, die Aufriſsebene so um ihre Schnittlinie mit der Grundriſsebene herumgeklappt, daſs sie mit der letzteren zusammenfällt, dann gehe die Kurve $\varkappa$ in $\varkappa''$ über, und es werden die Verbindungslinien entsprechender Punkte auf den beiden Kegelschnitten $\varkappa'$ und $\varkappa''$ einen neuen Kegelschnitt, λ, umhüllen. Dieser Kegelschnitt ist offenbar nichts anderes, als die Schnittlinie der Ebene mit dem Tangentialcylinder der Regelfläche, dessen Achse gegen die Grundriſsebene um einen halben rechten Winkel geneigt ist. Projiziert man also aus dem in dieser Achsenrichtung unendlich fern gelegenen Punkte die Regelschar auf die Grundriſsebene, so erhält man die Tangenten des Kegelschnittes λ. Auſserdem haben wir aber auch die orthographischen Projektionen der Regelschar auf die Aufriſs- und Grundriſsebene in Betracht zu ziehen. Es wird daher gut sein, vorab die folgende allgemeine Frage zu beantworten:

Wenn man von den Punkten einer geraden Linie g aus die Tangentenkegel an eine quadratische Fläche F legt, was für eine Kegelschnittschar bilden dann die Schnittlinien dieser Tangentenkegel mit einer beliebigen Ebene π?

Zunächst ist klar und längst bekannt, daſs die Schnittpunkte jedes Kegelschnittes λ dieser Schar mit der Schnittlinie $\varkappa$ der Fläche F und der Ebene π sich paarweise vereinigen müssen.[1]) Ist nämlich L die Spitze des zugehörigen Tangentenkegels, so müssen diese gemeinsamen Punkte beider Kegelschnitte alle auf der Schnittlinie der Ebene π

1) Die grundlegende Arbeit über den im Folgenden berührten Gegenstand ist Steiners „Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte“, Crelles Journal, Band 45, Seite 212, in den gesammelten Werken Band 2, Seite 469.

mit der Polarebene des Punktes L liegen. Die Kegelschnitte der Schar berühren aber auch die beiden Schnittlinien i und j der Ebene $\varkappa$ mit den durch die Linie g gelegten Tangentenebenen der Fläche F.

Um nun Ordnung und Klasse der Schar zu bestimmen, hat man nur zu bedenken, daſs, wenn einer ihrer Kegelschnitte eine gerade Linie u berührt, sein zugehöriger Tangentenkegel eine der durch diese Linie u gelegten Tangentialebenen der Fläche berühren muſs. Die Spitze des Kegels muſs also einer der beiden Punkte auf g sein, in denen diese Linie von den beiden durch u gehenden Tangentialebenen geschnitten wird. Die Schar ist also von der zweiten Klasse. Sie ist auch von der zweiten Ordnung. Denn soll einer ihrer Kegelschnitte durch einen bestimmten Punkt P gehen, so muſs sein zugehöriger Tangentenkegel eine durch P gehende Tangente enthalten. Seine Spitze ist also einer der beiden Punkte, in denen der von P aus an die Fläche gelegte Tangentenkegel die Linie g schneidet. Wir finden somit:

Die Tangentenkegel einer quadratischen Fläche F, deren Spitzen auf einer gegebenen geraden Linie liegen, schneiden eine beliebige Ebene in den Kegelschnitten einer quadratischen Schar (zweiter Ordnung und zweiter Klasse). Dieselben berühren zwei gerade Linien i und j und auſserdem doppelt die Schnittkurve $\varkappa$ der Ebene mit der Fläche F. Die Berührungssehnen gehen alle durch einen festen Punkt, der mit den Schnittpunkten der Kurve $\varkappa$ und der Linien i und j paarweise auf einer geraden Linie liegt, ohne aber mit dem eigenen Schnittpunkte von i und j zusammenzufallen, er liegt vielmehr auf der Polare dieses Schnittpunktes bezüglich $\varkappa$.

Halten wir nun umgekehrt den Tangentenkegel der Fläche F fest, lassen aber die Ebene π sich um eine Axe drehen und so ihre Schnittkurve mit F sich ändern, dann erhalten wir den zu dem vorigen reziproken Satz: Projiziert man aus einem beliebigen Punkte P die Schnittkurven einer quadratischen Fläche mit den Ebenen eines Ebenenbüschels auf irgend eine andere Ebene η, so erhält man in dieser eine quadratische Schar von Kegelschnitten, die alle durch zwei feste Punkte I und J gehen und auſserdem die Schnittkurve λ der Ebene mit dem aus P an die Fläche gelegten Tangentenkegel doppelt berühren. Die Berührungssehnen gehen durch einen festen Punkt. Derselbe ist bezüglich λ der Pol einer Diagonale des Vierseits, das die aus den Punkten I und J an λ gelegten Tangenten bilden.

Wir wollen endlich noch die quadratische Fläche selbst sich ändern lassen, indem wir ihre Schnittkurven $\varkappa$ und $\varkappa'$ mit zwei festen Ebenen ε und ε' unverändert lassen. $\varkappa$ und $\varkappa'$ durchschneiden sich in zwei Punkten I und J. Die Fläche durchläuft dann ein Büschel.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine Fläche desselben. Jede Ebene wird von zwei Flächen des Büchels berührt, denn in dem Kegelschnittbüschel, welches das Flächenbüschel aus der Ebene ausschneidet, sind aufser dem Paare der Schnittlinien mit ε und ε' zwei zerfallende Kurven enthalten, die auf zwei die Ebene berührenden Flächen des Büschels liegen. Aber auch jede gerade Linie wird von zwei Flächen des Büschels berührt. Legt man also von einem beliebigen Punkte P aus die Tangentenkegel an die Flächen des Büschels und bringt sie mit der Ebene ε' zum Schnitt, indem man auf diese Ebene gleichzeitig die Kurve $\varkappa$ aus demselben Punkte P projiziert, so erhält man wieder eine quadratische Schar von Kegelschnitten, die alle die Kurve $\varkappa'$ und die Projektion $\varkappa''$ von $\varkappa$ doppelt berühren.

Durch jede Regelschar auf einer Fläche des Büschels sind die Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ projektiv aufeinander bezogen, so dafs ihre gemeinsamen Punkte I und J sich selbst entsprechen. Die Projektionen der Linien einer solchen Regelschar auf die Ebene ε' umhüllen aber immer einen Kegelschnitt der quadratischen Schar. Sind also zwei Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ derart projektiv aufeinander bezogen, dafs zwei ihrer Schnittpunkte, I und J, sich selbst entsprechen, so umhüllen die Verbindungslinien homologer Punkte einen Kegelschnitt, der beide Kurven doppelt berührt. Die Berührungssehnen gehen für beide Kegelschnitte immer durch einen und denselben Punkt. In diesem Punkte wird die Linie IJ von der Verbindungslinie der beiden übrigen Schnittpunkte der Kurven $\varkappa'$ und $\varkappa''$ getroffen. (Fig. 2.)[1])

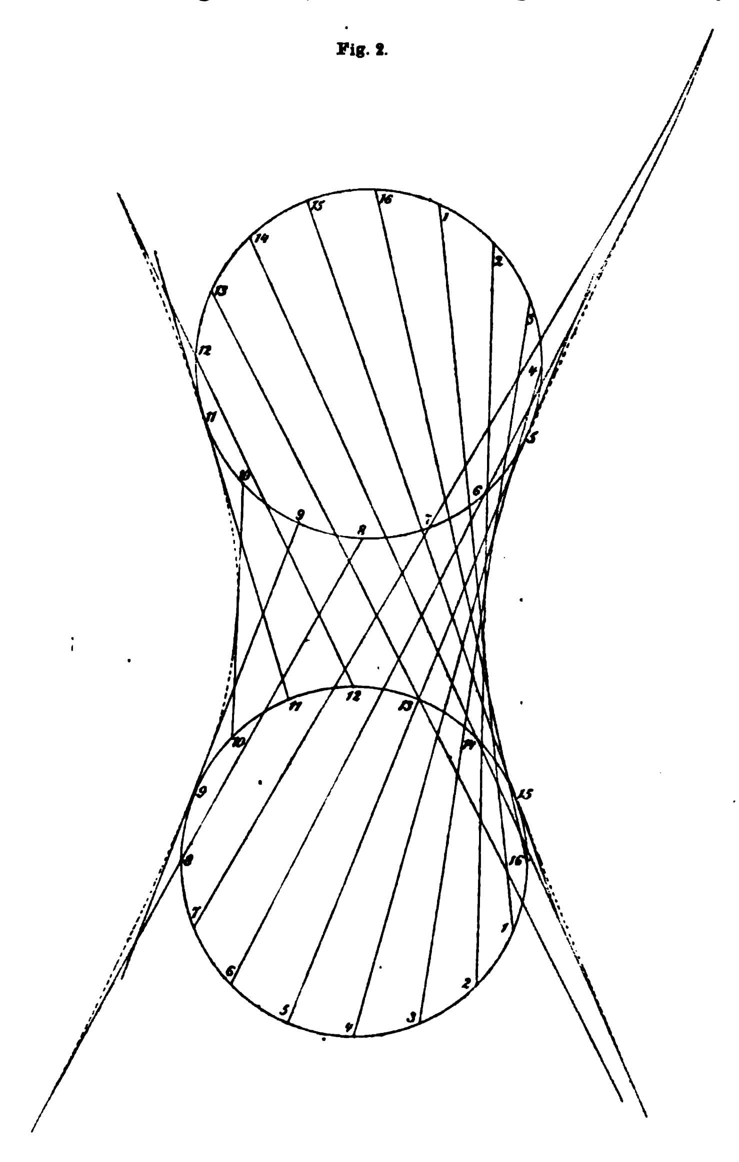
Den zwei Kegeln, die durch die beiden Kegelschnitte $\varkappa$ und $\varkappa'$ im Raume gehen, entsprechen in der Ebene ε' zwei Arten der perspektiven Beziehung zwischen den Kurven $\varkappa'$ und $\varkappa''$ und zwei Paare von gemeinschaftlichen Tangenten beider Kurven. Die quadratische Kegelschnittschar enthält aber nicht blofs zwei Linienpaare, sondern auch zwei Punktepaare, die aus je zwei Schnittpunkten der Kurven $\varkappa'$ und $\varkappa''$, das eine Mal I und J, bestehen. Jedem dieser Punktepaare entspricht eine doppelt perspektive Beziehung zwischen den Punkten von $\varkappa'$ und $\varkappa''$. In der That wird eine solche Beziehung ja hergestellt, indem man die Punkte der einen Kurve auf die andere aus einem ihrer Schnittpunkte projiziert.

Zu derselben quadratischen Kegelschnittschar wäre man gelangt, wenn man die Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ projektiv so auf einander be-

1) Die Figur bezieht sich auf den besonders merkwürdigen Fall, dafs die beiden Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ Kreise und die Punkte I und J die unendlich fernen Kreispunkte sind. Dann bilden die Radien nach entsprechenden Punkten auf den beiden Kreisen alle mit einander denselben Winkel.

zogen hätte, dafs statt I und J ihre übrigen beiden Schnittpunkte sich selbst entsprächen, oder wenn man sie als Kurven zweiter Klasse so auf einander bezogen hätte, dafs zwei ihrer gemeinsamen Tangenten,

Fig. 2.



die in der Kegelschnittschar ein Paar bilden, sich selbst entsprächen. Die Schnittpunkte homologer Tangenten von $\varkappa'$ und $\varkappa''$ hätten dann immer einen Kegelschnitt der quadratischen Schar gebildet. In dieser allgemeineren Kegelschnittschar sind die vorher besprochenen als spe-

zielle Fälle enthalten. In der That braucht man nur den einen Kegelschnitt in ein Linienpaar oder ein Punktepaar ausarten zu lassen, um zu ihnen zu gelangen.

4.

Aus der projektiven Beziehung zwischen den beiden Kegelschnitten $\varkappa'$ und $\varkappa''$ in Grundrifs- und Aufrifsebene, wie sie durch die eine Regelschar der zugehörigen Regelfläche begründet wird, lassen sich die Kegelschnitte λ' und λ'' leicht ableiten, von welchen die orthographischen Projektionen der Regelfläche auf die Grundrifs- und Aufrifsebene begrenzt werden. Man hat nämlich nur jeden Punkt des einen oder anderen Kegelschnittes auf die Linie x senkrecht zu projizieren und den Fufspunkt des Lotes jedesmal mit dem entsprechenden Punkte des anderen Kegelschnittes zu verbinden. Diese Linien umhüllen dann eine der gesuchten Kurven.

Verbinden wir unmittelbar die Paare entsprechender Punkte auf $\varkappa'$ und $\varkappa''$, so umhüllen die Verbindungslinien den bereits erwähnten Kegelschnitt λ. Jede Tangente dieses Kegelschnittes schneidet aber beide Kurven $\varkappa'$ und $\varkappa''$ zusammen in vier Punkten, zwei davon sind einander als homologe Punkte zugewiesen, aber auch die beiden übrigen entsprechen sich in einer zweiten projektiven Beziehung zwischen den beiden Kegelschnitten, und diese beiden Verwandtschaften sind so einander zugeordnet, dafs jede durch die andere bedingt ist. Denken wir uns den Kegelschnitt $\varkappa''$ wieder aus der Ebene des anderen Kegelschnittes $\varkappa'$ herausgedreht, so dafs er wieder in die Kurve $\varkappa$ übergeht, dann entsprechen die beiden projektiven Beziehungen den beiden Regelscharen einer durch die zwei Kegelschnitte gelegten Regelfläche. Durch die Kurve λ sind aber zwei solche Paare einander zugeordneter, projektiver Beziehungen begründet, denn man kann auf einer Tangente dieser Kurve in doppelter Weise die zweimal zwei Schnittpunkte mit den Kegelschnitten $\varkappa'$ und $\varkappa''$ paarweise zusammenfassen, so dafs die Punkte jedes Paares auf verschiedenen Kegelschnitten liegen. In der That, legen wir durch die Kurve λ den Tangentialcylinder der Regelfläche, der durch diese Kurve gehen soll, so ist derselbe, bei bekannter Achsenrichtung, offenbar bestimmt durch die vier Tangenten der Kurve λ in den Punktepaaren, in welchem sie die Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ berührt, und durch irgend eine fünfte Tangente von λ. Legen wir durch diese fünfte Tangente die Tangentialebene τ des Cylinders, so ist die quadratische Fläche, zu der derselbe gehören soll, dadurch festgelegt, dafs sie durch die Kurven $\varkappa$ und $\varkappa'$ gehen und diese Ebene τ selbst berühren soll. Solcher Flächen giebt es aber zwei, und von beiden aus gelangen wir zu derselben Kurve λ.

Sind nun aber zwei Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ projektiv aufeinander bezogen, so dafs zwei ihrer Schnittpunkte, I und J, sich selbst entsprechen, so lassen sie sich immer perspektiv auf die Verbindungslinie x dieser Schnittpunkte beziehen, derart dafs entsprechende Punkte auf ihnen demselben Punkte dieser Linie x zugeordnet sind. Und zwar ist dies immer auf unendlich viele Arten möglich, denn wir können einen beliebigen Punkt der Linie x mit irgend einem Paare entsprechender Punkte auf beiden Kegelschnitten verbinden. Diese Verbindungslinien schneiden die Kegelschnitte dann noch in je einem weiteren Punkte, und wählt man diese beiden Punkte zu Projektionszentren, so sind die beiden Kegelschnitte in der verlangten Weise projektiv auf die Linie x bezogen. Legen wir also das Projektionszentrum auf einem der beiden Kegelschnitte fest, so ist es auf dem anderen Kegelschnitte vollkommen bestimmt, und die projektive Beziehung, welche so zwischen den beiden Kurven begründet wird, ist eben die, welche der ursprünglich gegebenen in der vorhin erörterten Weise zugeordnet ist.

Verbinden wir den Punkt, in dem eine Tangente des einen Kegelschnittes $\varkappa''$ die Linie x trifft, mit dem Punkte des anderen Kegelschnittes $\varkappa'$, der dem Berührungspunkte der Tangente entspricht, so schneidet diese Linie aufserdem den Punkt heraus, welcher diesem Berührungspunkte in der zugeordneten zweiten projektiven Verwandtschaft entspricht, und sie umhüllt, wenn die Tangente an dem ersten Kegelschnitte $\varkappa''$ entlang gleitet, selbst einen Kegelschnitt μ', der den zweiten der vorgelegten Kegelschnitte, $\varkappa'$, doppelt berührt. Denkt man sich den ersten Kegelschnitt, als Kurve $\varkappa$, wieder senkrecht gegen $\varkappa'$ gestellt, so schneidet der Tangentenkegel, welcher die zugehörige Kegelfläche längs $\varkappa$ berührt, also den Pol der Ebene dieser Kurve zur Spitze hat, die Ebene von $\varkappa'$ in dem Kegelschnitte μ'.

Wenn zwei Punkte P' und P'' auf einem Lote der x-Achse die Projektionen eines Punktes P unserer Regelfläche sind, so mufs es in der ursprünglichen projektiven Beziehung zwischen den Kegelschnitten $\varkappa'$ und $\varkappa''$ ein Paar entsprechender Punkte S' und S'' geben, so dafs $S'P'$ den Fufspunkt S_1'' des aus S'' auf die x-Achse gefällten Lotes, $S''P''$ den Fufspunkt S_1' des durch S' gehenden Lotes enthält.

Um nun die Tangentialebene der Fläche in dem durch P', P'' gegebenen Punkte P darzustellen, lege man durch den Schnittpunkt P_0 von $S'S''$ mit $P'P''$ an λ die zweite Tangente. (Die erste ist $S'S''$ selbst.) Seien T', T'' diejenigen Schnittpunkte dieser Tangente mit $\varkappa'$ und $\varkappa''$, die sich in der ursprünglichen Beziehung zwischen beiden Kurven entsprechen, so entsprechen sich die zweiten Schnittpunkte T_1', T_1'' in der zweiten projektiven Beziehung. Verbinden wir dann

die Punkte S' und T_1', die auf $\varkappa'$ liegen, und die Punkte S'', T_1'' auf $\varkappa''$, so schneiden sich diese beiden Linien notwendig auf der x-Achse und sind die Schnittlinien der gesuchten Tangentialebene mit Aufrifs- und Grundrifsebene.

Rücken S' und P' zusammen, so fällt auch T_1' in denselben Punkt, die Linie $S'T'$ wird zur Tangente in S', und die Linie $S''T''$ enthält dann die beiden dem Punkte S' entsprechenden Punkte von $\varkappa''$. In der That ist die Verbindungslinie dieser beiden Punkte die Linie, welche die Tangentialebene in S' mit der Aufrifsebene gemein hat.

Die Schnittpunkte einer beliebigen geraden Linie mit unserer Regelfläche lassen sich leicht konstruieren, und damit wird die ursprünglich gestellte Aufgabe in der allgemeinen Form gelöst, dafs die vier gegebenen geraden Linien ganz beliebige Lage gegen Grundrifs- und Aufrifsebene haben. Denn man braucht sich nur durch beliebige drei, a, b, c, der vier geraden Linien die Regelfläche gelegt zu denken, die Schnittpunkte der vierten Linie g mit dieser Fläche haben dann die Eigenschaft, dafs durch sie je eine gerade Linie geht, die alle vier gegebenen Linien trifft. Die Lösung, die wir zu Anfang für die besondere Lage der Linie g gegeben haben, hängt nun nicht davon ab, dafs Grundrifs- und Aufrifsebene zu einander senkrecht sind. Wir denken uns also jetzt durch g zwei Ebenen gelegt, von denen die eine, μ, senkrecht zur Aufrifsebene, die andere, ν, senkrecht zur Grundrifsebene ist. Sind M und N die Durchstofsungspunkte der Linie g mit Grundrifs- und Aufrifsebene, M_1, N_1 die Fufspunkte der aus ihnen auf die x-Achse gefällten Lote, so sind

MM_1 u. NM_1 die Schnittlinien der Ebene μ mit Grundrifs- u. Aufrifsebene,
MN_1 „ NN_1 „ „ „ „ ν „ „ „ „ .

Sind nun A und A' die Durchstofsungspunkte der Linie a mit Grundrifs- und Aufrifsebene, so verfährt man, um die Schnittpunkte dieser Linie mit μ und ν darzustellen, folgendermafsen. A_1 und A_1' seien die Fufspunkte der aus A und A' auf die x-Achse gefällten Lote,

$\mathfrak{M}_a''$ der Schnittpunkt von M_1N und $A'A_1$,
$\mathfrak{N}_a'$ „ „ „ MN_1 „ AA_1',

m und n die durch $\mathfrak{M}_a''$ und $\mathfrak{N}_a'$ gehenden Lote der x-Achse,

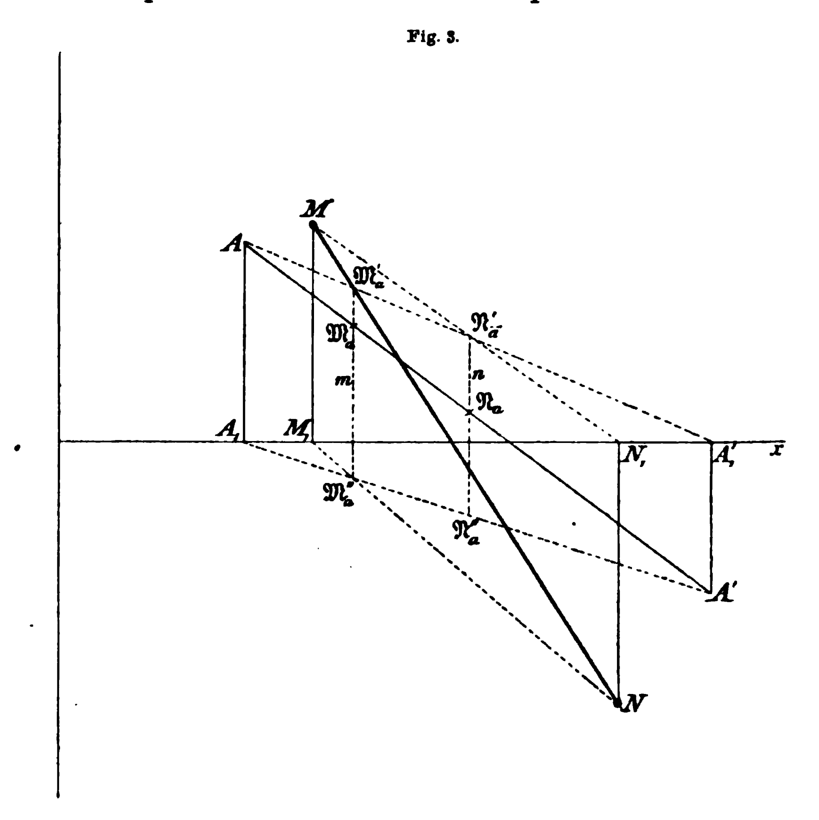
$\mathfrak{M}_a'$ der Schnittpunkt von m mit AA_1',
$\mathfrak{N}_a''$ „ „ „ n „ $A'A_1$,

dann sind $\mathfrak{M}_a'$, $\mathfrak{M}_a''$ und $\mathfrak{N}_a'$, $\mathfrak{N}_a''$ die Projektionen der Schnittpunkte von a mit μ und ν. (Fig. 3).

Operieren wir der Einfachheit halber mit der schiefsymmetrischen Projektion auf die Grundrifsebene, so sind zunächst die Schnittpunkte

$\mathfrak{M}_a$ und $\mathfrak{N}_a$ der Lote m und n mit AA' die schiefsymmetrischen Projektionen der gesuchten Schnittpunkte von a. Für die Linien b und c mögen wir entsprechend zwei Punktepaare $\mathfrak{M}_b$, $\mathfrak{N}_b$ und $\mathfrak{M}_c$, $\mathfrak{N}_c$ finden. Verbinden wir dann $\mathfrak{M}_b$ mit $\mathfrak{M}_c$ und $\mathfrak{N}_b$ mit $\mathfrak{N}_c$, so schneiden diese Linien die Gerade MN in zwei Punkten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, und auf analoge Weise finden wir noch zwei Punktepaare $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$. Diese drei Punktepaare sehen wir als Paare entsprechender Punkte in einer

Fig. 3.



projektiven Punktverwandtschaft auf MN an. Deren Doppelpunkte I und J, welche sich auf die bereits angegebene Art konstruieren lassen, sind die Projektionen der gesuchten Punkte, durch welche je eine alle vier Linien a, b, c, g schneidende Gerade geht. —

Nebenbei zeigt das Vorhergehende auch, wie die Aufgabe, in der Ebene zwei Punkte so zu finden, daſs ihre Verbindungslinien mit je drei gegebenen Punkten sich paarweise auf einer geraden Linie schneiden, auf zwei Kegelschnitte führt, die durch je drei der gegebenen Punkte gehen und projektiv so auf einander bezogen sind, daſs je ein Paar entsprechender Punkte der gestellten Bedingung

genügt. Zwei Schnittpunkte der Kegelschnitte entsprechen sich selbst.

Eine bedeutende Vereinfachung der zuletzt angestellten Betrachtungen tritt ein, wenn man zwei Symmetrieebenen der Regelfläche als Grundebenen wählt. Dann berühren sich die Kegelschnitte $\varkappa'$ und $\varkappa''$ in den Endpunkten einer Hauptachse. Sie sind durch die beiden Regelscharen der Regelfläche derart in doppelte projektive Beziehung gebracht, daſs die Punkte des einen Kegelschnittes, die demselben Punkte des anderen Kegelschnittes entsprechen, symmetrisch gegen die gemeinsame Hauptachse liegen, und dieselbe wird durch je zwei Lote, welche zwei Paare entsprechender Punkte von beiden Kegelschnitten enthalten, harmonisch geteilt. Hieraus ist ersichtlich, wie man die Kurve λ erhält, deren Tangenten entsprechende Punkte auf beiden Kegelschnitten verbinden. Auch dieser Kegelschnitt λ hat mit $\varkappa'$ und $\varkappa''$ dieselbe Hauptachse gemein.

Über das Konstruieren mit imaginären Punkten, Geraden und Ebenen.

Von Dr. JOSEF GRÜNWALD in Prag.

In einer im 45. Bande dieser Zeitschrift, S. 10—22 unter dem Titel: „Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen“ erschienenen Abhandlung hat der Verfasser sehr einfache Methoden für das Konstruieren mit imaginären Punkten, Geraden und Ebenen entwickelt.

Hier sollen nunmehr einige Fragen behandelt werden, welche mit der genannten Abhandlung im engsten Zusammenhange stehen, dort aber nur flüchtig gestreift werden konnten.

Vorerst möge aber eine kurze, zusammenfassende Übersicht der in der genannten Abhandlung gewonnenen wesentlichsten Resultate hier ihren Platz finden.

Es wurden nachstehende Gebilde in Betracht gezogen:

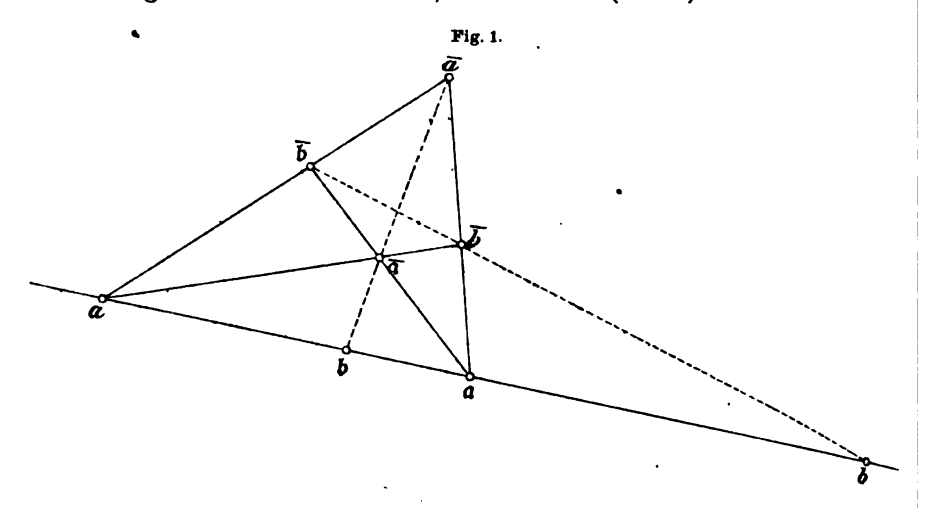
1. Der imaginäre Punkt.
2. Die imaginäre Gerade erster Art.
3. Die imaginäre Ebene.
4. Die imaginäre Gerade zweiter Art.

Was die unter 1., 2., 3. aufgezählten Gebilde anlangt, so wurde die harmonische Staudtsche Darstellung derselben zu Grunde gelegt,

d. i. die Darstellung durch einen harmonischen Wurf in dem jeweilig zugehörigen reellen Träger; also im Falle 1. durch einen harmonischen Wurf auf einer reellen Geraden, im Falle 2. durch einen harmonischen Wurf in einem reellen Strahlenbüschel, im Falle 3. durch einen harmonischen Wurf in einem reellen Ebenenbüschel.

Es erwies sich als zweckmäfsig, neben dieser Darstellung der Gebilde 1., 2., 3. noch eine neue, vom Verfasser als die „krumme" bezeichnete Darstellung einzuführen. Durch vier reelle Punkte $(\bar{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{b})$, in einer Ebene, in bestimmter Aufeinanderfolge gedacht, also durch ein mit Durchlaufungssinn begabtes Viereck, ist in einfachster Weise ein imaginärer Punkt bestimmt; das Viereck $(\bar{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\bar{\mathfrak{a}}\,b)$ heifst dann eine

Fig. 1.



krumme Darstellung dieses imaginären Punktes. (Vergl. die oben angeführte Abhandlung, Seite 15.)

Beistehende Figur mag in Erinnerung bringen, wie der Übergang von der krummen Darstellung $(\bar{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{a}\,\bar{b})$ eines imaginären Punktes zur harmonischen Staudtschen Darstellung $(a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b)$ dieses Punktes zu bewerkstelligen ist. (Die gezeichnete Figur entspricht ganz der Fig. 1 in der früheren Abhandlung, nur sind hier die Bezeichnungen anders gewählt.)

Durch vier Gerade: α) in einer reellen Ebene, oder β) durch vier Gerade in einem reellen Strahlenbündel ist in analoger Weise eine **imaginäre Gerade erster Art** bestimmt. Als „krumme" Darstellung einer imaginären Geraden erster Art ergiebt sich sonach ein mit Durchlaufungssinn begabtes α) **Vierseit**, oder β) **Vierkant**. —

Durch vier in bestimmter Aufeinanderfolge gedachte Ebenen eines Ebenenbündels ist in analoger Weise eine imaginäre Ebene bestimmt.

Als „krumme“ Darstellung einer imaginären Ebene ergiebt sich sonach ein mit Durchlaufungssinn begabtes Vierflach. —

Der Übergang von der krummen Darstellung $(\bar a \bar{\mathfrak b} \bar{\mathfrak a} \bar b)$ eines der oben unter 1., 2., 3. aufgezählten Gebilde zur harmonischen Staudtschen, welcher für den Fall eines imaginären Punktes durch unsere Figur erläutert wird, vollzieht sich stets nach folgendem leicht verständlichen Schema: Man konstruiere:

$$\begin{aligned} \bar a \bar{\mathfrak b} \cdot \bar{\mathfrak a} \bar b &= a \\ \bar a \bar b \cdot \bar{\mathfrak a} \bar{\mathfrak b} &= \mathfrak a \\ \bar a \mathfrak a \cdot a \mathfrak a &= \mathfrak b \\ \bar b \bar{\mathfrak b} \cdot a \mathfrak a &= b \end{aligned}$$

Dann ist $(a \mathfrak b \mathfrak a b)$ die gesuchte Staudtsche Darstellung. —

Was endlich die oben unter 4. aufgeführte imaginäre Gerade zweiter Art anlangt, so ist dieselbe stets dargestellt zu denken durch einen (mit bestimmtem Durchlaufungssinn begabten) Wurf von vier harmonischen Geraden einer hyperboloidischen Regelschar. (Vergl. die oben erwähnte Abhandlung, Seite 17, 18, . . .).

Es gelten dann folgende Sätze:

I. Irgend zwei von den unter 1., 2., 3. aufgezählten Gebilden, welche in Staudtscher Weise durch harmonische Würfe in ihren reellen Trägern gegeben sind, werden mit einander $\left\{\begin{matrix}\text{verbunden,}\\ \text{zum Schnitt}\end{matrix}\right.$ gebracht, indem man die homologen Glieder der beiden Würfe mit einander $\left\{\begin{matrix}\text{verbindet}\\ \text{zum Schnitte bringt.}\end{matrix}\right.$ Der so erhaltene Wurf giebt in „krummer“ Darstellung das gesuchte $\left\{\begin{matrix}\text{verbindende}\\ \text{Schnitt-}\end{matrix}\right\}$ Gebilde.

II. Das oben unter 4. aufgeführte Gebilde, die imaginäre Gerade zweiter Art wird mit $\left\{\begin{matrix}\text{einem}\\ \text{einer}\end{matrix}\right\}$ *reellen* $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Ebene}\end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix}\text{verbunden}\\ \text{geschnitten}\end{matrix}\right\}$, indem man die Glieder des die Gerade darstellenden Wurfes der Reihe nach mit $\left\{\begin{matrix}\text{dem betreffenden Punkte}\\ \text{der betreffenden Ebene}\end{matrix}\right.$ $\left\{\begin{matrix}\text{verbindet.}\\ \text{schneidet.}\end{matrix}\right.$

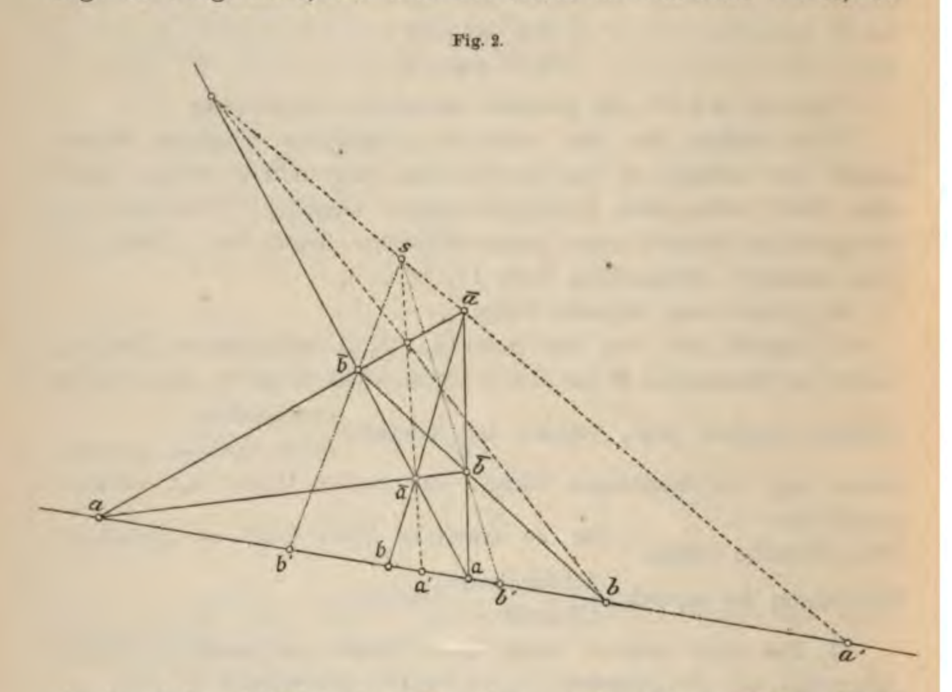
Die Aufgabe, eine imaginäre Gerade zweiter Art mit $\left\{\begin{matrix}\text{einem}\\ \text{einer}\end{matrix}\right.$ imaginären $\left\{\begin{matrix}\text{Punkte}\\ \text{Ebene}\end{matrix}\right\}$ zu $\left\{\begin{matrix}\text{verbinden,}\\ \text{schneiden,}\end{matrix}\right.$ mufs auf die eben behandelte einfachere Aufgabe zurückgeführt werden, wie dies auf Seite 21 und 22 in der eingangs genannten Abhandlung geschehen ist.

Damit sind denn alle Aufgaben, welche sich auf das Projizieren und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen beziehen, in

einfachster Weise und zwar linear gelöst. Als Regel ist festzuhalten, daſs beim Konstruieren mit imaginären Gebilden die Punkte, Geraden erster Art und Ebenen, welche durch die Konstruktion in krummer Darstellung sich ergeben, stets, bevor man weiter mit ihnen konstruiert, auf die harmonische Staudtsche Darstellungsform gebracht werden müssen.

§ 2. Man erhält nach dem entwickelten Verfahren jedes imaginäre Gebilde nur in e i n e r e i n z i g e n harmonischen Darstellung; und da liegt die Frage nahe, wie man aus einem harmonischen Wurfe, der

Fig. 2.



ein imaginäres Gebilde darstellt, einen anderen harmonischen Wurf, der dasselbe Gebilde darstellt, ableiten kann.

Es kann dies sehr einfach auf l i n e a r e Weise geschehen.

Sei $(a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b)$ die harmonische Darstellung eines imaginären Punktes auf der reellen Trägergeraden $a\,\mathfrak{a}$ (siehe Fig. 2).

Sei ferner a' ein beliebiger Punkt dieser Trägergeraden; und es werde jene harmonische Darstellung $(a'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{a}'\,b')$ des imaginären Punktes $(a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b)$ gesucht, welche vom Punkte a' ausgeht.

Folgende Konstruktion giebt die Lösung der gestellten Aufgabe:

Man konstruiere, wie in der Figur ersichtlich, irgend eine „krumme" Darstellung $(\bar{a}\,\bar{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{a}\,\bar{b})$ des imaginären Punktes $(a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b)$, und

konstruiere ferner einen Punkt s nach folgendem leicht verständlichen Schema[1]):

$$s = a'\bar{a} \cdot \bar{\mathfrak{b}}\mathfrak{a} \cdot b \cdot \bar{a}\bar{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a} \cdot \bar{\mathfrak{a}}a'.$$

Projiziert man aus dem so gefundenen Punkte s die vier Punkte $\bar{a}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{b}$ auf die reelle Trägergerade des Punktes $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$, so erhält man die gesuchte von a' ausgehende Darstellung $(a'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'b')$ dieses Punktes.

Beweis: Auf dem durch die Punkte $\bar{a}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{b}, s$ bestimmten Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ bilden nach unserer Konstruktion die Punkte: $\bar{a}, \bar{\mathfrak{b}}, \bar{\mathfrak{a}}, \bar{b}$ einen harmonischen Wurf. Projiziert man diesen harmonischen Wurf aus irgend welchen Punkten $s, s_1, s_2, \cdots$ des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, so erhält man harmonische Würfe von Strahlen, welche ebensoviel imaginäre Gerade $S, S_1, S_2, \cdots$ darstellen; und man erkennt, daſs irgend zwei von diesen Geraden sich eben in jenem imaginären Punkte durchschneiden, dessen krumme Darstellung lautet: $(\bar{a}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}}\bar{b})$. Die Gerade S, welche durch Projektion des Wurfes $(\bar{a}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}}\bar{b})$ aus s entsteht, enthält also den Punkt $(\bar{a}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}}\bar{b}) = (a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$, und schneidet also auf der reellen Trägergeraden dieses Punktes einen Wurf $(a'\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'b')$ aus, der denselben imaginären Punkt wie der Wurf $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ darstellt; was zu beweisen war.

Ganz analog wird bei imaginären Geraden erster Art und bei imaginären Ebenen der Übergang von einer harmonischen Darstellung zu einer anderen bewerkstelligt.

Es bleibt also noch die imaginäre Grade zweiter Art zu untersuchen.

§ 3. Gegeben sei eine imaginäre Gerade zweiter Art γ durch einen harmonischen Wurf $(a\mathfrak{b}\mathfrak{a}b)$ in einer hyperboloidischen Regelschar; a_1 sei ein beliebiger Punkt des Raumes.

Wir fragen zunächst nach einem solchen von a_1 ausgehenden Wurf $(a_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1b_1)$, welcher in harmonischer Staudtscher Weise einen auf γ liegenden Punkt darstellt.

Folgende überaus einfache Konstruktion giebt die Lösung der gestellten Aufgabe:

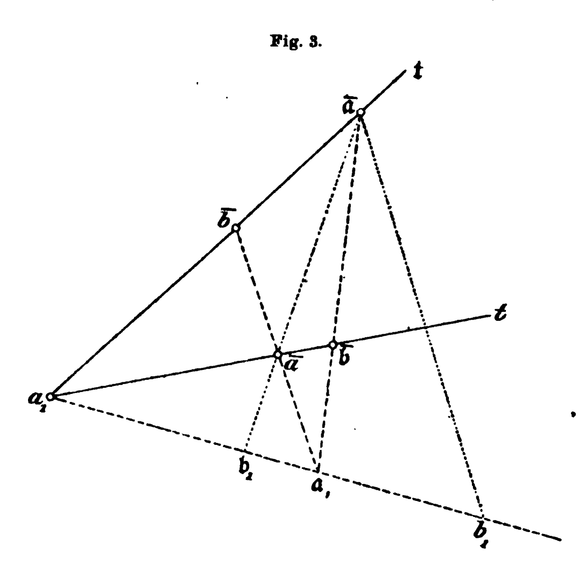
Man lege aus a_1 über a und $\mathfrak{b}$ eine Transversale t, welche die letztgenannten beiden Geraden in den Punkten $\bar{a}$ und $\bar{\mathfrak{b}}$ treffen möge; ferner ebenfalls aus a_1 über $\mathfrak{a}$ und b eine Transversale $\mathfrak{t}$, welche die letzteren Geraden beziehlich in $\bar{\mathfrak{a}}$ und $\bar{b}$ treffen möge. Das Viereck $(\bar{a}\bar{\mathfrak{b}}\bar{\mathfrak{a}}\bar{b})$ in der durch die Transversalen t und $\mathfrak{t}$ gelegten Ebene, welche in Figur 3 zur Zeichenebene gewählt wurde, ist dann die krumme

1) Daſs bei Ausführung dieser Konstruktion in Figur 2 die Geraden $s\bar{b}$, $\bar{a}\bar{\mathfrak{a}}$ und noch eine dritte Gerade in einem und demselben Punkte sich treffen, ist nicht etwa Zufall, sondern innere Notwendigkeit.

Darstellung eines auf der imaginären Geraden zweiter Art γ liegenden Punktes. Geht man von der krummen Darstellung dieses imaginären Punktes nach dem bekannten Schema zur harmonischen Staudtschen über, so erhält man einen harmonischen Wurf $(a_1\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{a}_1\, b_1)$, welcher vom Punkte a_1 ausgeht und einen auf γ liegenden imaginären Punkt darstellt; und damit ist die gestellte Aufgabe erledigt.

Wird nun verlangt, eine imaginäre Gerade zweiter Art γ, welche durch einen hyperboloidischen harmonischen Wurf $(a\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{a}\, b)$ gegeben ist, durch einen andern Wurf $(c\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, d)$ darzustellen, welcher von einer beliebig[1]) angenommenen Geraden $\mathfrak{c}$ ausgehen soll, so liegt es jetzt wohl auf der Hand, wie man den gewünschten Wurf $(c\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, d)$ findet. Man braucht nur auf der Geraden c zwei Punkte c_1 und c_2 willkürlich auszuwählen und jene beiden harmonischen Würfe $(c_1\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{c}_1\, d_1)$ und $(c_2\, \mathfrak{b}_2\, \mathfrak{c}_2\, d_2)$ herzustellen, welche von c_1 beziehentlich c_2 ausgehen, und in Staudtscher Weise je einen auf γ liegenden imaginären Punkt darstellen. Die Geraden c, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, d des gesuchten Wurfes $(c\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}\, d)$ sind dann bestimmt als die Verbindungsgeraden $c_1\, c_2$, $\mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1\, \mathfrak{c}_2$, $d_1\, d_2$ der homologen Punkte jener beiden Würfe.

Fig. 3.



Noch eine andere schöne Anwendung kann man von der oben (in Fig. 3) ausgeführten Konstruktion machen; eine Anwendung nämlich auf die Lehre von der sogenannten windschiefen Involution. (Vergl. etwa: die „Liniengeometrie“ von Sturm, Bd. I, Seite 115, 116). Eine solche involutorische Kollineation des Raumes in sich besitzt stets zwei reelle oder konjugiert imaginäre „Leitlinien“ deren Punkte sich selbst entsprechen. Sind diese Leitlinien reell, so findet man zu irgend einem Punkte a_1 des Raumes den ihm in der Involution entsprechenden $\mathfrak{a}_1$, indem man aus a_1 über die beiden Leitlinien die

1) Beliebig mit der Einschränkung, dafs c dem Strahlensysteme der zu γ gehörigen reellen Trägergeraden nicht angehören darf.

Transversale legt und denjenigen Punkt der Transversalen aufsucht, welcher von a_1 durch die beiden Leitlinien harmonisch getrennt wird.

Sind die Leitlinien konjugiert imaginäre Gerade zweiter Art, so hat man genau die entsprechende Konstruktion mit diesen imaginären Leitlinien, welche durch hyperboloidische harmonische Würfe: $\gamma : (a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b)$ und $\gamma' : (a\,b\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ gegeben zu denken sind, auszuführen. Man findet so, daſs dem Punkte a_1 in Fig. 3 in der betrachteten windschiefen Involution gerade der Punkt $\mathfrak{a}_1$ entspricht; und hat demnach folgende einfache Konstruktion:

„Um zu irgend einem Punkte a_1 des Raumes den entsprechenden Punkt $\mathfrak{a}_1$ in jener windschiefen Involution, welche durch die imaginären Leitlinien $\gamma : (a\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}\,b)$ und $\gamma' : (a\,b\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$ bestimmt ist, zu finden,

lege man aus a_1 über die Geraden $a, \mathfrak{b}$ die Transversale t, welche die genannten Geraden in den Punkten $\bar{a}, \bar{\mathfrak{b}}$ treffen möge; desgleichen über die Geraden $\mathfrak{a}, b$ die Transversale $\mathfrak{t}$, welche die letztgenannten Geraden in den Punkten $\bar{\mathfrak{a}}, \bar{b}$ treffen möge: Der Schnittpunkt der Geraden $\bar{a}\,\bar{b}$ und $\bar{\mathfrak{a}}\,\bar{\mathfrak{b}}$ ist dann der gesuchte Punkt $\mathfrak{a}_1$."

Wie man sieht, kann man nach den entwickelten Methoden mit windschiefen Involutionen, welche keine reellen Leitlinien besitzen, geradeso einfach operieren wie mit solchen, die reelle Leitlinien haben; die Konstruktionen sind bei den erstgenannten Involutionen durchaus nicht umständlicher als bei den letztgenannten.

Es liegt auf der Hand, daſs die eben angestellten Betrachtungen nach dem Prinzipe der Dualität umgekehrt werden können, so daſs überall, wo von Punkten die Rede war, Ebenen an die Stelle treten; doch wäre es wohl überflüssig, dies hier näher auszuführen. —

Soviel dürfte aus dem Voranstehenden klar hervorgehen, daſs die vom Verfasser vorgeschlagene Behandlung der imaginären Elemente geeignet erscheint, das Konstruieren mit denselben möglichst einfach und bequem zu gestalten, und damit eine ausgedehntere praktische Verwendung derselben beim Lösen geometrischer Aufgaben anzubahnen; über den hohen theoretischen Wert der imaginären Elemente in der Geometrie besteht ja seit den glänzenden Arbeiten von v. Staudt kein Zweifel mehr.[1])

---

1) Herr A. Adler hat uns ebenfalls Lösungen der oben behandelten Aufgaben übersandt, was wir auf seinen Wunsch hier bemerken. Die Schriftleitung.

Die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente.

Von R. Müller in Braunschweig.

1. Wenn ein Gelenkviereck durch Feststellung eines Gliedes in einen Kurbelmechanismus verwandelt wird, so existiert bekanntlich für jede Lage der Koppelebene — wie überhaupt für jede Lage eines komplan bewegten starren ebenen Systems — ein bestimmter und leicht konstruierbarer Punkt, der augenblicklich eine Bahnstelle mit vierpunktig berührender Tangente durchschreitet — der Ballsche Punkt der betrachteten Koppellage, und es giebt immer einzelne Koppellagen, für welche diesem Punkte eine fünfpunktig berührende Tangente zukommt. In einem früheren Aufsatze[1]) habe ich u. a. die Bedingungen abgeleitet, denen das Viereck genügen mufs, wenn ein Punkt der Koppelebene, bezw. ein Punkt der Koppelgeraden, eine Bahnkurve mit sechspunktig berührender Tangente beschreiben soll — eine Frage, die mit dem Problem der angenäherten Geradführung innig zusammenhängt.[2]) Die so definierten speziellen Koppelkurven und die zugehörigen Kurbelmechanismen sollen im Folgenden noch etwas eingehender untersucht werden.

Um uns kürzer ausdrücken zu können, wollen wir jede Koppelkurve, die eine sechspunktig berührende Tangente besitzt, als gestreckt bezeichnen. Wird eine solche Kurve von einem Punkte der Koppelgeraden beschrieben, so ist sie symmetrisch in Bezug auf das feste Glied des Vierecks und hat demnach zwei sechspunktig berührende Tangenten; wir nennen sie deshalb doppelt gestreckt, im Gegensatze zur einfach gestreckten Koppelkurve, die von einem aufserhalb der Koppelgeraden liegenden Punkte erzeugt wird. Wenn ferner ein Kurbelmechanismus die Eigenschaft hat, dafs ein Punkt der Kurbelebene eine gestreckte Koppelkurve beschreibt, so möge unter Haupt-

1) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschrift Bd. 42, 1897, S. 260.

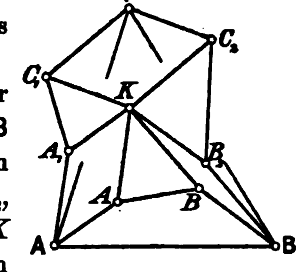
2) Vergl. Über die angenäherte Geradführung mit Hilfe eines ebenen Gelenkvierecks, diese Zeitschrift, Bd. 43, 1898, S. 36.

lage diejenige Lage der drei beweglichen Glieder verstanden werden, bei welcher der betreffende Punkt sich gerade in der ausgezeichneten Bahnstelle befindet.

2. Um den Gang der Untersuchung später nicht durch Zwischenbetrachtungen unterbrechen zu müssen, schicken wir zunächst einige Bemerkungen voraus, die an bekannte Sätze unmittelbar anknüpfen.

I. Wenn bei einem Gelenkviereck die Summe des kleinsten und gröfsten Gliedes gröfser ist als die Summe der beiden anderen Glieder, so entsteht durch Feststellung irgend eines der vier Glieder unter allen Umständen ein Doppelschwingmechanismus[1]), und dann beschreibt jeder Punkt der Koppelebene — wie aus der Ableitung dieses Satzes ohne weiteres hervorgeht — eine einteilige Koppelkurve. Ein solcher Mechanismus möge im Folgenden als Doppelschwingmechanismus erster Art bezeichnet werden. — Einteilige Koppelkurven — aber mit vier, statt mit drei Doppelpunkten — erhalten wir auch im Falle eines durchschlagenden Kurbelmechanismus, wenn also die Summe des kleinsten und gröfsten Gliedes gleich ist der Summe der beiden anderen Glieder. Ist dagegen die erste Summe kleiner als die zweite, so sind die zugehörigen Koppelkurven unbedingt zweiteilig, und zwar ergiebt sich durch Feststellung des kürzesten Gliedes ein Doppelkurbelmechanismus, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder ein Schwingkurbelmechanismus, endlich durch Feststellung des dem kürzesten gegenüberliegenden Gliedes ein Doppelschwingmechanismus, den wir zur Unterscheidung von dem anfangs erwähnten einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art nennen wollen.

Fig. 1.



II. In Fig. 1 ist $\mathsf{AB}BA$ ein beliebiger Kurbelmechanismus mit dem festen Gliede AB und dem Koppeldreieck ABK. Konstruieren wir die Parallelogramme $\mathsf{A}AKA_1$ und $\mathsf{B}BKB_2$, machen $\triangle A_1KC_1$ und $\triangle KB_2C_2 \sim \triangle ABK$ und zeichnen schliefslich das Parallelogramm $C_1KC_2\Gamma$, so können wir die Koppelkurve, die der Punkt K in Verbindung mit dem gegebenen Mechanismus beschreibt, bekanntlich auch erzeugen, indem wir denselben Punkt K bezw. an die Koppeln A_1C_1 und B_2C_2 der als Kurbelmechanismen aufgefafsten Vierecke $\Gamma\mathsf{A}A_1C_1$ und

1) Grashof, Theoretische Maschinenlehre Bd. II, 1883, S. 117, vergl. auch Burmester, Kinematik I, S. 287.

$\mathsf{\Gamma B} B_2 C_2$ anschließen.[1]) Dann ist auch $\triangle \mathsf{AB\Gamma} \sim \triangle ABK$, mithin verhält sich.

$$\mathsf{AB} : \mathsf{A\Gamma} : \mathsf{B\Gamma} = AB : AK : BK = A_1K : A_1C_1 : KC_1 = KB_2 : KC_2 : B_2C_2.$$

oder

$$\mathsf{AB} : \mathsf{A\Gamma} : \mathsf{B\Gamma} = AB : \mathsf{A}A_1 : \mathsf{B}B_2 = \mathsf{A}A \;\; : A_1C_1 : C_2\mathsf{\Gamma} \;= B\mathsf{B} \;\; : C_1\mathsf{\Gamma} : B_2C_2.$$

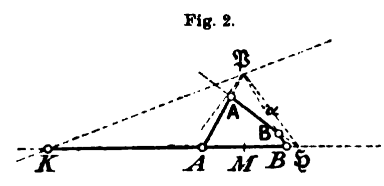
Ist also in dem ursprünglichen Mechanismus die Summe des kleinsten und größten Gliedes kleiner als die Summe der beiden anderen Glieder, und ist das kleinste Glied fest, so gilt dasselbe von den beiden abgeleiteten Mechanismen; ist dagegen die Koppel AB das kleinste Glied, so haben die beiden anderen Mechanismen zu kleinsten Gliedern bezw. die Arme $\mathsf{A}A_1$ und $\mathsf{B}B_2$. Hieraus folgt mit Rücksicht auf I: Eine zweiteilige Koppelkurve wird entweder von drei Doppelkurbelmechanismen erzeugt, oder von einem Doppelschwingmechanismus zweiter Art und von zwei Schwingkurbelmechanismen. — Andererseits gehören zu jeder einteiligen Koppelkurve entweder drei Doppelschwingmechanismen erster Art, oder drei durchschlagende Kurbelmechanismen.

III. Besteht zwischen den Gliedern des ursprünglich betrachteten Kurbelmechanismus $\mathsf{AB}BA$ und den Gliedern eines anderen Kurbelmechanimus $\mathsf{A'B'}B'A'$ die Beziehung

$$\mathsf{AB} : \mathsf{A'B'} = AB : \mathsf{B'}B' = \mathsf{A}A : A'B' = \mathsf{B}B : \mathsf{A'}A';$$

und bestimmen wir in der zu $A'B'$ gehörigen Koppelebene den Punkt K' in der Weise, daß $\triangle ABK \sim \triangle B'K'A'$ wird, so beschreiben die Punkte K und K' ähnliche Koppelkurven; denn der Mechanismus $\mathsf{A'B'}B'A'$ geht aus dem in Fig. 1 dargestellten Mechanismus $\mathsf{\Gamma A}A_1C_1$ hervor, wenn wir alle Glieder in konstantem Verhältnis verändern.[2])

Fig. 2.



3. Die doppelt gestreckte Koppelkurve. Um einen Kurbelmechanismus zu konstruieren, der eine doppelt gestreckte Koppelkurve erzeugt, verfahren wir auf Grund früherer Darlegungen[3]) in folgender Weise (Fig. 2): Wir zeichnen über der beliebig gewählten Koppelstrecke AB das gleichseitige Dreieck $AB\mathfrak{P}$, verbinden $\mathfrak{P}$ mit einem beliebigen

1) Roberts, Three-bar Motion in Plane Space, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. VII, p. 14, vergl. auch Burmester, Kinematik I, S. 296.

2) In etwas anderer Form als principe de l'échange de bielle et manivelle bei Koenigs, leçons de cinématique p. 266.

3) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks a. a. O. S. 261.

Punkte $\mathfrak{H}$ von AB und tragen in $\mathfrak{H}$ das Dreifache des Winkels $B\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ nach derselben Seite an $\mathfrak{H}\mathfrak{P}$ an; die so erhaltene Gerade schneide $A\mathfrak{P}$ und $B\mathfrak{P}$ bezw. in A und B. Wir fällen ferner von $\mathfrak{P}$ auf AB ein Lot, tragen den Winkel, den das Lot mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ bildet, in $\mathfrak{P}$ nach der entgegengesetzten Seite an $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ an und bestimmen den Schnittpunkt K der so gefundenen Geraden mit AB. Dann wird durch das Viereck $\mathsf{AB}BA$ ein Kurbelmechanismus dargestellt, bei welchem der Punkt K eine doppelt gestreckte Koppelkurve beschreibt, und zwar ist die eine der beiden sechspunktig berührenden Tangenten das Lot in K zu $\mathfrak{P}K$; die gezeichnete Lage der drei beweglichen Glieder ist also eine Hauptlage.

Da bei unserer Konstruktion der Punkt $\mathfrak{H}$ auf der Geraden AB beliebig angenommen wurde, so gehören zur Koppelstrecke AB ∞^1 Kurbelmechanismen, die eine doppelt gestreckte Koppelkurve liefern. Nun entsprechen aber zwei Punkten $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}^*$, die in Bezug auf den Mittelpunkt M von AB symmetrisch liegen, identische Gelenkvierecke; wir erhalten also die Gesamtheit der in Frage kommenden Vierecke und folglich — von Ähnlichkeitstransformationen abgesehen — die sämtlichen überhaupt möglichen doppelt gestreckten Koppelkurven, indem wir den Punkt $\mathfrak{H}$ auf der Geraden AB von M aus über B bis ins Unendliche wandern lassen. Wie bereits aus dem Satze von der dreifachen Erzeugung der Koppelkurve (2, II) unmittelbar hervorgeht, werden immer je drei der so entstehenden Kurbelmechanismen ähnliche Koppelkurven beschreiben.

Setzen wir $\mathsf{A}A = a$, $\mathsf{B}B = b$, $AB = c$, $\mathsf{AB} = d$, $\angle B\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \alpha$, $\frac{AK}{BK} = \mu$, so finden wir aus Fig. 2

$$a = c\frac{\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - 4\alpha)}{\sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + 4\alpha)}, \quad b = c\frac{\sin\alpha\sin(60^\circ - 4\alpha)}{\sin(60^\circ - \alpha)\sin 4\alpha},$$

$$d = c\frac{\sin^2 60^\circ \sin 3\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)\sin 4\alpha \sin(60^\circ + 4\alpha)}, \quad \mu = \frac{\sin(30^\circ + 2\alpha)}{\cos 2\alpha}. \qquad (1)$$

$$(-30^\circ \leqq \alpha \leqq 60^\circ)$$

Dabei liefert die erste Gleichung für a einen positiven Wert, wenn in Fig. 2 die Strecken $A\mathfrak{P}$ und $A\mathsf{A}$ gleichen Sinnes sind, und das Analoge gilt für b; d ist positiv oder negativ, je nachdem a und b dasselbe oder entgegengesetztes Vorzeichen haben. Bezeichnen wir noch mit ν das Teilungsverhältnis des Punktes $\mathfrak{H}$ in Bezug auf die Grundstrecke AB, setzen also

$$\nu = \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\sin\alpha},$$

so folgt

$$\cot\alpha = \frac{2\nu - 1}{\sqrt{3}},$$

und die Gleichungen (1) gehen über in

$$a = c\frac{(\nu+1)(\nu^2-4\nu+1)}{(\nu-2)(\nu^2+2\nu-2)},\quad b = c\frac{(\nu+1)(\nu^2-4\nu+1)}{(2\nu-1)(2\nu^2-2\nu-1)},$$
$$d = 3c\frac{(\nu^2-\nu+1)^2}{(\nu-2)(2\nu-1)(\nu^2+2\nu-2)(2\nu^2-2\nu-1)},\quad \mu = \frac{\nu^2+2\nu-2}{2\nu^2-2\nu-1}. \tag{2}$$

Hier durchläuft ν alle Werte zwischen -1 und $-\infty$, sowie zwischen $+\infty$ und $+1$. Ersetzen wir jetzt ν durch $\nu' = \frac{1}{1-\nu}$, darauf durch $\nu'' = \frac{\nu}{\nu-1}$, d. h. α durch $\alpha' = \alpha - 60^0$ und durch $\alpha'' = 60^0 - \alpha$, so erhalten wir zwei neue Kurbelmechanismen A'B'BA und A''B''BA mit den Koppelpunkten K' und K''. Dann treten an Stelle von a, b, d, μ die Werte

$$a' = c\frac{(\nu-2)(\nu^2+2\nu-2)}{(2\nu-1)(2\nu^2-2\nu-1)},\quad b' = c\frac{(\nu-2)(\nu^2+2\nu-2)}{(\nu+1)(\nu^2-4\nu+1)},$$
$$d' = 3c\frac{(\nu^2-\nu+1)^2}{(\nu+1)(2\nu-1)(2\nu^2-2\nu-1)(\nu^2-4\nu+1)},$$
$$\mu' = \frac{2\nu^2-2\nu-1}{\nu^2-4\nu+1} = \frac{1}{1-\mu}.$$

und

$$a'' = c\frac{(2\nu-1)(2\nu^2-2\nu-1)}{(\nu-2)(\nu^2+2\nu-2)},\quad b'' = c\frac{(2\nu-1)(2\nu^2-2\nu-1)}{(\nu+1)(\nu^2-4\nu+1)},$$
$$d'' = 3c\frac{(\nu^2-\nu+1)^2}{(\nu+1)(\nu-2)(\nu^2+2\nu-2)(\nu^2-4\nu+1)},$$
$$\mu'' = -\frac{\nu^2+2\nu-2}{\nu^2-4\nu+1} = \frac{\mu}{\mu-1}.$$

Es ist also

$$\frac{d}{d'} = \frac{c}{b'} = \frac{a}{c} = \frac{b}{a'}$$

und

$$\frac{AK'}{BK'} = \frac{KB}{AB},\quad \text{d. h. } ABK \sim BK'A,$$

sowie ferner

$$\frac{d}{d''} = \frac{c}{b''} = \frac{a}{a''} = \frac{b}{c}$$

und

$$\frac{AK''}{BK''} = \frac{AK}{AB},\quad \text{d. h. } ABK \sim K''BA.$$

Die doppelt gestreckten Koppelkurven, welche die drei Punkte K, K', K'' in Verbindung mit den Kurbelmechanismen ABBA, A'B'BA, A''B''BA beschreiben, sind demnach einander ähnlich (2, III).

Geben wir nun in Fig. 2 dem Winkel α alle Werte zwischen 30^0 und 60^0, also dem Teilungsverhältnis ν des Punktes $\mathfrak{H}$ alle Werte zwischen 2 und 1, so ist gleichzeitig

$$-1 \gtreqless \nu' \geqq -\infty \quad \text{und} \quad 2 \lesseqgtr \nu'' \leqq +\infty,$$

d. h.

$$-30^0 \overline{\gtrless} \alpha' \leqq 0 \quad \text{und } 30^0 \overline{\gtrless} \alpha'' \leqq 0.$$

Durch die Winkel α, α', α'' wird demnach das ganze Intervall von -30^0 bis 60^0 gerade einmal vollständig ausgefüllt; mit anderen Worten: Wir erhalten in Fig. 2 die Gesamtheit aller doppelt gestreckten Koppelkurven, wenn wir den Winkel α von 30^0 bis 60^0 wachsen lassen.

4. Wir untersuchen zunächst die zugehörigen Kurbelmechanismen, indem wir auf die Gliedlängen a, b, c, d, die durch die Gleichungen (2) mit einander verknüpft sind, die Kriterien des Grashofschen Satzes (2, I) anwenden, immer unter der Voraussetzung $2 \overline{\gtrless} \nu \geqq 1$ $(30^0 \overline{\lessgtr} \alpha \leqq 60^0)$.

Beginnen wir mit dem Werte $\nu = 2 (\alpha = 30^0)$, so finden wir aus den Gleichungen (2) $a = -d = \infty$, $b = -c$, $\mu = 2(AK = 2 \cdot AB)$, und wir erhalten den in Fig. 3 dargestellten gleichschenkligen Schubkurbelmechanismus. Ferner ergiebt sich für $\nu = \frac{1+\sqrt{3}}{2} (\alpha = 45^0)$: $a = c(2+\sqrt{3}) = c \tan 75^0$, $b = d = \infty$, $\mu = \infty (K \equiv B)$, also wiederum ein Schubkurbelmechanismus (Fig. 5). Schließen wir diese beiden Ausnahmefälle, in denen der Punkt K überhaupt keine eigentliche Koppelkurve beschreibt, von der Betrachtung aus, so finden wir immer endliche und von Null verschiedene Werte für a, b, d, insbesondere wird für $\nu = 1 (\alpha = 60^0)$: $a = b = 4c$, $d = 3c$, $\mu = -1 (K \equiv M$, Fig. 7).

Setzen wir $\nu = 1 + \zeta$, wo ζ einen positiven echten Bruch bedeutet, so gehen die Gleichungen (2) über in

$$a = c \frac{(2+\zeta)(2+2\zeta-\zeta^2)}{(1-\zeta)(1+4\zeta+\zeta^2)}, \quad b = c \frac{(2+\zeta)(2+2\zeta-\zeta^2)}{(1+2\zeta)(1-2\zeta-2\zeta^2)},$$
$$d = 3c \frac{(1+\zeta+\zeta^2)^3}{(1-\zeta)(1+2\zeta)(1+4\zeta+\zeta^2)(1-2\zeta-2\zeta^2)}.$$

In dem ganzen betrachteten Intervall ist also a positiv und $> c$. — Die Werte für b und d sind negativ, so lange $1 - 2\zeta - 2\zeta^2 < 0$ ist, d. h. für $1 > \zeta > \frac{\sqrt{3}-1}{2} (30^0 < \alpha < 45^0)$, und sie sind positiv für $1 - 2\zeta - 2\zeta^2 > 0$, d. h. für den Rest des Intervalls $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} > \zeta > 0,\right.$ $\left.45^0 < \alpha < 60^0\right)$. Im ersten Falle ist $|b| > c$, weil $2 + 2\zeta - \zeta^2 > 2\zeta^2 + 2\zeta - 1$, d. h. $1 > \zeta^2$ ist; im zweiten zeigt sich sofort, daſs $b > c$ ist. Schreiben wir den Ausdruck für d in der Form

$$d = c \cdot \frac{1+\zeta+\zeta^2}{1+\zeta-2\zeta^2} \cdot \frac{3+3\zeta+3\zeta^2}{1+4\zeta+\zeta^2} \cdot \frac{1+\zeta+\zeta^2}{1-2\zeta-2\zeta^2},$$

so ergiebt sich im ersten Falle $|d| > c$ wegen $1 + \zeta + \zeta^2 > 2\zeta^2 + 2\zeta - 1$,

und im zweiten $d > c$. Die Koppelstrecke c ist also im ganzen Intervall das kleinste Glied.

Bilden wir ferner den Ausdruck

$$\frac{b}{d} - 1 = \frac{(1 - 2\zeta - 2\zeta^2)(1 + 11\zeta + 12\zeta^2 + 2\zeta^3 + \zeta^4)}{3(1 + \zeta + \zeta^2)^3},$$

so sehen wir sofort, dafs im ersten Falle $|b| < |d|$, im zweiten $b > d$ ist. Im ersten Falle ist aber auch $a < |d|$, denn der Ausdruck

$$\frac{d + a}{d} = \frac{(1 - \zeta)^2 (7 + 29\zeta + 45\zeta^2 + 29\zeta^3 + 7\zeta^4)}{3(1 + \zeta + \zeta^2)^3}$$

ist in diesem Falle $= \frac{|d| - a}{|d|}$, also $|d| - a > 0$. Im zweiten Falle ist endlich $b > a$, weil dann der Ausdruck

$$\frac{b}{a} = \frac{1 + 4\zeta + \zeta^2}{1 + 2\zeta} \cdot \frac{1 - \zeta}{1 - 2\zeta - 2\zeta^2}$$

positiv und > 1 ist. Mit anderen Worten, das gröfste Glied ist d oder b, je nachdem α zwischen 30° und 45°, oder zwischen 45° und 60° liegt.

Nun ist aber der Ausdruck

$$a + d - b - c = c\,\frac{(1 + \zeta)(2 + 2\zeta - \zeta^2)}{(1 + 2\zeta)(1 + 4\zeta + \zeta^2)}$$

im ganzen Intervall positiv. Hieraus folgt zunächst, dafs im zweiten Falle, wo b und d positiv sind, $c + b < a + d$ ist. Im ersten Falle ist aber jener Ausdruck $= a - |d| + |b| - c$, also $c + |d| < a + |b|$. Es ist folglich unter allen Umständen die Summe des kleinsten und gröfsten Gliedes kleiner als die Summe der beiden anderen Glieder, und das feste Glied liegt dem kleinsten gegenüber; d. h., so lange der Winkel α zwischen 30° und 60° liegt, erhalten wir stets einen Doppelschwingmechanismus zweiter Art.

Einem jeden dieser Mechanismen sind nach dem Vorigen, entsprechend den Werten $\alpha' = \alpha - 60^0$ und $\alpha'' = 60^0 - \alpha$, zwei andere zugeordnet, welche dieselbe Koppelkurve erzeugen. Dann folgt aus der unter 2, II gemachten Bemerkung, dafs die beiden zugeordneten Mechanismen jedenfalls Schwingkurbelmechanismen sind.

Wir gelangen daher zu dem Satz: J e d e d o p p e l t g e s t r e c k t e K o p p e l k u r v e w i r d v o n e i n e m D o p p e l s c h w i n g m e c h a n i s m u s z w e i t e r A r t u n d v o n z w e i S c h w i n g k u r b e l m e c h a n i s m e n e r z e u g t.

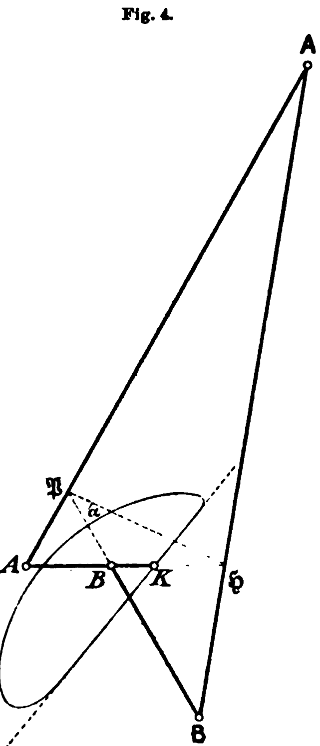
5. Nunmehr gewinnen wir auch ein klares Bild von der Gestalt der doppelt gestreckten Koppelkurve. Die Kurve ist immer zweiteilig. (2, I)

Erzeugen wir sie wie vorhin durch die Reihe der Doppelschwingmechanismen, die zu einer willkürlich gewählten Koppelstrecke $AB = c$ gehören, und beginnen wieder mit dem in Fig. 3 dargestellten gleichschenkligen Schubkurbelmechanismus ($\alpha = 30^0$), so zerfällt unsere Kurve zunächst in den Kreis um B mit dem Radius $2c$, den der Punkt K beschreibt, wenn die Glieder BB und AK vereinigt um B rotieren, und in seinen doppelt zählenden Durchmesser auf der Geraden AB. (Da die doppelt gestreckte Koppelkurve in Bezug auf das feste Glied symmetrisch ist, haben wir sie in Fig. 3 bis 7 immer nur zur Hälfte gezeichnet.)

Fig. 3.

Liegt α zwischen 30^0 und 45^0, also der Punkt K noch aufserhalb der Strecke AB, so verwandelt sich die aus dem Halbkreis und seinem Durchmesser zusammengesetzte Kurve in ein Oval, welches die Gerade AB niemals schneidet, und welches auf der AB zugewendeten Seite nahezu geradlinig erscheint. (Fig. 4) Mit wachsendem α wird das Oval immer flacher, bis es für $\alpha = 45^0$ in eine doppelt zählende Strecke von der Länge $c(1+\sqrt{3})$ zusammenschrumpft, die der mit B zusammenfallende Punkt K auf einer zu AB senkrechten Geraden durchschreitet. (Fig. 5.) Ist $\alpha > 45^0$, so liegt K zwischen A und B, und das Oval erweitert sich von Neuem (Fig. 6), bis es für $\alpha = 60^0$ symmetrisch wird in Bezug auf die Mittelsenkrechte der Strecke AB. (Fig. 7.)

Fig. 4.



Die sechspunktig berührende Tangente schneidet das feste Glied zwischen A und B, oder in seiner Verlängerung, je nachdem der Punkt K aufserhalb oder innerhalb AB liegt.

Beiläufig sei noch erwähnt, dafs die drei Doppelpunkte, die bekanntlich jeder Koppelkurve zukommen, im vorliegenden Falle stets

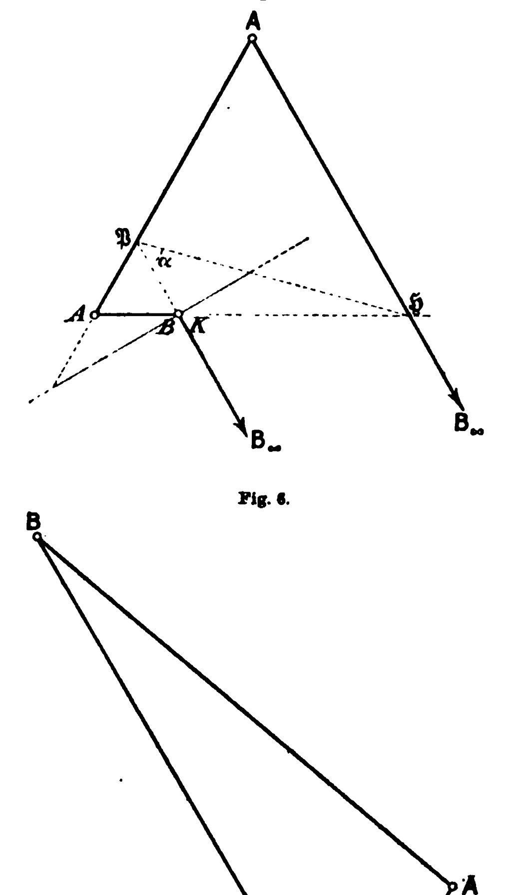


Fig. 5.

Fig. 6.

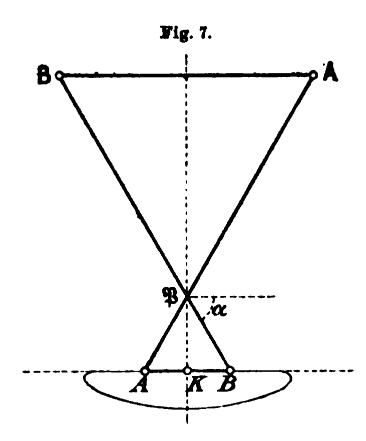
reell sind. Sie liegen naturgemäfs auf der Geraden AB und sind sämtlich isolierte Punkte.

6. **Die einfach gestreckte Koppelkurve.** Der soeben für die doppelt gestreckte Kurve bewiesene Satz, wonach diese unter allen Umständen zweiteilig ist und von einem Doppelschwingmechanismus zweiter Art, sowie von zwei Schwingkurbelmechanismen erzeugt wird, gilt nicht mehr in dem allgemeineren Falle der einfach gestreckten Koppelkurve. Wir überzeugen uns hiervon am leichtesten durch Betrachtung eines Sonderfalls. In einem früheren Aufsatze[1]) ergab sich für die Konstruktion eines gleicharmigen Kurbelmechanismus, bei welchem ein Punkt der Koppelebene eine einfach gestreckte Koppelkurve beschreibt, die folgende Regel: (Fig. 8) Man zeichne über der beliebig gewählten Koppelstrecke AB irgend ein gleichschenkliges Dreieck $AB\mathfrak{P}$ mit der Basis AB, verlängere $A\mathfrak{P}$ über $\mathfrak{P}$ um sich selbst bis $\mathfrak{Q}$, errichte in $\mathfrak{Q}$ zu $\mathfrak{Q}A$ ein Lot, welches $\mathfrak{P}A$ in $\mathfrak{R}$ schneidet, und mache auf $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ die Strecken $\mathfrak{P}$A und $\mathfrak{P}$B $= B\mathfrak{R}$. Zieht man noch $\mathfrak{P}\mathfrak{S} \perp \mathfrak{P}$B und B$\mathfrak{S} \perp$ AB, so trifft $\mathfrak{S}B$ das Lot von $\mathfrak{P}$ auf AB in K. Dann ist ABBA der gesuchte Mechanismus in seiner

1) Konstruktion der Burmesterschen Punkte für ein ebenes Gelenkviereck, zweite Mitteilung, diese Zeitschrift Bd. 38, 1893, S. 140 (Fig. 7).

Hauptlage, und der Punkt K beschreibt eine einfach gestreckte Koppelkurve, die in Bezug auf $\mathfrak{P}K$ symmetrisch ist.

Fig. 7.



Setzen wir $A\mathsf{A} = B\mathsf{B} = a$, $AB = c$, $\mathsf{AB} = d$, $\angle BA\mathfrak{P} = \varphi$, $\cos\varphi = \frac{1}{\lambda}$ und rechnen die Strecke $A\mathsf{A}$ positiv in der Richtung von $\mathfrak{P}$ nach A, so folgt aus der eben gezeichneten Figur

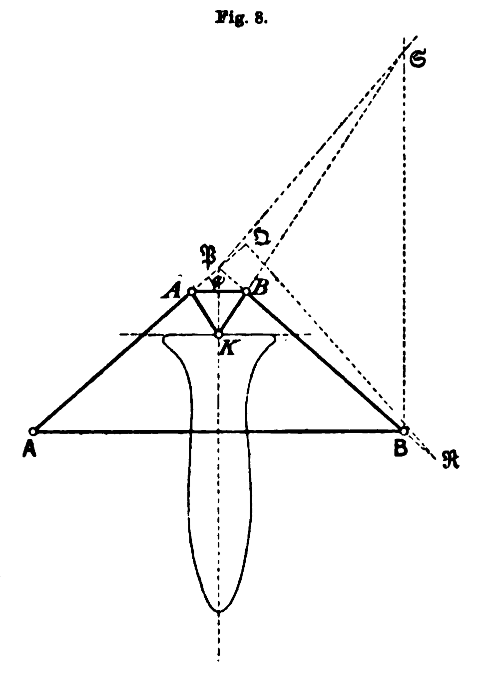
$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{c\cos 3\varphi}{2\cos^2\varphi\cos 2\varphi} = c\cdot\frac{2(2-\lambda^2)}{\lambda(8\lambda^2-4)} \\ d &= \frac{2c\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi} = 2c\cdot\frac{\lambda^2-1}{2-\lambda^2}, \end{aligned}\right\}(1<\lambda<\infty)$$

und, wenn M den Mittelpunkt von AB bedeutet,

$$MK = -\frac{c}{2}\tan 3\varphi.$$

Hieraus ergeben sich für $\lambda = \frac{4}{3}$, d. h. für $\mathfrak{P}A = \frac{2}{3}AB$, die Werte $a = 4c$, $d = 7c$. Dann ist also $c + d = 2a$; das Trapez $\mathsf{AB}BA$ stellt folglich einen durchschlagenden Doppelschwingmechanismus dar, und der Punkt K beschreibt eine einteilige Koppelkurve, die auf $\mathfrak{P}K$ einen Sonderdoppelpunkt hat. (Fig. 9)

Fig. 8.

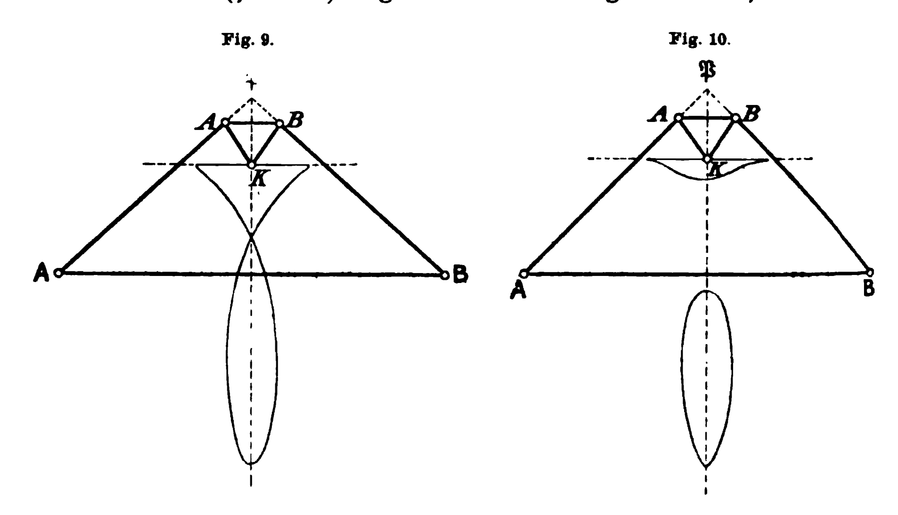


Sei ferner $\lambda = \frac{4}{3} + \vartheta$, wo ϑ einen sehr kleinen positiven Bruch bezeichnet, dessen höhere Potenzen wir vernachlässigen können, so folgt $a = (4 + 75\vartheta)c$, $d = (7 + 108\vartheta)c$, also $c + d < 2a$. Da das feste Glied d dem kleinsten c gegenüberliegt, so entsteht ein Doppelschwingmechanismus zweiter Art, und der Punkt K erzeugt eine zweiteilige Koppelkurve. (Fig. 10.) Dagegen wird für $\lambda = \frac{4}{3} - \vartheta$ $a = (4 - 75\vartheta)c$, $d = (7 - 108\vartheta)c$, also $c + d > 2a$, d. h. wir erhalten einen Doppelschwingmechanismus erster Art und als Bahn des Punktes K eine einteilige Koppelkurve. (Fig. 8) — Damit ist also gezeigt,

dafs eine einfach gestreckte Koppelkurve nicht notwendig zweiteilig ist.

Man überzeugt sich leicht, dafs der betrachtete gleicharmige Kurbelmechanismus überhaupt stets ein Doppelschwingmechanismus ist, und zwar ein solcher erster oder zweiter Art, je nachdem λ zwischen 1 und $\frac{4}{3}$ oder zwischen $\frac{4}{3}$ und ∞ angenommen wird. Die in Fig. 1 ausgeführte Konstruktion liefert im ersten Falle zwei zugeordnete Kurbelmechanismen derselben Art, die aber gegenwärtig identisch sind, im zweiten Falle nur einen Schwingkurbelmechanismus — es entsteht also niemals ein Doppelkurbelmechanismus.

Für $\lambda = 2 (\varphi = 60^0)$ ergiebt sich beiläufig $a = -4c$, $d = -3c$,



$MK = 0$, und damit gelangen wir wieder zu dem bereits in Fig. 7 dargestellten Mechanismus, bei welchem K eine doppelt gestreckte Koppelkurve beschreibt.

7. Die allgemeine einfach gestreckte Koppelkurve. Ist $\mathsf{AB}BA$ ein Kurbelmechanismus mit dem festen Gliede AB, und schneiden sich die Arme $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ augenblicklich in $\mathfrak{P}$, die Glieder AB und AB in $\mathfrak{H}$, so hat dieser Mechanismus dann und nur dann die Eigenschaft, eine gestreckte Koppelkurve zu erzeugen, wenn die Winkel $B\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \alpha$, $A\mathfrak{P}\mathfrak{H} = \beta$, $\mathfrak{P}\mathfrak{H}A = \gamma$, $\mathfrak{P}\mathfrak{H}\mathsf{A} = \delta$ den Bedingungen genügen

$$\gamma + \delta = \alpha + \beta \tag{3}$$

$$\sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta; \tag{4}$$

sind diese Bedingungen aber erfüllt, so befinden sich die drei beweglichen Glieder momentan in ihrer Hauptlage.[1]) (Fig. 11)

1) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, a. a. O. S. 261.

Gleichung (3) sagt aus, dafs die Halbierungslinien der Winkel $B\mathfrak{P}A$ und $\mathsf{A}\mathfrak{H}A$ mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ ein gleichschenkliges Dreieck bilden; denn bezeichnen wir diese Winkel bezw. mit 2ξ und 2η, und die Winkel, welche ihre Halbierungslinien mit $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ einschliefsen, bezw. mit ψ und ψ', so wird $\alpha = \psi + \xi$, $\beta = \psi - \xi$, $\gamma = \psi' + \eta$, $\delta = \psi' - \eta$, also nach (3) $\psi' = \psi$, Dann geht Gleichung 4) über in

$$\sin 2(\psi + \eta) = 2 \sin 2\psi \cos 2\xi. \tag{5}$$

Verstehen wir wie früher unter a, b, c, d die Längen der Glieder $\mathsf{A}A$, $\mathsf{B}B$, AB, AB und setzen

$$\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{H}}{\sin(2\psi + \xi + \eta)\sin(2\psi + \xi - \eta)\sin(2\psi - \xi + \eta)\sin(2\psi - \xi - \eta)} = \varrho,$$

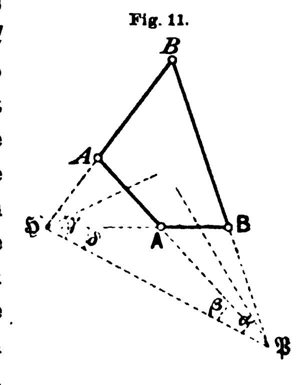
so folgt aus Fig. 11 nach einfacher Rechnung

$$\left.\begin{aligned} a &= \varrho \sin 2\eta \sin(\psi - \xi)\sin(2\psi + \xi + \eta)\sin(2\psi + \xi - \eta) \\ b &= \varrho \sin 2\eta \sin(\psi + \xi)\sin(2\psi - \xi + \eta)\sin(2\psi - \xi - \eta) \\ c &= \varrho \sin 2\xi \sin(\psi + \eta)\sin(2\psi + \xi - \eta)\sin(2\psi - \xi - \eta) \\ d &= \varrho \sin 2\xi \sin(\psi - \eta)\sin(2\psi + \xi + \eta)\sin(2\psi - \xi + \eta) \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

Die Elimination von ϱ, ψ, ξ, η zwischen den 5 Gleichungen (5) und (6) würde die Bedingung liefern, welcher im vorliegenden Fall die Gliedlängen a, b, c, d genügen müfsten.

Um die Beschaffenheit des betrachteten Mechanismus festzustellen, haben wir auf die Gleichungen (6) abermals die Kriterien des Grashofschen Satzes anzuwenden. Beschränken wir uns dabei auf diejenigen Fälle, in denen das Glied d kleiner ist als jedes der übrigen Glieder, so zeigt die Untersuchung, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen, dafs dann immer die aus $|d|$ und dem gröfsten Glied gebildete Summe gröfser ist als die Summe der beiden andern Glieder; wir gelangen also, ebenso wie in den vorher behandelten Sonderfällen, zu dem Ergebnis, dafs eine gestreckte Koppelkurve unter keinen Umständen durch einen Doppelkurbelmechanismus erzeugt wird.

Fig. 11.



8. Wir erwähnen zum Schlusse noch einen Sonderfall, in dem die Richtigkeit der letzten Behauptung sofort einleuchtet, und in dem überdies die Konstruktion des Vierecks $\mathsf{AB}BA$ und des zugehörigen Punktes K sich aufserordentlich einfach gestaltet. Fordern wir nämlich, dafs in der Hauptlage die beiden Arme $\mathsf{A}A$ und $\mathsf{B}B$ auf

einander senkrecht stehen, setzen also $\xi = 45^0$, so verwandelt sich Gleichung (5) in

$$\sin 2(\psi + \eta) = 0.$$

Nun kann $\psi + \eta$ nicht $= 0$ sein, weil dann nach (6) auch $c = 0$ wäre. Mithin ist $\psi + \eta = 90^0$, also $\gamma = 90^0$, ferner $\delta = 2\psi - 90^0 = 2\beta$ und $\alpha = \psi + 45^0 = 90^0 + \beta$.

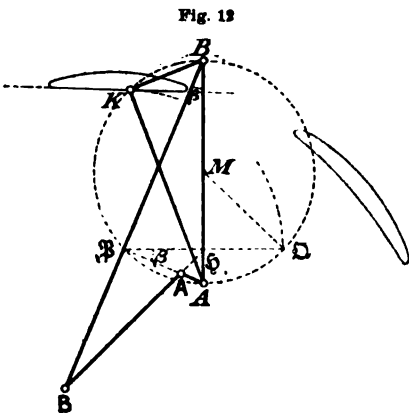


Fig. 12

Dann folgt aber aus den früher entwickelten allgemeinen Formeln[1], dafs gegenwärtig $\mathfrak{P}K = 2.\ \mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und $AK \perp BK$ ist. Wir beschreiben daher um den Mittelpunkt M der gegebenen Koppelstrecke AB mit MA einen Kreis, ziehen durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{H}$ von AB die Sehne $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} \perp AB$, machen die Sehne $\mathfrak{P}K = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ und fällen von $\mathfrak{H}$ auf $M\mathfrak{Q}$ ein Lot; dieses schneidet $\mathfrak{P}A$ und $\mathfrak{P}B$ bezw. in A und B (Fig. 12).

Die Gleichungen 6) gehen jetzt über in

$$a = -\varrho \sin^2\beta \cos 2\beta \cos 3\beta$$
$$b = \varrho \cos^2\beta \cos 2\beta \sin 3\beta$$
$$c = \varrho \sin 3\beta \cos 3\beta$$
$$d = -\varrho \sin\beta \cos\beta \sin 2\beta;$$

es ist also:

$$\frac{a}{b} = \tan\beta \cdot \frac{1 - 2\cos 2\beta}{1 + 2\cos 2\beta}$$
$$\frac{a}{c} = -\sin\beta \cdot \frac{\cos 2\beta}{1 + 2\cos 2\beta}$$
$$\frac{a}{d} = \cos 3\beta \cdot \frac{\cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta}.$$

Hieraus ergiebt sich, dafs a das kleinste Glied ist, so lange β zwischen 0 und 45^0 liegt. Da ferner komplementären Werten von β dieselben Vierecke, nur mit Vertauschung von a und b, entsprechen, so ist für $45^0 < \beta < 90^0$ die Gliedlänge b kleiner als alle übrigen. Es kann also niemals d zum kleinsten Gliede werden, und damit ist in der That die Möglichkeit eines Doppelkurbelmechanismus im vorliegenden Falle von vorn herein ausgeschlossen.

1) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, a. a. O. S. 259.

Über verborgene Bewegung.

Von Hans Cramer in Karlsruhe i. B.

Wenn zwischen den $3n$ Koordinaten eines Systems von n materiellen Punkten b Bedingungsgleichungen bestehen, so können b der Koordinaten aus den Bewegungsgleichungen der übrigen $3n - b = a$ Punkte eliminiert werden. Im Folgenden werden die Koordinaten, welche eliminiert werden, mit $q_1, \cdots q_\mathfrak{b}, \cdots\cdot q_b$, die andern mit $p_1, \cdots\cdot p_\mathfrak{a}, \cdots\cdot p_a$ bezeichnet.

Ich will annehmen, daſs die wirkenden Kräfte eine Kräftefunktion U besitzen, die nur von den p-Koordinaten abhängig ist. Ferner seien die Bedingungsgleichungen

$$F_\mathfrak{b}(p_1, \cdots\cdot p_a, q_1, \cdots\cdot q_b) = 0$$

nach den q-Koordinaten aufgelöst, also in der Form

$$q_\mathfrak{b} - f_\mathfrak{b}(p_1, \cdots\cdots p_a) = 0 \tag{1}$$

vorgelegt.

Sind die zu $q_\mathfrak{b}$ und $p_\mathfrak{a}$ gehörigen Massen bezw. $\mathfrak{m}_\mathfrak{b}$ und $m_\mathfrak{a}$, so lauten die Bewegungsgleichungen der q-Koordinaten

$$\mathfrak{m}_\mathfrak{b} q_\mathfrak{b}'' = \lambda_\mathfrak{b}. \tag{2}$$

die der p-Koordinaten

$$m_\mathfrak{a} p_\mathfrak{a}'' = \frac{\partial U}{\partial p_\mathfrak{a}} - \sum_1^b{}^\beta \lambda_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\mathfrak{a}}$$

oder, indem die aus (1) und (2) sich ergebenden Werte der λ in diese Gleichungen eingesetzt werden:

$$m_\mathfrak{a} p_\mathfrak{a}'' = \frac{\partial U}{\partial p_\mathfrak{a}} - \sum_1^b{}^\beta \mathfrak{m}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial p_\mathfrak{a}} \frac{d^2 f_\beta}{dt^2}. \tag{3}$$

Diese letzteren Gleichungen enthalten nur noch die p-Koordinaten; sie sind daher identisch mit den Bewegungsgleichungen eines freien Systems, dessen Lage durch die p-Koordinaten allein bestimmt ist. Die in diesem System wirkenden Kräfte, welche durch die rechten

Seiten von (3) dargestellt sind, sind aber nicht mehr Funktionen der Koordinaten allein, sondern auch der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Umgekehrt wird man nun in Fällen, in denen auf ein System derartige Kräfte wirken, die durch dieselben hervorgerufene Bewegung auf einfachere, nur von den Koordinaten abhängige Kräfte zurückführen können. Man braucht ja nur anzunehmen, dafs mit den Koordinaten des Systems durch Bedingungsgleichungen noch andere verknüpft sind, welche aber eliminiert worden sind, wodurch dann, wie oben gezeigt, auch die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der nicht eliminierten Koordinaten in ihre Bewegungsgleichungen eintreten. Man nennt in diesem Falle die letzteren sichtbare, die, welche als eliminiert gedacht werden, verborgene Koordinaten, die Bewegung dieser verborgene Bewegung.

In seiner Arbeit „über die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung"[1]) hat Helmholtz hervorgehoben, dafs in gewissen Fällen, die von der Natur der Bedingungsgleichungen abhängig sind, eine noch weiter gehende Elimination stattfinden kann, nämlich auch noch eines Teiles der p-Koordinaten mit Hilfe ihrer Bewegungsgleichungen. Die Möglichkeit dieser Elimination ist später von Herrn Geh. Rat Koenigsberger in seiner Arbeit „über die Prinzipien der Mechanik"[2]) genau umgrenzt worden. Hier findet sich auch meines Wissens das erste Beispiel für verborgene Bewegung, indem gezeigt wird, dafs durch Annahme einer solchen das Webersche Gesetz von der Wirkung zwischen zwei elektrischen Massenpunkten auf das Newtonsche Gravitationsgesetz zurückgeführt werden kann. Ich will nun zeigen, dafs dies auch ohne die Helmholtzsche Annahme möglich ist, nämlich allein durch eine Elimination mit Hilfe von Bedingungsgleichungen.

Werden die Koordinaten zweier Punkte m_1 und m_2, die sich nach dem Weberschen Gesetze anziehen, mit x_1, y_1, z_1, und x_2, y_2, z_2, ihre Entfernung mit r bezeichnet, so sind ihre Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{x_1 - x_2}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}r'^2 + \frac{2}{c^2}rr''\right\} \\ &\vdots \\ m_2 z_2'' &= -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{z_2 - z_1}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}r'^2 + \frac{2}{c^2}rr''\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Aus (3) ergeben sich folgende Gleichungen als Bewegungsgleichungen zweier Punkte, die sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen und

1) Journ. f. reine u. angew. Math., Band 100. S. 137—166 u. 213—222.

2) Journ. f. reine u. angew. Math., Band 118, S. 275—350 u. Band 119, S. 25—49.

mit anderen Punkten durch Bedingungsgleichungen von der Form (1) verknüpft sind, mit deren Hilfe die Koordinaten dieser letzteren Punkte eliminiert worden sind:

$$m_1 x_1'' = -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{x_1 - x_2}{r} - \sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial x_1}\frac{d^2 f_\beta}{dt^2}$$

$$\vdots$$

$$m_1 z_2'' = -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{z_2 - z_1}{r} - \sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial z_2}\frac{d^2 f_\beta}{dt^2}.$$

Sind die f nur Funktionen der Entfernung r der beiden Punkte, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\left.\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{x_1 - x_2}{r} - \frac{x_1 - x_2}{r}\sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \frac{d f_\beta}{dr}\cdot\left\{\frac{d f_\beta}{dr} r'' + \frac{d^2 f_\beta}{dr^2} r'^2\right\} \\ &\vdots \\ m_1 z_2'' &= -\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{z_2 - z_1}{r} - \frac{z_2 - z_1}{r}\sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \frac{d f_\beta}{dr}\cdot\left\{\frac{d f_\beta}{dr} r'' + \frac{d^2 f_\beta}{dr^2} r'^2\right\}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Vergleichung der beiden Gleichungssysteme (4) und (5) ergiebt ihre Identität, wenn

$$\sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \left(\frac{d f_\beta}{dr}\right)^2 = \frac{2}{c^2}\frac{m_1 m_2}{r} \quad (6)$$

gesetzt wird. Diese Gleichung ist die einzige Bedingung dafür, daſs sich die Bewegung zweier Punkte, die sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen und mit anderen Punkten durch Bedingungsgleichungen von der Form (1) verknüpft sind, nach dem Weberschen Gesetze vollzieht. Unter der Annahme eines verborgenen Punktes mit den Koordinaten ξ, η, ζ, für welchen z. B. $\xi = f_1(r) = a$, $\eta = f_2(r) = b$ angenommen wird, folgt aus Gleichung (6) als dritte Bedingungsgleichung:

$$\mathfrak{m}\left(\frac{d\zeta}{dr}\right)^2 = \frac{2}{c^2}\frac{m_1 m_2}{r}$$

oder

$$\zeta = \frac{2}{c^2}\sqrt{\frac{2 m_1 m_2}{\mathfrak{m}}}\sqrt{r}.^{1)} \quad (7)$$

Dieses Ergebnis läſst sich auch noch auf einem anderen Wege herleiten.

Bezeichnet man die lebendige Kraft zweier Punkte, die sich nach dem Weberschen Gesetze anziehen, mit T, den statischen Teil des Potentials

$$V = \frac{m_1 m_2}{r}\left\{1 + \frac{1}{c^2} r'^2\right\}$$

1) s. Koenigsberger, Über die Prinzipien der Mechanik, im Journ. für reine u. angew. Math., Band 119, S. 30, bezw. Band 118, S. 289.

mit U_1, so dafs

$$U_1 = \frac{m_1 m_2}{r}$$

das Potential des Newtonschen Gesetzes ist, den dynamischen Teil mit U_2

$$U_2 = \frac{2}{c^2} \frac{m_1 m_2}{r} r'^2, \tag{8}$$

so lautet das erweiterte[1]) Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft für die Bewegung der beiden Punkte:

$$T - U_1 - U_2 + \sum \frac{\partial U_2}{\partial p'_\alpha} p'_\alpha = c \tag{9}$$

$$(p_\alpha = x_1, \cdots z_2).$$

Nun ist nach (8)

$$\sum \frac{\partial U_2}{\partial p'_\alpha} p'_\alpha = 2 U_2,$$

also geht (9) über in

$$T - U_1 + U_2 = c. \tag{10}$$

Soll nun die Bewegung der beiden Punkte auf das Newtonsche Gesetz zurückgeführt werden durch Annahme verborgener Punkte, so wird, wenn F die kinetische Energie der letzteren bezeichnet, das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft jetzt lauten:

$$T + F - U_1 = c. \tag{11}$$

Die Gleichungen (10) und (11) liefern aber als Bedingungsgleichung für die verborgenen Punkte:

$$F = U_2$$

oder

$$\frac{1}{2} \sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \left(\frac{df_\beta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \frac{m_1 m_2}{r} r'^2.$$

Werden die f wieder als Funktionen von r allein angenommen, so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\frac{1}{2} \sum_1^b \mathfrak{m}_\beta \left(\frac{df_\beta}{dr}\right)^2 = \frac{1}{c^2} \frac{m_1 m_2}{r},$$

d. i. die Gleichung (6).

Bekanntlich haben nach Weber Riemann[2]) und Grafsmann dem

1) s. Koenigsberger, Über die Prinzipien der Mechanik, im Journ. für reine u. angew. Math., Band 119, S. 30, bezw. Band 118, S. 289.

2) s. Riemann, Vorlesungen über Schwere, Elektrizität u. Magnetismus, herausgegeben von Hattendorf.

elektrodynamischen Gesetze eine andere Form gegeben. Das Riemannsche Gesetz hat das Potential

$$V = \frac{m_1 m_2}{r}\left\{1 + \frac{1}{c^2}[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2]\right\},$$

das Grafsmannsche nach Clausius[1])

$$V = \frac{m_1 m_2}{r}\left\{1 - k[x_1'x_2' + y_1'y_2' + z_1'z_2']\right\}.$$

Bezeichnen wir den dynamischen Teil beider Potentiale wieder mit U_2, so ist auch hier

$$\sum \frac{\partial U_2}{\partial p_\alpha'} p_\alpha' = 2\,U_2$$

$$(p_\alpha = x_1, \cdots z_2)$$

Hieraus folgt in Verbindung mit den Gleichungen (10) und (11) als Bedingung dafür, dafs diese beiden Gesetze durch Annahme verborgener Punkte auf das Newtonsche zurückgeführt werden können, dafs die lebendige Kraft der letzteren den Gleichungen

$$F = \frac{1}{c^2}\frac{m_1 m_2}{r}[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2]$$

bezw.

$$F = -k\frac{m_1 m_2}{r}[x_1'x_2' + y_1'y_2' + z_1'z_2']$$

genügt.

---

1) s. Clausius, Über die Ableitung eines neuen elektro-dynamischen Grundgesetzes, im Journ. f. reine u. angew. Math., Band 82, S. 85—130.

Zusammenhang zwischen Zentralellipse und Trägheitskreis (nebst Konstruktion der Ellipse aus zwei konjugierten Durchmessern).

Von Fr. Graefe in Darmstadt.

Wenn J_z das Trägheitsmoment, bezogen auf eine Schwerpunktachse SZ einer Querschnittfläche mit dem Inhalt F ist, also der Trägheitsarm $i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}$, so berühren die der Schwerpunktachse SZ parallelen geraden Linien, die von ihr den Abstand i_z haben, bekanntlich die Zentralellipse.

Die Hauptachsen, die Achsen der Zentralellipse SX, SY seien die Achsen der x und y eines Koordinatensystems und ferner die Achse SZ und die darauf senkrechte Achse SU die Achsen der z und u eines zweiten Koordinatensystems. Der Winkel, den SX und SZ bilden, sei α. Es ist

$$z = x \cos\alpha + y \sin\alpha$$

$$u = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Ferner ist

$$J_z = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha \quad \text{oder} \quad i_z^2 = i_x^2 \cos^2\alpha + i_y^2 \sin^2\alpha$$

$$J_u = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha \quad \text{oder} \quad i_u^2 = i_x^2 \sin^2\alpha + i_y^2 \cos^2\alpha$$

und

$$J_p = J_z + J_u = J_x + J_y \quad \text{oder} \quad i_z^2 + i_u^2 = i_x^2 + i_y^2.$$

J_p ist das polare Trägheitsmoment des Querschnitts für den Punkt S. Das Trägheitsmoment J_v, bezogen auf die Schwerpunktachse SV, die mit der Achse SX den Winkel $\alpha + 45^0$ einschliefst, ist

$$J_v = J_x \cos^2(\alpha + 45^0) + J_y \sin^2(\alpha + 45^0)$$

oder

$$J_v = \tfrac{1}{2}(J_z + J_u) - (J_x - J_y) \sin\alpha \cos\alpha$$

und

$$i_v^2 = \tfrac{1}{2}(i_z^2 + i_u^2) - (i_x^2 - i_y^2) \sin\alpha \cos\alpha.$$

Das Zentrifugalmoment J_{zu} für die beiden Achsen SZ und SU ist

$$J_{zu} = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin 2\alpha,$$

mithin

$$J_v = \frac{1}{2}(J_z + J_u) - J_{zu}.$$

Wenn also die Trägheitsmomente J_z, J_u und J_v gegeben sind, so ist das Zentrifugalmoment J_{zu} bekannt. Für die Hauptachsen ist $J_{xy} = 0$.

Für zwei durch den Schwerpunkt S gehende auf einander senkrechte Achsen SK und SL, von denen SK mit der positiven Achse SZ den Winkel φ bildet, ist das Zentrifugalmoment

$$J_{kl} = \frac{1}{2}(J_x - J_y) \sin (2\alpha + 2\varphi)$$

und hieraus folgt

$$J_{kl} = \frac{1}{2}(J_z - J_u) \sin 2\varphi + J_{zu} \cos 2\varphi;$$

ferner ist

$$J_k = J_x \cos^2 (\alpha + \varphi) + J_y \sin^2 (\alpha + \varphi)$$

und ausgerechnet

$$J_k = J_z \cos^2 \varphi + J_u \sin^2 \varphi - J_{zu} \sin 2\varphi.$$

Die Gleichung der Zentralellipse E ist

$$i_x^2 x^2 + i_y^2 y^2 - i_x^2 i_y^2 = 0.$$

Abgesehen von der Länge sind konjugierte Durchmesser der Zentralellipse auch konjugierte Durchmesser der Ellipse E_1, deren Gleichung

$$i_x^2 x^2 + i_y^2 y^2 - i_z^2 i_u^2 = 0$$

ist. Die Gleichung dieser Ellipse in Bezug auf das Koordinatensystem der z und u ist

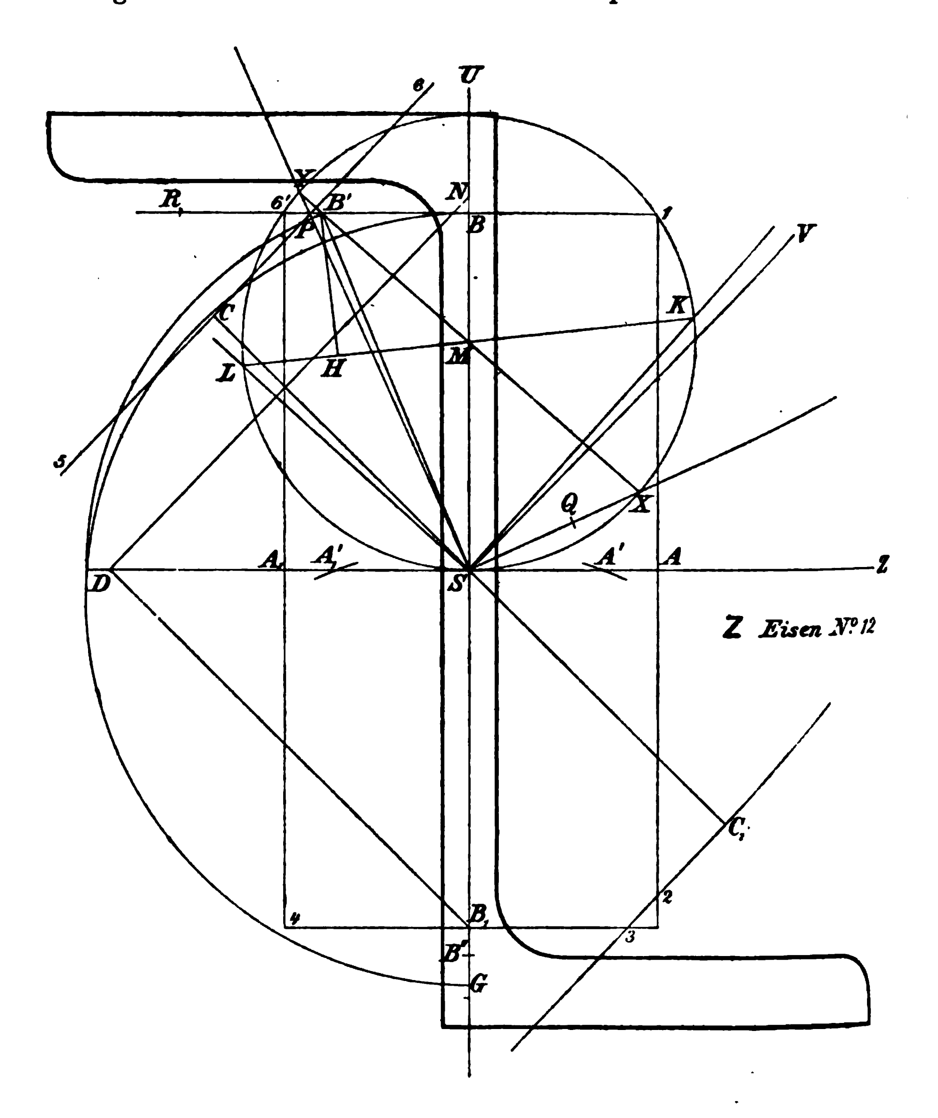
$$i_z^2 z^2 + i_u^2 u^2 - (i_z^2 + i_u^2 - 2 i_v^2) uz - i_z^2 i_u^2 = 0.$$ [1]

In Bezug auf zwei aufeinander rechtwinklige Schwerpunktachsen SZ und SU einer Querschnittfläche mit dem Inhalt F seien die Trägheitsmomente J_z, J_u und das Zentrifugalmoment J_{zu} gegeben, also auch das Trägheitsmoment J_v für die Achse SV, die mit der positiven Achse SZ den Winkel von 45° bildet. Es sei SC senkrecht auf SV. (S. Fig.)

Auf der Achse SZ trägt man ab: $SA = A_1 S = i_u$,
„ „ „ SU „ „ „ $SB = B_1 S = i_z$,
„ „ „ SC „ „ „ $SC = C_1 S = i_v$.

1) Siehe auch „Einfache Konstruktion der Zentralellipse" v. Verf. in Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure. Bd. XXXXIII, S. 210.

Die in den Punkten A, A_1, B, B_1, C, C_1 auf den Achsen errichteten Lote 12, 46′, 34, 6′1, 23, 56 sind Tangenten an die Zentralellipse. Die gerade Linie 6′1 berühre die Zentralellipse im Punkte B'. SA



und SB' sind die Richtungen von zwei konjugierten Durchmessern der Ellipsen E und E_1. Die gerade Linie 6′1 schneidet die Ellipse E_1 im Punkte B und im Punkte R, der die Koordinaten

$$z = \frac{i_z^2 + i_u^2}{i_z} - \frac{2 i_v^2}{i_z}, \qquad u = i_z$$

hat. Der Mittelpunkt von BR ist der Punkt B', der also die Koordinaten hat

$$z = \frac{i_z^2 + i_u^2}{2 i_z} - \frac{i_v^2}{i_z}, \quad u = i_z \quad \left(\text{oder } z = BB' = \frac{AB^2}{2SB} - \frac{SC^2}{SB}, \quad u = SB\right)$$

oder auch

$$z = \frac{J_{zu}}{J_p} d, \qquad u = \frac{J_z}{J_p} d, \tag{a}$$

wenn

$$d = \frac{J_p}{J_z} i_z \quad \text{oder} \quad d = \frac{AB^2}{SB}.$$

Beschreibt man einen Kreis durch die Punkte S und 1, dessen Mittelpunkt M in SU liegt, so ist der Durchmesser dieses Kreises gleich $d = 2SM$. Dieser Kreis ist (S. Hütte 1898, S. 180) ein Trägheitskreis für den Pol S und der Punkt B' der Zentralellipse ist der zu dem Trägheitskreise gehörende Trägheitshauptpunkt. Die Gleichungen (a) bestimmen die Lage des Trägheitshauptpunktes.

Man erhält hiernach folgende einfache Konstruktion des Punktes B': man trägt auf SZ die Länge $SD = i_v$ ab, errichtet in D auf DB_1 eine Senkrechte, die SU in N trifft und macht auf $B1 : BB' = NM$, so ist B' ein Punkt der Zentralellipse oder ein Trägheitshauptpunkt zu dem Trägheitskreise, dessen Mittelpunkt M und Durchmesser $d = 2SM$ ist; trägt man ferner auf SU ab $SB'' = SB'$, so schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkte B'' und dem Halbmesser AB die Achse SZ in den Punkten A' und A_1'; SA' und SB' sind die Längen und Richtungen von zwei konjugierten Halbmessern der Zentralellipse. Der Punkt B' liegt rechts von B, wenn N zwischen S und M sich befindet, sonst links von B.

Mit Hilfe der Zentralellipse oder des Trägheitskreises kann man die Trägheits- und Zentrifugalmomente eines Querschnitts zeichnerisch darstellen.

Es sei die Zentralellipse gegeben; man soll das Zentrifugalmoment und die Trägheitsmomente für zwei durch den Schwerpunkt gehende auf einander senkrechte Achsen SK und SL bestimmen. Man zieht parallel zu SK an die Zentralellipse eine Tangente; der Berührungspunkt dieser Tangente hat von der Achse SK die Entfernung i_k und von der Achse SL die Entfernung k (i_k und k entnimmt man der Figur); es ist

$$J_{kl} = k \cdot i_k F \quad \text{und} \quad J_k = i_k^2 F. \tag{1}$$

Ich weiß nicht, ob die erste dieser Beziehungen bekannt ist.

Liegen die Punkte K und L auf dem Trägheitskreis und ist $B'H$ senkrecht auf LK, so ist

$$\left.\begin{aligned} J_{kl} &= \frac{J_p}{d} B'H, \\ J_k &= \frac{J_p}{d} HK \quad \text{und} \quad i_k^2 = SB \cdot HK \quad \text{oder} \quad J_k = SB \cdot HK \cdot F \\ J_l &= \frac{J_p}{d} HL \quad \text{und} \quad i_l^2 = SB \cdot HL \quad \text{oder} \quad J_l = SB \cdot HL \cdot F \end{aligned}\right\} (2$$

Bildet nämlich SK mit der positiven Achse der z den Winkel φ, so sind die Koordinaten von K

$$z = d \sin\varphi \cos\varphi, \qquad u = d \sin^2\varphi.$$

Die Gleichung von MK ist

$$z \cos 2\varphi + u \sin 2\varphi - \frac{d}{2} \sin 2\varphi = 0,$$

also

$$\frac{J_{zu}}{J_p} d \cos 2\varphi + \frac{J_z}{J_p} d \sin 2\varphi - \frac{d}{2} \sin 2\varphi = BH';$$

es ist aber

$$J_{kl} = \tfrac{1}{2}(J_z - J_u) \sin 2\varphi + J_{zu} \cos 2\varphi,$$

mithin wie oben

$$J_{kl} = \frac{J_p}{d} B'H;$$

ferner ist die Gleichung von $B'H$

$$z \sin 2\varphi - u \cos 2\varphi - \frac{J_{zu}}{J_p} d \sin 2\varphi + \frac{J_z}{J_p} d \cos 2\varphi = 0,$$

also

$$J_p \sin^2\varphi - J_{zu} \sin 2\varphi + J_z \cos 2\varphi = \frac{J_p}{d} HK;$$

es ist aber

$$J_k = J_z \cos^2\varphi + J_u \sin^2\varphi - J_{zu} \sin 2\varphi,$$

mithin wie oben

$$J_k = \frac{J_p}{d} HK.$$

Wenn X, Y die Schnittpunkte von MB' mit dem Trägheitskreis sind, so ist J_{xy} gleich Null und SX und SY sind die Hauptachsen, die mit den Achsen der Zentralellipse zusammenfallen. Es ist

$$J_x = \frac{J_p}{d} B'X \quad \text{oder} \quad i_x^2 = SB \cdot B'X$$

$$J_y = \frac{J_p}{d} B'Y \quad \text{oder} \quad i_y^2 = SB \cdot B'Y.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion der Achsen einer Ellipse aus den ihrer Gröfse und Lage nach gegebenen konjugierten Halbmessern $SA' = SA_1'$ und SB': man ziehe $B'B$ parallel zu SA'

und SB senkrecht auf SA', trage auf SB die Länge $SB'' = SB'$ ab, beschreibe um S mit dem Halbmesser $A'B''$ einen Kreis, der BB' in den Punkten 1 und 6′ schneidet, und einen zweiten Kreis durch $6'S1$, dessen Mittelpunkt M auf SB liegt; die gerade Linie MB' schneidet den Kreis um M in den Punkten XY; SX und SY sind die Richtungen und $SP = \sqrt{SB \cdot B'X}$, $SQ = \sqrt{SB \cdot B'Y}$ die Gröfsen der beiden Halbachsen. In der Figur ist die Konstruktion der Gröfse von SP ausgeführt; es ist $SG = B'X$.

Die Formeln (1) geben die Trägheits- und Zentrifugalmomente mit Hilfe der Zentralellipse und die Formeln (2) liefern dieselben Momente mit Hilfe des Trägheitskreises und Trägheitshauptpunktes. Die zeichnerische Darstellung von Trägheits- und Zentrifugalmomenten mit Hilfe des Trägheitskreises ist ohne Frage einfacher als die mit Hilfe der Zentralellipse. Zur Konstruktion eines Trägheitskreises und des Trägheitshauptpunktes müssen drei Trägheitsmomente gegeben sein. Man bestimme also zeichnerisch den Schwerpunkt S und die Trägheitsmomente J_z, J_u, J_v bez. die Trägheitsarme i_z, i_u, i_v der gegebenen Querschnittsfläche inbezug auf die Achsen SZ, SU, SV, von denen zwei, SZ und SU, auf einander senkrecht stehen. Wie oben trägt man ab

auf der Achse $SZ : SA = A_1S = i_u$

" " " $SU : SB = B_1S = i_z$ und auf der zu SV senkrechten Achse $SC : SC = C_1S = i_v$.

Die in den Punkten A, B, A_1, B_1, C_1 auf den Achsen errichteten Lote schneiden sich in den Punkten $1, 6', 4, 3, 2$. Der dem Dreieck $1S6'$ umschriebene Kreis ist ein Trägheitskreis; die durch den Punkt 3 und den Schnittpunkt der geraden Linien $6'2$ und 14 gezogene gerade Linie schneidet die gerade Linie $6'B$ im zugehörigen Trägheitshauptpunkt B'.

Den konstruierten Trägheitskreis kann man ersetzen durch jeden Kreis, der von der Achse SZ in S berührt wird. Der Mittelpunkt eines dieser Kreise — Trägheitskreis — sei mit M_1 und der zugehörige Trägheitshauptpunkt mit T bezeichnet. Der Punkt T liegt auf der geraden Linie SB' und auf der geraden Linie M_1T, die parallel der geraden Linie MB' ist. Dies folgt leicht aus den Gl. (a) und (2).

Bemerkung zu der Note von Herrn Rudolf Ziegel: „Eine allgemeine Eigenschaft der algebraischen Funktionen" (Bd. 45., S. 338 dieser Zeitschrift).

Von Paul Stäckel in Kiel.

Wird y durch eine im Rationalitätsbereiche (x) irreduzible Gleichung n-ten Grades:

$$G(y, x) = 0$$

als algebraische Funktion von x definiert, so genügt jede rationale Funktion θ von x und y im Rationalitätsbereich (x) einer irreduziblen algebraischen Gleichung, deren Grad höchstens n sein kann. Ist er gleich n, so kann man umgekehrt y als rationale Funktion von x und θ darstellen.

Dieses bekannte algebraische Fundamentaltheorem (vrgl. H. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. I., zweite Auflage, Braunschweig 1898, S. 504) läfst sich im Besonderen auf den Fall anwenden, dafs

$$\theta = -\frac{\partial G}{\partial x} : \frac{\partial G}{\partial y} = y'$$

gewählt wird, und führt zu dem Korollar, dafs y eine rationale Funktion von x und y' ist. Da x und y gleichberechtigte Gröfsen sind, ist auch x eine rationale Funktion von y und y', womit der von Herrn Ziegel gewünschte direkte Beweis erbracht ist.

Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Baurat Kübler über die Knick-Elastizität und -Festigkeit.

Von Ch. J. Kriemler,
Dozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

In dem 5. und 6. Hefte des letzten Bandes dieser Zeitschrift veröffentlicht Herr Baurat Kübler-Eſslingen eine Knickformel, deren Ableitung er schon in den Nummern 3 und 23 des letzten Jahrganges der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure und in den Nummern 10 und 60 des letzten Jahrganges der Deutschen Bauzeitung in etwas anderer Fassung veröffentlicht hat.

Ich habe in der Nummer 34 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure und in der Nummer 100 der Deutschen Bauzeitung nachgewiesen, daſs die Formel nicht richtig ist. Wie dort ausgeführt worden ist, kann die Küblersche Formel von vornherein nicht richtig sein, weil bei ihrer Ableitung bis zum Bruche eine konstante Elastizitätsziffer E vorausgesetzt wird, und die Ergebnisse trotzdem annähernd mit den Tetmajerschen Resultaten (man sehe Figur 5 des Küblerschen Aufsatzes) übereinstimmen, deren charakteristisches Merkmal gerade die Berücksichtigung der Änderung von E an der Elastizitätsgrenze ist. Jede Untersuchung der Knickvorgänge muſs unbedingt in zwei Teile zerlegt werden: der eine hat sich nur auf die Vorgänge innerhalb der Elastizitätsgrenze zu beziehen, der andere auf diejenigen auſserhalb der Elastizitätsgrenze. Beide Aufgaben sind schon gelöst: die erste von Grashof in dem Buche „Theorie der Elasticität und Festigkeit“ 2. Auflage Seite 168 u. ff.; die zweite von Engesser in dem Aufsatze „Widerstandsmomente und Kernfiguren bei beliebigem Formänderungsgesetz (Spannungsgesetz)“, welcher in dem Jahrgang 1898 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure (S. 903—907, 927—931) erschienen ist. Sowohl Grashof als auch Engesser haben die achsiale Spannung berücksichtigt, so daſs Herr Kübler die Priorität hierin nicht hat.

Herr Kübler hat in seinen Ableitungen einen Rechnungsfehler gemacht; ohne denselben wäre die von ihm mitgeteilte Formel nicht zustande gekommen. Das Vorhandensein dieses Rechnungsfehlers läſst sich auf folgende Weise zeigen:

Da die Integration der Differentialgleichung (1) auf Seite 309 des Küblerschen Aufsatzes

$$\sin\varphi\, d\varphi = n^2 (f - y)\, dy$$

folgende allgemeine Lösung hat

$$C' - \cos\varphi = n^2 (fy - \tfrac{1}{2} y^2),$$

oder mit

$$C' = 1 - C$$

$$1 - \cos\varphi = \frac{n^2}{2}(2fy - y^2) + C,$$

so können aus ihr durch entsprechende Wahl von C elastische Linien von beliebigem Pfeile abgeleitet werden. Sind z. B. $\varphi = 0$ und $y = y_0$ zusammengehörige Werte, so ist

$$y_0 = f - \sqrt{f^2 + \frac{2C}{n^2}}.$$

Es ist also der zu diesem C gehörige Pfeil

$$f' = \sqrt{f^2 + \frac{2C}{n^2}}.$$

Aber es ist wohl zu beachten, daſs eine Änderung des Pfeiles der elastischen Linie eine Änderung der in Figur 2 des Küblerschen Aufsatzes angegebenen Gröſse Δa zur Folge hat.

Aus der noch ganz allgemeinen Gleichung

$$1 - \cos\varphi = \frac{n^2}{2}\left(2fy - y^2 + \frac{2C}{n^2}\right)$$

folgt

$$\sin\varphi = n\sqrt{\frac{2C}{n^2} + 2fy - y^2}\cdot\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}\left(\frac{2C}{n^2} + 2fy - y^2\right)}.$$

Setzt man, wie Herr Kübler es thut,

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}\left(\frac{2C}{n^2} + 2fy - y^2\right)}$$

gleich dem konstanten Korrektionsglied $\sqrt{\text{Corr.}}$, so ist

$$\sin\varphi = n\cdot\sqrt{\text{Corr.}}\cdot\sqrt{\frac{2C}{n^2} + 2fy - y^2}.$$

Jetzt muſs zwischen zwei Fällen unterschieden werden

1) die achsiale Zusammenpressung $\varepsilon_0 = n^2 i^2$ soll berücksichtigt werden.

2) die achsiale Zusammenpressung $\varepsilon_0 = n^2 i^2$ soll vernachlässigt werden.

Im Falle 1) hat man

$$\sin\varphi = \frac{dy}{(1-\varepsilon_0)ds} = n \cdot \sqrt{\text{Corr.}}\sqrt{\frac{2C}{n^2} + 2fy - y^2},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2C}{n^2} + f^2 - f^2 + 2fy - y^2}} = n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}}ds$$

und hieraus erhält man durch Integration, wenn noch

$$\sqrt{\frac{2C}{n^2} + f^2} = f'$$

gesetzt wird,

$$\frac{f-y}{f'} = A \cdot \cos\left[n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}} \cdot s\right] - \sqrt{1-A^2}\sin\left[n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}}\, s\right].$$

Es sind aber zusammengehörig

$$s = 0 \quad \text{und} \quad y = y_0 = f - f',$$

also ist

$$A = 1$$

und man hat

(I) $$y = f - f' \cdot \cos\left[n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}} \cdot s\right].$$

Im Falle 2) hat man, weil ε_0 gleich Null anzunehmen ist,

(II) $$y = f - f' \cdot \cos\left[n\sqrt{\text{Corr.}} \cdot s\right].$$

Nun hat Herr Kübler **im Falle 1)**

$$f' = f$$

gewählt, also ist die Gleichung der elastischen Linie bei Berücksichtigung der achsialen Zusammenpressung

(I^a) $$y = f\left\{1 - \cos\left[n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}} \cdot s\right]\right\}.$$

Damit aber für $s = \frac{l}{2}$ auch wirklich $y = f$ sei, mufs

$$n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}}\,\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$$

sein, oder weil

$$n = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

ist, so mufs

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{[l(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}}]^2}$$

sein.

Diese Gleichung zeigt, dafs bei Berücksichtigung der achsialen Zusammenpressung und des Korrektionsgliedes $\sqrt{\text{Corr.}}$ die gefährliche Druckkraft denselben Wert hat wie die **Eulersche Knickkraft** für einen Stab, dessen freie Länge nicht l sondern nur

$$l(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{Corr.}}$$

ist, vorausgesetzt natürlich, dafs der ganze Vorgang innerhalb der Elastizitätsgrenze bleibt. Da $\sqrt{\text{Corr.}}$ eine Funktion des gewählten Pfeiles f ist, so ist obiger Wert für P von f abhängig, d. h. dieser Wert von P ist diejenige Druckkraft, welche den Stab in der gewählten Durchbiegung f zu erhalten vermag. Ist P gröfser als obiger Wert, so wächst die Durchbiegung über das gewählte f hinaus.

Für diese elastische Linie berechnet sich nun die Gröfse Δa der Bewegung des Stabendes nach dem Verfahren, das Herr Kübler auf Seite 324 seines Aufsatzes anwendet, wie folgt:

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) lautete

$$1-\cos\varphi = \frac{n^2}{2}\left(2fy - y^2 + \frac{2C}{n^2}\right).$$

Nun ist hier

$$1-\cos\varphi = \frac{ds}{ds} - \frac{dx}{(1-\varepsilon_0)ds},$$

denn es wird ja hier die achsiale Zusammenpressung berücksichtigt. Bei Vernachlässigung kleiner Gröfsen höherer Ordnung wird aber

$$\begin{aligned}\frac{ds}{ds} - \frac{dx}{(1-\varepsilon_0)ds} &= \frac{ds}{ds} - \frac{dx}{ds} - \varepsilon_0\\ &= \frac{d(s-x)}{ds} - \varepsilon_0\\ &= \frac{d(\Delta a)}{ds} - \varepsilon_0,\end{aligned}$$

also ist

$$\frac{d(\Delta a)}{ds} = \varepsilon_0 + \frac{n^2}{2}\left(2fy - y^2 + \frac{2C}{n^2}\right),$$

woraus

$$\Delta a = (\varepsilon_0 + C)\frac{l}{2} + \frac{n^2}{2}\int_0^{\frac{l}{2}} (2fy - y^2)\,ds.$$

Hier ist aber $C = 0$ und $y = f\{1-\cos[n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{corr}}\cdot s]\}$ und aufserdem $n(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{corr}}\cdot\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$, so dafs die Integration ergiebt

$$\Delta a = \varepsilon_0\frac{l}{2} + n^2f^2\frac{l}{8} = n^2i^2\frac{l}{2} + n^2f^2\frac{l}{8}. \tag{1^b}$$

Es sind also bei Berücksichtigung der achsialen Zusammenpressung der Pfeil f und die Einwärtsbewegung $\triangle a = n^2 i^2 \frac{l}{2} + n^2 f^2 \frac{l}{8}$ des Stabendes zusammengehörig.

Geht man jetzt zum

Fall 2) über, bei welchem ε_0 vernachlässigt wird, so ist die Gleichung der betreffenden elastischen Linie

$$(\text{II}^a) \qquad y = f - f' \cos[n\sqrt{\text{corr}} \cdot s],$$

und damit für $s = \frac{l}{2}$ auch wirklich $y = f$ sei, mufs

$$n \cdot \sqrt{\text{corr}}\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{sein.}$$

Vorderhand möge hier der Wert noch unentschieden bleiben, welcher dem Pfeil f' zu geben ist.

In der allgemeinen Gleichung

$$1 - \cos\varphi = \frac{n^2}{2}\left(2fy - y^2 + \frac{2C}{n^2}\right)$$

ist jetzt, weil die Zusammenpressung vernachlässigt wird,

$$1 - \cos\varphi = \frac{ds}{ds} - \frac{dx}{ds} = \frac{d(s-x)}{ds} = \frac{d(\triangle' a)}{ds}.$$

Es ist also

$$\frac{d(\triangle' a)}{ds} = \frac{n^2}{2}\left(2fy - y^2 + \frac{2C}{n^2}\right),$$

woraus

$$\triangle' a = C\frac{l}{2} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{n^2}{2}(2fy - y^2)\,ds.$$

Nun ist hier $y = f - f' \cos[n\sqrt{\text{corr}} \cdot s]$ und aufserdem $n\sqrt{\text{corr}}\frac{l}{2} = \frac{\pi}{2}$, so dafs die Integration ergiebt

$$\triangle' a = C\frac{l}{2} + \frac{n^2}{2}\left(f^2\frac{l}{2} - f'^2\frac{l}{4}\right),$$

und weil $f' = \sqrt{f^2 + \frac{2C}{n^2}}$ ist, so ist

$$C = \frac{n^2}{2}(f'^2 - f^2),$$

also hat man

$$(\text{II}^b) \qquad \triangle' a = n^2 f'^2 \frac{l}{8}.$$

Es sind also bei Vernachlässigung der achsialen Zusammenpressung der Pfeil f' und die Einwärtsbewegung $\triangle' a = n^2 f'^2 \frac{l}{8}$ des Stabendes zusammengehörig.

Herr Kübler erwähnt nun ausdrücklich auf Seite 310, daſs die elastische Linie bei Berücksichtigung der achsialen Zusammenpressung und diejenige bei Vernachlässigung dieser dieselben Endpunkte haben sollen, es soll also für diese beiden Linien $\triangle a$ denselben Wert haben, d. h. es soll $\triangle' a = \triangle a$ sein. Setzt man die entsprechenden Werte ein, so erhält man die Gleichung

$$n^2 f'^2 \frac{l}{8} = n^2 i^2 \frac{l}{2} + n^2 f^2 \frac{l}{8}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, daſs

$$f' = \sqrt{4i^2 + f^2} \quad \text{sein muſs.}$$

Die pressungslose elastische Linie des Herrn Kübler hat aber den Pfeil

$$f'' = \sqrt{2i^2 + f^2},$$

also ist für dieselbe

$$\triangle'' a = n^2 f''^2 \frac{l}{8} = n^2 i^2 \frac{l}{4} + n^2 f^2 \frac{l}{8} < \triangle a.$$

Es ist somit in der Figur 2 die gestrichelte Linie verzeichnet, sie hat in Wirklichkeit nicht dieselben Endpunkte, welche die ausgezogene Linie hat; damit werden alle Folgerungen hinfällig, welche Herr Kübler aus der Vergleichung der zwei Linien unter der Voraussetzung zieht, daſs sie dieselben Endpunkte haben.

Nachdem nachgewiesen ist, daſs ein Rechnungsfehler vorhanden ist, soll noch gezeigt werden, wo derselbe gemacht wurde.

Auf Seite 309 setzt Herr Kübler

$$1 - \cos\varphi = \frac{ds}{ds} - \frac{dx}{ds}$$

und nicht

$$1 - \cos\varphi = \frac{ds}{ds} - \frac{dx}{(1-\varepsilon_0)ds},$$

also handelt es sich um die pressungslose elastische Linie; bei dieser besteht aber der Weg $d(\triangle a)$, den bei der Deformation die Druckkraft P zurücklegt, einzig und allein aus der Zusammendrückung, welche der Stab durch die Biegung vom Momente $M = P(f-y)$ erfährt, und nicht auch gleichzeitig aus der Verkürzung $n^2 i^2 ds$ des Stabes vom Drucke P selbst, denn diese wird ja gerade bei der pressungslosen elastischen Linie vernachlässigt. Herr Kübler kombiniert also zwei Sachen, die nicht zusammen gehören, und baut auf dieser falschen Grundlage alles folgende auf. Hätte Herr Kübler diesen Fehler nicht gemacht, so wäre er, wie im Vorstehenden gezeigt wurde, auf die Eulersche Gleichung

$$P = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}$$

gekommen, in welcher als freie Länge L nicht die natürliche Stablänge l sondern die reduzierte Länge $l(1-\varepsilon_0)\sqrt{\text{corr.}}$ zu nehmen ist. Nun versteht man unter „**Knickkraft**" diejenige Druckkraft, unter welcher der Stab in **keiner** ihm künstlich erteilten Durchbiegung verbleiben kann, also immer wieder gerade wird.[1]) Der „Knickkraft" entspricht also der Pfeil $f=0$ bezw. $f'=0$, so dafs bei Ermittelung der „Knickkraft" $C=0$ und $y=0$ zu nehmen sind; dadurch erhält der Faktor

$$\sqrt{1-\frac{n^2}{4}\left(\frac{2C}{n^2}+2fy-y^2\right)}$$

und mit ihm der Faktor $\sqrt{\text{corr.}}$ den Wert 1. Es ist also bei Berücksichtigung der achsialen Zusammenpressung die „Knickkraft"

$$P_0=\frac{\pi^2 EJ}{[l(1-\varepsilon_0)]^2},$$

ein Resultat, zu dem man auch ohne lange Ableitungen gelangt durch die folgende Überlegung, welche wegen des bei konstantem E stets gültigen Prinzipes der „Summation der Effekte" zulässig ist: ein durch P gedrückter Stab wird auf alle Fälle um $\triangle l = l\cdot\varepsilon_0$ gekürzt; falls nun eine künstliche Ausbiegung hinzukommt (was ja nicht notwendig der Fall ist), so kann sich der Stab wieder gerade richten, wenn die Druckkraft P den zur übrig gebliebenen freien Länge $l(1-\varepsilon_0)$ gehörigen Wert P_0 der Eulerschen Knickkraft hat.

Herr Baurat Kübler hat in der „Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure" vom 20. April dieses Jahres einen weiteren Artikel über seine Knickformel veröffentlicht, in welchem derselbe Anschauungsfehler vorhanden ist, wie in den früheren Veröffentlichungen, so dafs vorliegende Bemerkungen auch auf den neuen Aufsatz sich beziehen.

1) Näheres hierüber ist in einem Aufsatze mitgeteilt, den ich im Zentralblatte der Bauverwaltung vom 15. Mai 1901 zur Veröffentlichung gebracht habe. Die in jenem Aufsatze mitgeteilten Resultate sind mit Hilfe der Amplitudenfunktionen gefunden worden.

Bemerkungen zu dem Beitrag zur Knick-Elastizität und -Festigkeit von Baurat J. Kübler Bd. 45, S. 307—332.

Von Prof. Dr. L. Pilgrim in Cannstatt.

Es ist, besonders bei den stark federnden Stäben, zu beachten, dafs die Kraft P nicht in der Richtung der elastischen Linie wirkt, die spezifische Zusammendrückung ist daher nicht $\varepsilon_0 = P/EF$, sondern $P\cos\varphi/EF$; damit erhält man für den Krümmungshalbmesser

$$\frac{1}{r} = \frac{n^2(f-y)}{1-n^2i^2\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dy}\sin\varphi. \tag{1}$$

Hieraus folgt, wenn man annimmt, dafs der Stab in der Mitte die Richtung der Kraft P hat und dafs daselbst $y = 0$ sei,

$$1 - \cos\varphi - \frac{1}{2}n^2i^2\sin^2\varphi = \frac{n^2}{2}(2fy - y^2). \tag{2}$$

In der Küblerschen Abhandlung ist in der Formel (2), S. 309, die Integrationskonstante n^2i^2 hinzugefügt und dies durch die Gleichung

$$1 - \cos\varphi = \frac{d(s-x)}{dx} \tag{3}$$

begründet worden. Fälschlich wurde dabei angenommen, dafs hier s sich auf den ursprünglichen Zustand beziehe und x auf den durch äufsere Kräfte veränderten und dann $d(s-x)/dx = n^2i^2 = P/EF$ gesetzt. Es ist aber zu beachten, dafs s in der Formel (3) sich auf denselben Zustand bezieht, auf den sich φ bezieht, also auf den durch Kräfte veränderten. Ist ds_0 ein Element der ursprünglichen elastischen Linie, so wird das entsprechende der veränderten

$$ds = ds_0\left(1 - \frac{P}{EF}\cos\varphi\right) = ds_0(1 - n^2i^2\cos\varphi),$$

somit

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{1-n^2i^2\cos\varphi}\cdot\frac{dx}{ds_0}$$

oder

$$\cos\varphi - n^2i^2\cos^2\varphi = \frac{dx}{ds_0}. \tag{4}$$

as folgt

$$\sin\varphi - n^2 i^2 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{dy}{ds_0}. \tag{5}$$

)ie Rechnung wird am einfachsten, wenn man

$$y = f(1 - \cos\vartheta) \tag{6}$$

Dann wird mit $n^2 i^2 = P/EF = \varepsilon_0$ und $\frac{1}{2} nf = k$ nach (2)

$$2 - 2\cos\varphi - \varepsilon_0(1 - \cos^2\varphi) = 4k^2 \sin^2\vartheta \tag{7}$$

ach (5)

$$\sin\varphi - \varepsilon_0 \sin\varphi\cos\varphi = \frac{2k}{n}\frac{d\vartheta}{ds_0}\sin\vartheta. \tag{8}$$

us (7) folgt

$$\varepsilon_0 \cos\varphi = 1 - \sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 + 4\varepsilon_0 k^2 \sin^2\vartheta} \tag{9}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0^2 \sin^2\varphi} = \frac{1 - \varepsilon_0 + 2\varepsilon_0 k^2 \sin^2\vartheta + \sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 + 4\varepsilon_0 k^2 \sin^2\vartheta}}{8\varepsilon_0 k^2 \sin^2\vartheta\,(1 - k^2\sin^2\vartheta)}. \tag{10}$$

ie Einsetzung in (8) ergiebt:

$$\frac{ds_0}{d\vartheta} = \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{\left[1 + \sqrt{(1-\varepsilon_0)^2 + 4\varepsilon_0 k^2\sin^2\vartheta}\right]^2 - \varepsilon_0^2}{(1 - k^2\sin^2\vartheta)\left[(1-\varepsilon_0)^2 + 4\varepsilon_0 k^2 \sin^2\vartheta\right]}}. \tag{11}$$

ttels Reihenentwickelung bis zur 4. Potenz von ε_0 erhält man

$$\bar{\varepsilon}_0 \cdot \frac{ds_0}{d\vartheta} = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}}\left[1 - \varepsilon_0 k^2 \sin^2\vartheta\,(1 + \tfrac{5}{2}\varepsilon_0 + 4\varepsilon_0^2 + \tfrac{11}{2}\varepsilon_0^3)\right. \tag{12}$$

$$\left. {}^4\sin^4\vartheta\,(3 + \tfrac{27}{2}\varepsilon_0 + \tfrac{287}{8}\varepsilon_0^2) - \varepsilon_0^3 k^6 \sin^6\vartheta\,(10 + 65\varepsilon_0) + 35\varepsilon_0^4 k^8 \sin^8\vartheta\right].$$

an das elliptische Integral erster Art,

$$\int_0^\vartheta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}} = F(\vartheta)$$

jenige 2. Art,

$$\int_0^\vartheta \sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta} = E(\vartheta),$$

:htet man, dafs

$$\int \frac{\sin^n\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta = \frac{1}{k^2}\int \frac{\sin^{n-2}\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta - \frac{1}{k^2}\int \sin^{n-2}\vartheta\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}\cdot d\vartheta$$

und

$$\int \sin^n\vartheta\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta = -\frac{1}{n+1}\sin^{n-1}\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}$$

$$+ \frac{nk^2 - 1}{(n+1)k^2}\int \sin^{n-2}\vartheta\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}\,d\vartheta + \frac{1 - k^2}{(n+1)k^2}\int \frac{\sin^{n-2}\vartheta}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\vartheta}}\,d\vartheta,$$

so folgt aus (12), wenn s_0 von der Stabmitte an gemessen wird,

$$\begin{aligned} n\sqrt{1-\varepsilon_0}\cdot s_0 &= F(\vartheta) - [F(\vartheta) - E(\vartheta)](\varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2 + \tfrac{1}{3}\varepsilon_0^3 + \tfrac{6}{4}\varepsilon_0^4) \\ &- \varepsilon_0^2 k^2 [2E(\vartheta) - F(\vartheta) - \sin\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}][1 + \tfrac{11}{6}\varepsilon_0 \\ &+ \tfrac{21}{8}\varepsilon_0^2 - \tfrac{1}{3}\varepsilon_0 k^2(8 + 29\varepsilon_0) + 8\varepsilon_0^2 k^4] \\ &+ \tfrac{1}{3}\varepsilon_0^3 k^2 [F(\vartheta) - E(\vartheta) - 3k^2\sin^3\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}](2 + 5\varepsilon - 6\varepsilon k^2) \\ &- \varepsilon_0^4 k^4 \sin^3\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\,(2 - 5k^2\sin^2\vartheta). \qquad (13) \end{aligned}$$

Es wird $y = f$, wenn $\vartheta = (\frac{1}{2} + n)\pi$ gesetzt wird. In der Regel kommt nur $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ in Betracht. Dann wird, wenn, wie üblich, $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{K}$ und $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{E}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \frac{nl}{2}\sqrt{1-\varepsilon_0} &= \mathrm{K} + (\mathrm{K} - \mathrm{E})[\lg(1-\varepsilon_0) + \tfrac{1}{3}\varepsilon_0^3 k^2(2 + 5\varepsilon_0 - 6\varepsilon_0 k^2)] \\ &- \varepsilon_0^2 k^2(2\mathrm{E} - \mathrm{K})[1 + \tfrac{11}{6}\varepsilon_0 + \tfrac{21}{8}\varepsilon_0^2 - \tfrac{1}{3}\varepsilon_0 k^2(8 + 29\varepsilon_0 - 24\varepsilon_0 k^2)] \qquad (14) \end{aligned}$$

Für $k = 0$, also auch $f = 0$ wird $\mathrm{K} = \mathrm{E} = \frac{\pi}{2}$, somit

$$nl = \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon_0}}.$$

Bezeichnet man den entsprechenden Wert von P mit P_0, so wird, da $n^2 = P/EJ$,

$$P_0 = \frac{\pi^2 EJ}{(1-\varepsilon_0)l^2}. \qquad (15)$$

Dieser Wert entspricht der Eulerschen Knickkraft, wenn man die Zusammendrückbarkeit der elastischen Linie berücksichtigt. Herr Kriemler, der in den vorhergehenden Bemerkungen die schiefe Lage von P gegen den Stabquerschnitt nicht berücksichtigt, erhält $(1-\varepsilon_0)^2$ statt $(1-\varepsilon_0)$ im Nenner.

Eine Ausbiegung tritt erst ein, wenn $P > P_0$ ist; alsdann ist

$$\frac{nl}{2}\sqrt{1-\varepsilon_0} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P^0}}. \qquad (16)$$

Ist $\varepsilon_0 = 0$, so kann aus einer Tafel der elliptischen Funktionen (z. B. Hoüel, Recueil de formules et de tables numériques, Paris, 1866) k direkt gefunden werden; dann wird

$$\frac{f}{l} = \frac{2k}{nl} = \frac{k}{\mathrm{K}} = \frac{2}{\pi}k\sqrt{\frac{P_0}{P}}.$$

Dieser Fall wurde schon 1880 von Saalschütz erschöpfend behandelt.[1])

1) Saalschütz, Prof. Dr. L. Der belastete Stab unter Einwirkung einer seitlichen Kraft. Auf Grundlage des strengen Ausdruckes für den Krümmungsradius. Leipzig 1880. S. 1 — 34.

Ist ε_0 nicht gleich Null, so ist k durch allmähliche Annäherung zu bestimmen und sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{2}{\pi} k \sqrt{\frac{P_0}{P}(1-\varepsilon_0)} \qquad (17)$$

zu setzen, oder f/l kann direkt mittels Reihen berechnet werden.

Mit Rücksicht auf die bekannten Reihen für **K** und **E** erhält man aus (14)

$$\sqrt{\frac{P}{P_0}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 \frac{1-4\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0)^2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 \cdot \frac{1}{3} \frac{3-16\varepsilon_0+48\varepsilon_0^2}{(1-\varepsilon_0)^4}$$
$$+ \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 \cdot \frac{1}{5} \frac{5-36\varepsilon_0+120\varepsilon_0^2-320\varepsilon_0^3}{(1-\varepsilon_0)^6}$$
$$+ \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 k^8 \frac{1}{35} \cdot \frac{35-320\varepsilon_0+1344\varepsilon_0^2-3584\varepsilon_0^3+8960\varepsilon_0^4}{(1-\varepsilon_0)^8}. \qquad (18)$$

Dieser Ausdruck, der mit $\varepsilon_0 = 0$ gleich $\frac{2}{\pi}$**K** wird, entspricht der {I} des Herrn Kübler.

Setzt man

$$\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1 = u \text{ und } \frac{u}{(1+u)^2} = \frac{P_0}{P}\left(\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1\right) = v, \qquad (19)$$

so wird

$$u = v + 2v^2 + 5v^3 + 14v^4 + 42v^5 + \cdots$$
$$= \frac{1}{4} k^2 \frac{1-4\varepsilon_0}{(1-\varepsilon_0)^2}\left[1 + \frac{3}{16} k^2 \frac{3-16\varepsilon_0+48\varepsilon_0^2}{(1-4\varepsilon_0)(1-\varepsilon_0)^2} + \cdots\right].$$

Hieraus erhält man, indem man zunächst

$$k^2 = A_1 v + A_2 v^2 + \cdots$$

setzt, nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten, wenn ε_0^3 vernachlässigt wird:

$$k^2 = \frac{\pi^2}{4}\frac{f^2}{l^2} \cdot \frac{P}{P_0} = 4v \frac{(1-\varepsilon_0)^2}{1-4\varepsilon_0}\left[1 - \frac{v}{4}(1+24\varepsilon_0+192\varepsilon_0^2) - \frac{v^2}{8}(1-816\varepsilon_0^2)\right.$$
$$\left. - \frac{v^3}{32}(1+60\varepsilon_0+96\varepsilon_0^2)\right], \qquad (20)$$

somit nach (17)

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{\pi} \frac{(1-\varepsilon_0)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-4\varepsilon_0}} \cdot \frac{P_0}{P} \sqrt{\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1} \cdot \left[1 - \frac{v}{8}(1+24\varepsilon_0+192\varepsilon_0^2)\right.$$
$$\left. - \frac{v^2}{128}(9+48\varepsilon_0-55\ 68\varepsilon_0^2) - \frac{v^3}{1024}(25+1224\varepsilon_0-1152\varepsilon_0^2) + \cdots\right]. \quad (21)$$

Für $\frac{P}{P_0} = 1{,}7487$ und $\varepsilon_0 = 0$ erhält man hieraus $\frac{f}{l} = 0{,}40284$, während Saalschütz S. 31, $0{,}8063 \cdot \frac{l}{2}$ angiebt.

Ist $\varepsilon_0 = 0$, so wird

$$k^2 = 4v - v^2 - \tfrac{1}{2}v^3 - \tfrac{1}{8}v^4 + \tfrac{19}{16}v^5 + \tfrac{807}{128}v^6 + \tfrac{3267}{128}v^7 \tag{22}$$

und

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{\pi}\frac{P_0}{P}\sqrt{\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1}\left[1 - \tfrac{1}{8}v - \tfrac{9}{128}v^2 - \tfrac{25}{1024}v^3 + \frac{4683}{2^{15}}v^4 + \frac{210825}{2^{18}}v^5 + \frac{13844179}{2^{22}}v^6\right], \tag{23}$$

worin $v = \frac{P_0}{P}\left(\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1\right)$ zu setzen ist (vergl. (19)).

Der Wert der [ ] in Formel (21) schwankt, so lange P/P_0 nicht sehr grofs ist, zwischen engen Grenzen, wie aus der folgenden Tafel, in welche auch noch die Werte von $\frac{f}{l}$, $\frac{2a}{l}$ und $\frac{l-2a}{l}$ aufgenommen sind, hervorgeht.

Tafel I.

$\frac{2}{\pi}\arcsin k = \frac{1}{2}\alpha$	$k = \frac{nf}{2}$	P/P_0	v	[ ]	f/l	$2a/l$	$\frac{l-2a}{l}$
0	0	1	0	1	0	1	0
0,1	0,1564	1,013	0,0062	0,9992	0,099	0,975	0,025
0,2	0,3090	1,051	0,0240	0,9970	0,192	0,903	0,097
0,3	0,4540	1,120	0,0522	0,9933	0,273	0,788	0,212
0,4	0,5878	1,229	0,0884	0,9886	0,338	0,636	0,364
0,5	0,7071	1,393	0,1294	0,9829	0,381	0,457	0,543
0,6	0,8090	1,643	0,1716	0,9768	0,402	0,260	0,740
0,7	0,8910	2,040	0,2099	0,9725	0,397	0,054	0,946
0,75	0,9239	2,334	0,2260	0,9714	0,385	– 0,049	1,049
0,8	0,9511	2,739	0,2391	0,9725	0,366	– 0,153	1,153
0,8874	0,9844	4,000	0,25	0,9842	0,313	– 0,337	1,337
0,9	0,9877	4,295	0,2497	0,9884	0,303	– 0,365	1,365
0,95	0,9969	6,278	0,2398	1,0181	0,253	– 0,487	1,487
0,99	0,9999	12,44	0,2031	1,1092	0,180	– 0,639	1,639
0,999	1,0000	24,93	0,1602	1,249	0,128	– 0,745	1,745
0,9999	1,0000	41,68	0,1309	1,382	0,099	– 0,901	1,901
1	1,0000	∞	0	∞	0	– 1,00	2,000

Setzt man

$$\frac{f}{l} = 1{,}255\,\frac{P_0}{P}\sqrt{\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1}, \tag{24}$$

so ist, so lange $P/P_0 < 5$, der Fehler $< 1{,}43\%$.

Ist $P/P_0 > 5$, so liefert (17) mit $k = 1$, also $\frac{f}{l} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{P_0}{P}(1-\varepsilon_0)}$ sehr genaue Resultate.[1])

Die Richtung der elastischen Linie im Angriffspunkt von P folgt aus (7) mit $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man den entsprechenden Wert von φ mit α, so wird

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-1+\varepsilon_0+\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2+4\varepsilon_0 k^2}}{2\varepsilon_0}}. \tag{25}$$

Die Reihenentwickelung liefert

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sqrt{1-\varepsilon_0}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 k^2}{(1-\varepsilon_0)^2} + \frac{7}{8}\frac{\varepsilon_0^2 k^4}{(1-\varepsilon_0)^4} - \frac{33}{16}\frac{\varepsilon_0^3 k^6}{(1-\varepsilon_0)^6} + \cdots\right], \tag{26}$$

also für $\varepsilon_0 = 0$:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k.$$

Die erste Spalte der Tafel I giebt somit $\frac{1}{2}\alpha$ in Bruchteilen des Quadranten an.

Zur Bestimmung der Sehne $2a$ der elastischen Linie des Stabes hat man

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\vartheta} &= \frac{ds}{d\vartheta}\cos\varphi = \frac{ds_0}{d\vartheta}\cos\varphi\,(1-\varepsilon_0\cos\varphi)\\ &= \frac{ds_0}{d\vartheta}\left(1-\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2+4\varepsilon_0 k^2\sin^2\vartheta}\right)\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2+4\varepsilon_0 k^2\sin^2\vartheta}\\ &= \frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}\left(1-\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2+4\varepsilon_0 k^2\sin^2\vartheta}\right)\\ &\quad\sqrt{\left[1+\sqrt{(1-\varepsilon_0)^2+4\varepsilon_0 k^2\sin^2\vartheta}\right]^2-\varepsilon_0^2}.\end{aligned} \tag{27}$$

Entwickelt man in Reihen bis zur 4. Potenz von ε_0, so wird

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon_0}}{n}\Big\{2\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}}\big[1 + k^2\sin^2\vartheta\,(\varepsilon_0+\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2-\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^4)\\ + k^4\sin^4\vartheta\,(\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^3+\tfrac{17}{8}\varepsilon_0^4) + \tfrac{5}{4}\varepsilon_0^4 k^6\sin^6\vartheta\big]\Big\}.\end{aligned} \tag{28}$$

Die Integration ergiebt

$$\begin{aligned}\frac{nx}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} &= 2E(\vartheta) - F(\vartheta) + \tfrac{1}{6}\varepsilon_0^3 k^2(1+\tfrac{9}{4}\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 k^2)\\ &\left[2E(\vartheta)-F(\vartheta)-\sin\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}\right] - \left[F(\vartheta)-E(\vartheta)\right]\\ &\left[-\lg(1-\varepsilon_0)+\tfrac{1}{12}\varepsilon_0^4 k^2\right] + \tfrac{1}{4}\varepsilon_0^4 k^4\sin^3\vartheta\cos\vartheta\sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta}.\end{aligned} \tag{29}$$

---

1) Noch genauer ist $\frac{f}{l} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{P_0}{P}(1-\varepsilon_0)}\sqrt{1-16e^{-\frac{\pi\sqrt{P/P_0}-2\varepsilon_0+3\varepsilon_0^2}{1-\varepsilon_0+\frac{1}{2}\varepsilon_0^2}}}$, wo $e = 2{,}71828\ldots$

Die halbe Sehne a folgt alsdann aus

$$\frac{na}{\sqrt{1-\varepsilon_0}} = (2\mathrm{E}-\mathrm{K})[1+\tfrac{1}{6}\varepsilon_0^3 k^2(1+\tfrac{9}{4}\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 k^2)]$$
$$-(\mathrm{K}-\mathrm{E})[-\lg(1-\varepsilon_0)+\tfrac{1}{12}\varepsilon_0^4 k^2]. \qquad (30)$$

Zur Bestimmung der Verkürzung ergiebt sich

$$n\left(\frac{l}{2}-a\right)\sqrt{1-\varepsilon_0} = 2(\mathrm{K}-\mathrm{E})[1-\tfrac{1}{2}\varepsilon_0^2-\tfrac{1}{4}\varepsilon_0^3-\tfrac{1}{6}\varepsilon_0^4+\tfrac{1}{6}\varepsilon_0^3k^2(2+\tfrac{21}{4}\varepsilon_0)-\varepsilon_0^4k^4]$$
$$+(2\mathrm{E}-\mathrm{K})[\varepsilon_0-\varepsilon_0^2k^2(1+2\varepsilon_0+\tfrac{17}{6}\varepsilon_0^2)+\tfrac{2}{3}\varepsilon_0^3k^4(4+15\varepsilon_0)-8\varepsilon_0^4k^6]. \qquad (31)$$

Dividiert man (29) durch (14), so ergiebt sich, wenn ε_0^3 vernachlässigt wird,

$$\frac{l-2a}{l} = 2\left(1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)+\varepsilon_0\left[\left(1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2\right]$$
$$-\varepsilon_0^2\left[\left(2\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}-1\right)\left(1-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}\right)^2+k^2\left(2\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{K}}-1\right)^2\right]. \qquad (32)$$

Durch Reihenentwickelung erhält man

$$\frac{l-2a}{l} = \varepsilon_0 + k^2\frac{1-2\varepsilon_0}{1-\varepsilon_0}+\frac{1}{8}k^4\frac{1+8\varepsilon_0^2}{(1-\varepsilon_0)^3}+\frac{1}{16}k^6\frac{1-4\varepsilon_0-4\varepsilon_0^2-32\varepsilon_0^3}{(1-\varepsilon_0)^5}$$
$$+\frac{1}{1024}k^8\frac{41-256\varepsilon_0+576\varepsilon_0^2+1024\varepsilon_0^3+5248\varepsilon_0^4}{(1-\varepsilon_0)^7}+\cdots \qquad (33)$$

Herr Kübler giebt für $(l-2a)/l$ den Wert k^2 an, Herr Kriemler den etwas genaueren ε_0+k^2.

Die von ersterem auf S. 323 angegebenen Werte weichen daher für große Werte von k von den genauen erheblich ab.

Setzt man k^2 an die Stelle des Küblerschen Ausdrucks $\frac{n^2}{4}(2i^2+f^2)$, so wird, wenn $\varepsilon_0=0$, $\frac{\Delta a}{l}=\frac{l-2a}{2l}$ für

$k^2 =$	0,02	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
nach Kübler	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	—	—
genau	0,0099	0,0507	0,1028	0,1567	0,2128	0,2715	0,3340	0,4017	0,4777	0,5714
f/l genau	0,0896	0,1961	0,2695	0,3196	0,3558	0,3814	0,3974	0,4032	0,3963	0,3680

Die beiden Stabenden berühren sich $(2a=0)$, wenn $\mathrm{K}=2\mathrm{E}$. Dies tritt ein für $k^2=0{,}8261$; alsdann wird $f/l=0{,}3916$ und $P=P_0\cdot 2{,}184$. Herr Kübler giebt für diesen Fall $f/l=0{,}384$ an (Taf. III Fig. 6).

Mit Rücksicht auf (19) erhält man

$$\frac{l-2a}{l}=\varepsilon_0+4v\frac{(1-\varepsilon_0)(1-2\varepsilon_0)}{1-4\varepsilon_0}\Big[1+\frac{v}{4}(1-12\varepsilon_0-120\varepsilon_0^2)$$
$$+\frac{v^2}{8}(5-12\varepsilon_0+264\varepsilon_0^2)+\frac{v^2}{16}(27-57\varepsilon_0-90\varepsilon_0^2)+\cdots\Big], \qquad (34)$$

wo $v=\frac{P_0}{P}\left(\sqrt{\frac{P}{P_0}}-1\right)$ ist.

Für grofse P/P_0 erhält man, wenn man die Beziehungen zwischen E und K für grofse k beachtet:

$$\frac{l-2a}{l} = 2 - \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{P_0}{P}} + \varepsilon_0 + \varepsilon_0^2\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{P_0}{P}} - \frac{8}{\pi^2}\frac{P_0}{P}\right), \tag{35}$$

Die [ ] der Formel (34) ist also für grofse P/P_0 divergent. —

Auf Grund der hier entwickelten Formeln ergeben sich für die entstehenden *Spannungen* Resultate, die von den Küblerschen erheblich abweichen. Da (bei vollkommener Ausführung) $f = 0$ ist, so lange $P < P_0$ aus (15), so ist für diesen Fall die Druckbelastung $P = F\sigma$, wo σ die entstehende Druckspannung ist. Erst, wenn $\sigma F > P_0$ oder $l/i > \pi\sqrt{E/\sigma}$ ist, kommt die Formel

$$\sigma F = P\left(1 + \frac{ef}{i^2}\right) \tag{36}$$

zur Anwendung (bei Gufseisen ev. $\sigma' F = P\left(\frac{ef}{i^2} - 1\right)$, wo σ' die Zugspannung ist). Setzt man, so lange $P < 5\,P_0$ ist, im Anschlufs an (21)

$$\frac{f}{l} = \frac{\pi}{4}\frac{P_0}{P}\sqrt{\sqrt{\frac{P}{P_0}} - 1}, \tag{37}$$

so folgt, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{a} = \frac{\pi}{4}\frac{i^2}{el}\frac{\sigma F - P_0}{P_0} = \frac{1}{4\pi}\frac{l}{e}\left(\frac{\sigma}{E} - \pi^2\frac{i^2}{l^2}\right)$$

und $\mathfrak{z} = \frac{\pi}{4}\frac{i^2}{el}\cdot\frac{P - P_0}{P_0}$ gesetzt wird ($\mathfrak{z}$ ist hier stets $< 0{,}07$):

$$\frac{P-P_0}{P}\left[1 + \pi\frac{i^2}{el}\mathfrak{a}(1+\mathfrak{a}^2)\right] = 2\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{a}^4 + 2\mathfrak{z}^2(1+3\mathfrak{a}^2) - 4\mathfrak{a}\mathfrak{z}^3 + \mathfrak{z}^4, \tag{38}$$

woraus P durch allmähliche Annäherung bestimmt werden kann.

Weniger genau ist

$$P = P_0\left[1 + \frac{1}{16\pi^2}\frac{l^2}{e^2}\left(\frac{\sigma}{E} - \pi^2\frac{i^2}{l^2}\right)^2\right]^2. \tag{39}$$

Diese Formel kann angewandt werden, so lange $l/e < 14E/\sigma$ ist; sie weicht, so lange $l\sigma/eE$ klein ist, nur wenig von der Küblerschen (25) S. 322 ab, wenn dort $\zeta_0 = 0{,}5$ gesetzt wird.

Bei stark federnden Stäben kann, wenn $P > 4P_0$ ist, nach (17) $f/l = \frac{2}{\pi}\sqrt{P_0/P}$ gesetzt werden, alsdann erhält man aus (36)

$$P = \tfrac{1}{4}F\sigma\cdot\frac{\sigma}{E}\cdot\frac{i^2}{e^2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma}{E}\frac{i^2}{e^2} + \cdots\right). \tag{40}$$

Diese Formel gilt nur, wenn $l/e > 4\pi E/\sigma$. Für $l/e = 4\pi E/\sigma$ weichen (39) und (40) kaum von einander ab. —

Entgegnung.

Von Baurat J. Kübler in Eſslingen.

Auf die beiden vorstehenden Bemerkungen einzugehen wäre zwecklos, weil sie das eigentliche Wesen meiner Theorie der Knickfestigkeit gar nicht berühren. Dagegen will ich nichts unversucht lassen, was zum leichteren Verständnis dieses schwierigen Kapitels beitragen kann.

Unter Festhaltung meiner bisherigen Bezeichnung bitte ich deshalb, mit mir die folgende Betrachtung anzustellen:

Man erteile dem ursprünglich geraden und elastischen Stab künstlich eine derartige Biegung, daſs seine Mittellinie mit der in meiner früheren Figur *gestrichelt* angegebenen Linie zusammenfällt. Das geschieht durch ein Moment $M' = P(\sqrt{2i^2+f^2} - y') = P\sqrt{2i^2+f^2}\cos nsV$, welches in der Stabmitte am gröſsten ist $= P\sqrt{2i^2+f^2}$ und gegen die Stabenden hin nach dem Gesetz $P\sqrt{2i^2+f^2}\cos nsV$ abnimmt bis zu Null. Die Gleichung dieser gestrichelten Linie ist $y' = \sqrt{2i^2+f^2}(1-\cos nsV)$ und stellt also einen Bogen dar vom Pfeil $f' = \sqrt{2i^2+f^2}$ und der Sehne $2a$, die kleiner ist als die Stablänge l.

Hält man nun in diesem künstlich herbeigeführten Zustand des Stabes die beiden Stabenden derart fest, daſs dortselbst — entsprechend der Voraussetzung der freien Knicklänge l — keinerlei Momente auftreten können, wohl aber die Bogensehne $2a$ unabänderlich erhalten bleibt und überläſst, nach diesen Vorkehrungen, den Stab nun ganz sich selbst, so wird er in dem Bestreben, in seine ursprünglich gerade und spannungslose Lage wieder zurückzukehren, gehindert, weil eben seine Enden nicht ausweichen können. Infolge dessen wird der Stab sich gegen die Widerlager stemmen, welche durch die Konstanz der Sehne $2a$ hervorgerufen worden sind; dadurch erhält der Stab aber Druck, seine Länge wird also kürzer, und er nimmt bei gleichbleibender Sehne $2a$ deshalb eine kleinere Pfeilhöhe f an.

Wie klein auch immer dieser Pfeil f sein möge, so ist also der Stab in diesem Zustand im allgemeinen ein elastischer Bogen mit

Kämpfergelenken von der Stützweite $2a$ und der Pfeilhöhe f, die im besonderen Fall auch Null sein kann. Durch sorgsamstes Fernhalten aller Zufälligkeiten nämlich und wenn es insbesondere möglich wäre, einen Stab so herzustellen, dafs seine Mittellinie eine mathematische Gerade und diese Gerade zugleich vollkommene Symmetrieachse wäre inbezug auf die Beschaffenheit des Stabes und seiner Belastung — könnte eine Biegung möglicherweise ferngehalten werden; aber dieser Gleichgewichtszustand des Stabes wäre nur ein labiler und würde beim geringfügigsten Anlafs übergehen müssen in den stabilen Gleichgewichtszustand. Da in den Aufgaben der Praxis immer nur mit dem letzteren zu rechnen ist, so ist also eine Biegung, wenn auch noch so klein, im Allgemeinen anzunehmen.

Wer nun mit dem elastischen Bogen vertraut ist, wird sich überzeugen, dafs der Stab, wie wir ihn zuletzt verlassen haben, sich genau in dem Zustand des zentrisch mit P gedrückten Stabes von der freien Knicklänge l befindet, welchen Zustand ich in meiner früheren Figur mit *ausgezogener* Linie dargestellt habe. Denn in diesem Zustand wird der Stab zentrisch gedrückt mit P und gebogen mit dem Moment $M = P(f - y) = Pf \cos nsV$, und seine Mittellinie hat die Gleichung $y = f(1 - \cos nsV)$. Ferner wird, wer mit dem elastischen Bogen vertraut ist, aus obiger Betrachtung erkennen, dafs, wenn in Gleichung $y' = \sqrt{2i^2 + f^2}(1 - \cos nsV)$ an die Stelle von y' die Ordinate y der gedrückten Stabmittellinie, d. i. also:

$$y = \sqrt{2i^2 + f^2}(1 - \cos nsV)$$

gesetzt wird, dafs damit auch die eigentliche Druckspannung in die Gleichung der deformierten Stabmittellinie aufgenommen worden ist und dafs man dadurch erst die hier allein giltige statische Gleichung erhalten hat. Und dies ist eben der Kern der Sache!

Bis jetzt ging man irrtümlich davon aus, dafs die geometrische Gleichung $y = f(1 - \cos nsV)$ der gedrückten Stabmittellinie auch die statische Gleichung sei; damit kommt man aber auf die Eulersche Formel, die deshalb auch und gerade für die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Fälle widersinnige Resultate liefert. Die statische Gleichung kann aber nur insolange mit der geometrischen übereinstimmen, als die Mittellinie spannungslos (neutral) ist; denn sonst müfste ja diese Gleichung dieselbe sein, ob die Mittellinie eine derartige Spannung hätte oder nicht, was doch offenbar nicht möglich ist.

Über das Brunssche Eikonal.

Von F. Klein in Göttingen.

Im 21. Bande der math. phys. Abhandlungen der Kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (1895) hat Herr Bruns einen bemerkenswerten Beitrag zur Strahlenoptik veröffentlicht, in welchem er für ein beliebiges optisches Instrument den Verlauf eines das Instrument durchdringenden Lichtstrahles mit Hilfe einer Funktion von 4 Veränderlichen darstellt, die er als *Eikonal* bezeichnet. Ich reproduziere hier seine Grundformeln in freier Weise. Man bezeichne den Punkt, in welchem der den Objektraum durchsetzende Teil des Lichtstrahles (wenn nötig geradlinig verlängert gedacht) die XY-Ebene des Objektraums schneidet, mit ξ, η, die Richtungskosinus, die er (im Objektraum) mit den Koordinatenaxen bildet, mit p, q, r; die entsprechende Bedeutung sollen ξ', η', bez. p', q', r' für den Bildraum haben. Dann ist das Eikonal in seiner (hier allein in Betracht kommenden) ursprünglichen Form eine Funktion von ξ, η, ξ', η':

$$E(\xi, \eta \mid \xi', \eta'),$$

vermöge deren sich der Verlauf des Lichtstrahls im Objektraum und Bildraum mittelst folgender Formeln darstellt:

$$(1) \quad \begin{cases} p = -c \cdot \dfrac{\partial E}{\partial \xi}, & p' = +c' \cdot \dfrac{\partial E}{\partial \xi'}, \\ q = -c \cdot \dfrac{\partial E}{\partial \eta}, & q' = +c' \cdot \dfrac{\partial E}{\partial \eta'}, \end{cases}$$

unter c, bez. c' die Lichtgeschwindigkeit im Objektraum und Bildraum verstanden. Ich werde diese Formeln kurz so zusammenfassen:

$$(2) \quad dE = \frac{-1}{c}(p\,d\xi + q\,d\eta) + \frac{1}{c'}(p'\,d\xi' + q'\,d\eta').$$

Hiermit wolle man nun die Entwickelungen vergleichen, die Hamilton 1824ff. seinen Untersuchungen über Strahlensysteme zu Grunde gelegt hat.[1]) Hamilton beginnt dort damit, den Weg des

1) Wegen der genaueren Nachweise vgl. etwa den dritten Band des Poggendorffschen Handwörterbuchs.

ein Instrument durchdringenden Lichtstrahles in der von Johann Bernoulli herrührenden, heutzutage allgemein bekannten Art durch die Forderung eines Minimaximums festzulegen. Es sei x, y, z der Ausgangspunkt des Lichtstrahles (im Objektraum), x', y', z' sein Endpunkt (im Bildraum), c, c_1, c_2, ..., c' seien die Lichtgeschwindigkeiten in den successiven Medien, welche der Lichtstrahl durchdringt, Δl, Δl_1, Δl_2, ..., $\Delta l'$ die Weglängen, die er in diesen Medien beziehungsweise zurücklegt. Die Festlegung des Lichtstrahles erfolgt dann dadurch, daſs man verlangt, es solle die Summe:

$$\sum_{xyz}^{x'y'z'} \frac{\Delta l_i}{c_i}$$

bei festgehaltenem Anfangspunkt und Endpunkt eine verschwindende erste Variation haben. Soweit Johann Bernoulli. *Das Neue bei Hamilton ist, daſs er die Betrachtung weiter fortsetzt, indem er vorstehende Summe nach Festlegung des Lichtstrahls als eine Funktion ihrer beiden Endpunkte betrachtet:*

$$(3) \qquad \sum_{xyz}^{x'y'z'} \frac{\Delta l_i}{c_i} = \Omega\,(x, y, z \mid x', y', z').$$

Dieses Ω ist die von Hamilton so genannte *charakteristische Funktion* des optischen Instruments, es bedeutet einfach die *Zeit*, welche der Lichtstrahl gebraucht, um bei einem Durchgange durch das Instrument von x, y, z nach x', y', z' zu kommen. In der That ergiebt sich, daſs man den Gang des Lichtstrahls durch dieses Ω in einfachster Weise darstellen kann; man hat in dieser Beziehung die Formeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} p = -c\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}, & p' = +c'\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial x'}, \\ q = -c\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}, & q' = +c'\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial y'}, \\ r = -c\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial z}, & r' = +c'\cdot\dfrac{\partial\Omega}{\partial z'}, \end{cases}$$

die ich wieder in eine zusammenfassen will:

$$(5) \qquad d\Omega = -\frac{1}{c}\,(p\,dx + q\,dy + r\,dz) + \frac{1}{c'}\,(p'dx' + q'dy' + r'dz').$$

Beiläufig folgt aus (4), daſs Ω den beiden partiellen Differentialgleichungen genügt:

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{c^2}, \quad \left(\frac{\partial\Omega}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z'}\right)^2 = \frac{1}{c'^2}.$$

Die Ähnlichkeit der solcherweise mitgeteilten Formeln mit denjenigen von **Bruns** liegt auf der Hand, und es scheint um so wichtiger, den Übergang von dem einen Formelsysteme zum anderen anzugeben, als die Eikonalformeln bei **Bruns** selbst zunächst auf sehr umständlichem Wege — durch Heranziehung der Theorie der Berührungstransformationen mit Zugrundelegung des **Malusschen** Satzes — aufgestellt werden, während **Hamiltons** Entwickelungen aus der Definition von Ω sofort folgen und an Einfachheit nichts zu wünschen lassen. Eben dieser Übergang ist denn auch der Zweck der vorliegenden kleinen Mitteilung.

Man nenne einfach den Abstand, den der Punkt x, y, z des Objektraums vom Punkte ξ, η, o daselbst besitzt, ϱ, ebenso den Abstand von x', y', z' und ξ', η', o ϱ'. Es ist dann

$$(7)\qquad \begin{cases} x = \xi + \varrho p, & x' = \xi' + \varrho' p', \\ y = \eta + \varrho q, & y' = \eta' + \varrho' q', \\ z = \quad \varrho r, & z' = \quad \varrho' r', \end{cases}$$

Setzt man die hier sich ergebenden Werte der Differentiale

$$dx = d\xi + p \cdot d\varrho + \varrho \cdot dp, \text{ etc.}$$

in (5) ein, so kommt nach kürzester Zwischenrechnung

$$(8)\qquad d\Omega = -\frac{1}{c}(d\varrho + p d\xi + q d\eta) + \frac{1}{c'}(d\varrho' + p' d\xi' + q' d\eta').$$

Der Vergleich mit (2) gibt daraufhin (wenn ich die etwaige Integrationskonstante in das Eikonal einrechne):

$$(9)\qquad \Omega = -\frac{\varrho}{c} + \frac{\varrho'}{c'} + E.$$

Daher: *Das Eikonal ist gleich der charakteristischen Funktion für* $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$; *dasselbe bedeutet einfach die Zeit, welche die Lichtbewegung gebraucht, um sich entlang dem das Instrument durchdringenden Strahl vom Objektpunkte* ξ, η, o *zum Bildpunkte* ξ', η', o *fortzupflanzen.* — Zugleich ergiebt sich, daſs sich, bez. inwieweit sich das Eikonal vor der allgemeinen charakteristischen Funktion durch prinzipielle Einfachheit auszeichnet. Die beiden partiellen Differentialgleichungen (6) verwandeln sich nämlich vermöge der Substitution (7) in folgende:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho} = \frac{-1}{c}, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho'} = \frac{1}{c'};$$

das Eikonal E ist also seinerseits nicht weiter an irgend welche partielle Differentialgleichung gebunden.

Ich kann diese kleine Note nicht schliefsen, ohne nachdrücklich auf das ganz besondere Interesse von Hamiltons Untersuchungen zur Strahlenoptik hinzuweisen. Die Methode der charakteristischen Funktion führt ihn einerseits zur weitgehenden Behandlung instrumenteller Fragen (wobei er zahlreiche Resultate späterer Autoren anticipiert), andererseits zur Entdeckung der konischen Refraktion in zweiachsigen Krystallen. Aber mehr als das, sie ist, wie ich bereits vor 10 Jahren in einem vor der Naturforscherversammlung in Halle gehaltenen Vortrage ausführte[1]), der leider nicht die allgemeine Beachtung gefunden hat, die ich für ihn in Aussicht nahm, die eigentliche Wurzel von Hamiltons Entdeckungen auf dem Gebiete der allgemeinen Dynamik! In den Anmerkungen zu der demnächst in Ostwalds Klassikern erscheinenden deutschen Übersetzung von Hamiltons dynamischen Abhandlungen wird Herr Heun dieses Sachverhältnis erneut darlegen. Ich kann nur den Wunsch aussprechen, dafs die schwer zugänglichen und sehr zerstreuten optischen Abhandlungen Hamiltons ebenfalls gesammelt dem grofsen Publikum zugänglich gemacht werden möchten; eine solche Publikation würde nicht nur historisches Interesse haben, sondern auch ohne Zweifel auf unsere heutigen Ideenbildungen nach vielen Richtungen klärend und fördernd einwirken.[2])

---

1) Verhandlungen 1891, zweiter Teil, pg. 4ff. Siehe auch Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. I., pg. 35ff. Ich habe den Gegenstand seitdem in meinen Vorlesungen über Mechanik wiederholt eingehend entwickelt.

2) Hr. Bruns schreibt mir zu der Entwickelung des Textes noch folgende Bemerkungen: „Der Zusammenhang zwischen der charakteristischen Funktion und dem Eikonal bleibt bestehen, wenn man annimmt, dafs das Lichtteilchen bei jeder Brechung eine gewisse von dem Orte des Brechungspunktes abhängende Verzögerung erfährt, wobei es gleichgültig ist, ob die Brechungspunkte wie gewöhnlich eine Fläche oder aber einen körperlichen Raum erfüllen. — Im übrigen liefert der von mir betretene Weg als Entgelt für die umständlichere Herleitung den Nachweis, dafs die meisten Sätze der geometrischen Optik gar nicht optischer Natur sind, sondern der reinen Liniengeometrie angehören."

Räumliche Kollineation bei optischen Instrumenten.

Von F. Klein in Göttingen.

Das im Folgenden abzuleitende Resultat ist an sich nicht neu, sondern findet sich bereits in der (in der vorstehenden Notiz besprochenen) Abhandlung von Bruns über das Eikonal. Während es aber dort nur beiläufig inmitten umfangreicher analytischer Entwickelungen auftritt, soll dasselbe hier direkt durch bloſse geometrische Betrachtung abgeleitet werden. Das Problem ist, zu entscheiden, welche Beziehung zwischen Objekt und Bild bei einem *absoluten* optischen Instrument bestehen mag, d. h. bei einem Instrument, das alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkte des Objektraums ausgehen, genau wieder in einen Punkt des Bildraums vereinigt.

Die nächstliegende Bemerkung, die man vom geometrischen Standpunkte aus machen wird, ist die, daſs die Beziehung zwischen Objektraum und Bildraum jedenfalls *kollinear* sein muſs (vergl. Czapski, Theorie der optischen Instrumente nach Abbe, Breslau 1893). In der That sind ja die beiden Räume von vornherein derart aufeinander bezogen, daſs jeder geraden Linie des einen Raums (jedem Lichtstrahl) immer eine gerade Linie des anderen Raumes (der zugehörige Lichtstrahl) entspricht, — da aber nach Voraussetzung die Beziehung zugleich eine *punktweise* sein soll, so kommt man auf Grund der Moebiusschen Netzkonstruktion in bekannter Weise zu einer Kollineation. Hierbei hat man, was den funktionentheoretischen Charakter der Abbildung des einen Raumes auf den zweiten angeht, nichts anderes vorauszusetzen, als die *Stetigkeit* der Beziehung; daſs die Abbildung eine *analytische* ist, ergiebt sich aus dem Beweisgange, demzufolge sie eine Kollineation ist, als ein beiläufiges Resultat.

Es kommt nun darauf an, einzusehen, daſs die statthabende Kollineation von sehr spezieller Art ist. Zu dem Zwecke ziehe ich ein Hilfsmittel heran, welches den Geometern an sich sehr geläufig ist, aber in der Optik wohl kaum noch Verwendung fand, nämlich die Betrachtung *imaginärer* gerader Linien oder Lichtstrahlen. („Lichtstrahl"

und „gerade Linie“ sollen dabei als Synonyma gelten, d. h. von der Richtung, in welcher die gerade Linie vom Lichte durchlaufen wird, soll nicht weiter die Rede sein). Und zwar betrachte ich den Verlauf der Brechung unter der Annahme, dafs der einfallende Strahl eine *Minimallinie* ist, d. h. eine imaginäre gerade Linie, welche den Kugelkreis schneidet. Dabei werde ich für imaginäre Linien dieselben Formeln in Anwendung bringen wie für reelle. Um allen Zweifeln aber, die in dieser Hinsicht aufgeworfen werden möchten, von vornherein zu entgehen, will ich ausdrücklich voraussetzen (was in *praktischer* Hinsicht keinerlei Beschränkung bedeutet), dafs alle brechenden Flächen des Instruments *algebraische Flächen* seien.

Überlegen wir auf Grund der so getroffenen Verabredung zunächst das elementare Brechungsgesetz: Für eine Minimallinie ist der Sinus des mit der Flächennormalen gebildeten Winkels bekanntlich unendlich grofs und umgekehrt ist durch die Forderung eines unendlich grofsen Sinus eine Minimallinie charakterisiert. Es folgt also, dafs, *wenn der einfallende Strahl längs einer Minimallinie verläuft, das Gleiche für den gebrochenen Strahl der Fall sein mufs.* — Mit diesem Schlufs haben wir im Grunde bereits die ausreichende Grundlage für die folgende Überlegung. Nur der Genauigkeit wegen mufs noch ein kleiner Exkurs eingeschaltet werden:

Es giebt *zwei* Minimallinien, welche durch den Treffpunkt des einfallenden Strahles innerhalb der Einfallsebene verlaufen: die eine fällt mit dem einfallenden Strahle selbst zusammen, die andere mit seinem Spiegelbilde. *Welche von diesen beiden Linien den gebrochenen Strahl darstellt, bleibt unbestimmt.* Das Brechungsgesetz enthält nämlich, wenn man es in Cartesischen Koordinaten ausdrückt, eine Quadratwurzel, über deren Vorzeichen wir hier, wo wir im Imaginären operieren, nichts Bestimmtes aussagen können. Es hat keinen Zweck, dafs ich dies hier im einzelnen erläutere, vielmehr werde ich mich kurzweg dahin ausdrücken, *dafs ein Minimalstrahl bei jeder Brechung in zwei Minimalstrahlen verwandelt wird* (von denen der eine mit dem einfallenden Strahl selbst, der andere mit seinem Spiegelbilde zusammenfällt). Haben wir n brechende Flächen, so haben wir als schliefsliches Resultat der Brechung 2^n Minimalstrahlen; — der eine derselben fällt immer noch mit dem ursprünglichen Minimalstrahl zusammen, er hat das Instrument durchdrungen „als wenn es ein Röntgenstrahl wäre“, die anderen erhält man, indem man an einer beliebigen Zahl der auf einander folgenden n brechenden Flächen Spiegelung hinzutreten läfst. —

Die hiermit besprochene Komplikation hindert nun nicht, hinsichtlich der kollinearen Abbildung, welche das vorausgesetzte absolute

Instrument vermittelt, einen einfachen Schlufs zu ziehen. In der That: eine kollineare Abbildung ist für alle Linien des Raumes eindeutig; an ihr wird also von den 2^n Minimalstrahlen, die aus einem einfallenden Minimalstrahl bei der Brechung im Instrument entstehen, nur *einer* partizipieren können; die ganze Komplikation kommt, soweit wir uns auf die Betrachtung der in Rede stehenden kollinearen Abbildung beschränken, in Wegfall. Wir sagen kurzweg:

Die Kollineation zwischen Objektraum und Bildraum ist so beschaffen, dafs jeder Minimalstrahl des ersteren einen Minimalstrahl des letzteren liefert.

Oder noch kürzer:

Der Kugelkreis des Objektraums geht in den Kugelkreis des Bildraums über.

Das aber will besagen, dafs unsere Kollineation in der That eine sehr spezielle ist, dafs sie eine *Ähnlichkeitstransformation* ist.[1]) Diese Ähnlichkeitstransformation kann dabei noch eine direkte oder eine inverse sein (d. h. eine solche, bei der sich rechts und links vertauscht).

Hiermit haben wir bereits das Hauptstück des abzuleitenden Resultates; wir werden dasselbe vervollständigen, wenn wir nun noch den *Modul der Ähnlichkeitstransformation* festlegen. Ich will der Allgemeinheit wegen annehmen, dafs die Lichtgeschwindigkeit c im Objektraum von der Lichtgeschwindigkeit c' im Bildraum verschieden sei. Der Satz ist dann einfach der, *dafs sich die Dimensionen des Objektraums zu den Dimensionen des Bildraums verhalten wie c zu c'.*[2]) Ist also insbesondere $c = c'$, so haben Objektraum und Bildraum gleiche Abmessungen, *sie sind direkt oder spiegelbildlich kongruent* (was das eigentliche hier abzuleitende Resultat ist). —

Zum Beweise ziehen wir nur mehr reelle Raumelemente in Betracht und nehmen übrigens an die Vorstellungsweisen Anschlufs, von denen in der vorstehenden Notiz („Über das Brunssche Eikonal“) die Rede war. Dabei werden wir uns so ausdrücken, als sei die Ähnlichkeitstransformation, die unser Instrument vermittelt, eine direkte; sollte es eine inverse sein, so könnte man das Instrument durch Hinzufügen eines ebenen Spiegels vervollständigen und dadurch die zunächst inverse Ähnlichkeit in eine direkte verwandeln.

---

1) Vgl. Bruns, *Eikonal*, pag. 370.

2) Dieser Satz steht bei Bruns zwischen den Zeilen. Herr Bruns schreibt mir in dieser Hinsicht: „Der Modul μ wird in Zeile 5 von Seite 370 (der Abhandlung über das Eikonal) gleich E gefunden, Die Gröfse E ist aber, wie die Sätze des Textes zwischen Formel (91) und (92) lehren, identisch mit dem in (51b) angesetzten Quotienten $h : N$ des Raumindices.“

Wir wollen jetzt einfach die *Zeit* betrachten, welche das Licht gebraucht, um von einem beliebigen Objektpunkt (den ich x, y, z nennen will) zum entsprechenden Bildpunkte (der x', y', z' heifsen soll) zu gelangen. Diese Zeit mufs für alle von x, y, z auslaufenden Strahlen dieselbe sein. Anderenfalls würden sich nicht alle diese Strahlen, wie doch die Voraussetzung ist, in x', y', z' wieder vereinigen können, vielmehr würden, nach dem Prinzip von Johann Bernoulli, nur diejenigen Strahlen Objektpunkt und Bildpunkt verbinden, für welche diese Zeit ein Minimaximum ist. Ich werde die betreffende Zeit also als Funktion von x, y, z allein bezeichnen dürfen:

$$T = X(x, y, z).$$

Es seien jetzt x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 zwei neue Objektpunkte, welche vom Punkte x, y, z um das gleiche Stück r abstehen (aber übrigens beliebig angenommen werden sollen). Das uns noch unbekannte Ähnlichkeitsverhältnis von Bildraum und Objektraum bezeichnen wir vorübergehend mit λ. Dann werden also die Bildpunkte x'_1, y'_1, z'_1 und x'_2, y'_2, z'_2 unserer neuen Objektpunkte von dem Bildpunkte x', y', z' des ursprünglichen Objektpunktes beide um λr abstehen. Ich werde mich jetzt so ausdrücken, dafs ich annehme, der Lichtstrahl, welcher von x, y, z nach x_1, y_1, z_1 hinläuft, durchdringe weiterhin unser Instrument und erreiche nach einem endlichen Wege die zugehörigen Bildpunkte[1]); er wird dann, wegen der *direkten* Ähnlichkeit, zuerst auf x', y', z', und erst hinterher auf x'_1, y'_1, z'_1 treffen. Die Zeit, welche das Licht gebraucht, um von x, y, z nach x_1, y_1, z_1 zu gelangen, ist $\frac{r}{c}$, die entsprechende Zeit, welche auf das Stück von x', y', z' bis x'_1, y'_1, z'_1 entfällt, $\frac{\lambda r}{c'}$. Wir schliefsen, dafs die Funktion X für den Punkt x_1, y_1, z_1 den Wert hat:

(1) $$X(x_1, y_1, z_1) = X(x, y, z) - \frac{r}{c} + \frac{\lambda r}{c'}.$$

Genau so kommt natürlich (bei den entsprechenden Annahmen):

(2) $$X(x_2, y_2, z_2) = X(x, y, z) - \frac{r}{c} + \frac{\lambda r}{c'}.$$

Also:

(3) $$X(x_1, y_1, z_1) = X(x_2, y_2, z_2).$$

Nun sind aber die hier benutzten Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 im wesentlichen zwei ganz beliebige Objektpunkte. Denn die Bedingung,

1) In dieser Annahme liegt nichts Wesentliches, sondern nur eine Fixierung der weiterhin auftretenden Vorzeichen.

durch die sie ursprünglich eingeführt wurden: von einem anderen Objektpunkte x, y, z die gleiche Entfernung r zu haben, legt ihnen in Wirklichkeit gar keine Beschränkung auf, und die anderen Annahmen, die wir machten, hatten nur den Zweck leichterer Ausdrucksweise. *Es folgt, dafs die Zeit* $X(x, y, z)$ *für alle Objektpunkte dieselbe ist;* sie ist eine für unser „absolutes" Instrument charakteristische Konstante. Dann aber ist auch in (1), bez. (2) $X(x_1, y_1, z_1)$, resp. $X(x_2, y_2, z_2)$ gleich $X(x, y, z)$, woraus $\lambda = \frac{c'}{c}$ folgt, was zu beweisen war. —

Hiermit dürfte die anfängliche Fragestellung vollkommen erledigt sein. Das Resultat hat etwas Enttäuschendes. Um bei der Annahme $c = c'$ zu bleiben: das Instrument wirkt wie ein ebener Spiegel oder eine Zusammenstellung mehrerer ebener Spiegel; es ist als Teleskop wie als Mikroskop gleich unbrauchbar. Hieran ist nun nichts zu ändern; was ich noch hinzuzufügen habe, bezieht sich nur mehr auf die Beseitigung eines mathematischen Bedenkens, welches man gegen die Richtigkeit des Resultates haben könnte.

Das Resultat steht nämlich scheinbar in Widerspruch mit der wohlbekannten Thatsache, dafs sich die Objektpunkte und Bildpunkte, die auf der Achse eines optischen Instrumentes liegen, in *allgemeinster Weise* linear entsprechen und dafs man in Übereinstimmung hiermit bei kleiner Winkelöffnung des Gesichtsfeldes mit Annäherung von einer kollinearen Abbildung der Objektpunkte in der Nähe der Achse auf ihnen entsprechende Bildpunkte reden kann, die gewifs keine Ähnlichkeitstransformation oder gar kongruente Transformation ist. Ich werde noch kurz zeigen, dafs dieser Widerspruch wegfällt, wenn man sich das Zustandekommen der angeführten Thatsache in geeigneter Weise klar macht.[1])

Zu dem Zwecke begnügen wir uns, wie es gewöhnlich geschieht, damit, unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen Strahlen des Objektraums zu richten, die in einer beliebigen, durch die Achse des Instruments gelegten Meridianebene liegen. Die entsprechenden Strahlen des Bildraums werden dieselbe Meridianebene erfüllen. *Man hat eine Beziehung der Strahlen zweier ebener Strahlenfelder.* Und nun genügt es, wie ich behaupte, diese Beziehung als *analytisch* vorauszusetzen und anzunehmen, dafs man bei Betrachtungen in der Nähe des einzelnen Strahles in erster Annäherung nur *die linearen Glieder der Taylorschen Entwickelung* beizubehalten braucht, um alle die für die Achse des Instruments, beziehungsweise ihre Umgebung, aufgestellten Beziehungen, soweit sie

---

1) Ich kann auch hier auf Bruns verweisen; *Eikonal*, pag. 410, Formel (176).

sich auf die Strahlen der einzelnen Meridianebene beziehen, in allgemeinster Form zu erhalten. (Die Achse hat dabei innerhalb der einzelnen Meridianebene gar nichts Ausgezeichnetes; sie bekommt ihre gesonderte Stellung nur dadurch, daſs sie allen Meridianebenen zugleich angehört).

In der That, man substituiere einen Augenblick, um geläufigere Verhältnisse vor Augen zu haben, an Stelle der beiden ebenen Geradenfelder zwei ebene Punktfelder; ihre gegenseitige Beziehung sei durch die *analytischen* Gleichungen gegeben:

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y).$$

Handelt es sich dann nur um solche Punkte (x, y), die in der Nähe einer festen Stelle (x_0, y_0) liegen, so wird man in erster Annäherung schreiben dürfen:

$$x' = x'_0 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0),$$

$$y' = y'_0 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_0 (y - y_0).$$

Man drückt dies gewöhnlich (z. B. in der Kartographie) so aus, daſs man sagt: *die Umgebung des Punktes x_0, y_0 wird auf die Umgebung des Punktes x'_0, y'_0 in erster Annäherung affin abgebildet.* Speziell wird das Büschel der von x_0, y_0 auslaufenden Fortschreitungsrichtungen $\frac{y-y_0}{x-x_0}$ auf das Büschel der von x'_0, y'_0 auslaufenden Fortschreitungsrichtungen $\frac{y'-y'_0}{x'-x'_0}$ *in allgemeinster Weise projektiv abgebildet* (was eine nicht bloſs approximative sondern genaue Aussage ist).

In den so gegebenen Entwickelungen und Aussagen braucht man nun nur die Punkte x, y, bez. x', y', nach dem Prinzip der Dualität durch gerade Linien zu ersetzen, um die Theoreme zu erhalten, die für die ebenen Strahlfelder, bez. die innerhalb der einzelnen Meridianebene in der Nähe der Instrumentenachse stattfindenden optischen Beziehungen gelten. (Für Lichtstrahlen, welche windschief zur Instrumentenachse verlaufen, muſs hernach noch eine ergänzende Untersuchung hinzukommen). —

Und nun erledigt sich der genannte scheinbare Widerspruch dadurch, daſs die Betrachtungen, welche wir jetzt anstellten, mit den früheren, die auf der Moebiusschen Netzkonstruktion ruhten, gar nichts zu thun haben. Unsere neuen Betrachtungen gehen von der Möglichkeit der Taylorschen Entwickelung, bez. von der Annahme aus, daſs man diese mit den linearen Gliedern abbrechen dürfe, — sie sind nur insoweit genau richtig, als es sich um das generelle Entsprechen der Punkte

auf der Achse handelt, und gehören übrigens in das Gebiet der Approximationsmathematik —, die Moebiussche Netzkonstruktion dagegen trägt den Charakter der modernen Präzisionsmathematik; sie operiert prinzipiell nur mit endlich verschiedenen Linien und setzt von Hause aus nichts anderes als die Stetigkeit der in Betracht kommenden Abbildung voraus. Dies Beides ist so verschieden wie möglich. Der Eindruck, dafs es sich um zusammengehörige Überlegungen handeln möchte, ist nur durch den äufseren Umstand hervorgerufen, dafs beidemal zum Schlufs eine lineare Beziehung herauskommt.

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgabe der Académie Royale de Belgique für das Jahr 1903.

„Trouver, en hauteur et en azimut, les expressions des termes principaux des déviations périodiques de la verticale, dans l'hypothèse de la non-coïncidence des centres de gravité de l'écorce et du noyau terrestres.“ Höhe des Preises Frs. 600.—. Die Arbeiten müssen in französischer oder vlämischer Sprache abgefafst und vor dem 1. August 1903 portofrei an den ständigen Sekretär (à M. le Secrétaire perpétuel, au Palais des Académies, Bruxelles) eingesandt werden. Die Akademie verlangt die gröfste Genauigkeit in den Verweisen (Auflage und Seiten der angeführten Werke). Nur Handzeichnungen oder Photogramme sind zulässig. Die Verfasser schreiben auf ihre Arbeit nicht ihren Namen, sondern einen Wahlspruch, den sie auf einem, ihren Namen und ihre Adresse enthaltenden geschlossenen Umschlage wiederholen; ein Pseudonym zu gebrauchen ist nicht gestattet.

Petition, betreffend die alljährliche Veröffentlichung von Ephemeriden für die Dezimalteilung des Quadranten.

Die bemerkenswerten Versuche, welche unter Leitung des Kommandanten Guyou in der französischen Marine ausgeführt worden sind, haben erwiesen, dafs die Dezimalteilung des rechten Winkels in der Nautik die gröfsten Dienste leisten würde. Das einzige Hindernis für die Anwendung dieser rationellen Winkelteilung bildet der Mangel an entsprechenden Ephemeriden.

Die Fachzeitschrift Moniteur de l'Horlogerie, in deren Spalten man ausgedehnte Artikel über die Vorzüge dieser Winkelteilung und über die Hilfsmittel für deren praktischen Gebrauch findet, hat eine Petition eröffnet, die an den französischen Unterrichtsminister gerichtet werden soll, um ihn zu ersuchen, alljährlich derartige Ephemeriden veröffentlichen zu lassen.

Zustimmungs-Erklärungen sind an den Moniteur de l'Horlogerie, 26, rue de Grammont, Paris, zu richten.

Auskünfte und Anfragen.

Fr. M., K. — Nicht nur die Vermutung, daſs die vor zwei Jahren von Herrn W. Goering angegebene *rein geometrische* Rektifikation und *Quadratur des Kreises* nicht die erste ihrer Art sei, bestätigt sich, sondern es ist sogar genau dieselbe Konstruktion und auch mit derselben Begründung vor langer Zeit von H. Scheffler veröffentlicht worden, zuerst in seiner Schrift „Über das Verhältnis der Arithmetik zur Geometrie, inbesondere über die geometrische Bedeutung der imaginären Zahlen", Braunschweig 1846, in der Anmerkung am Fuſs der Seiten 108—111 (hier nur der Fall des Halbkreises betrachtet), dann in Grunerts Archiv der Mathematik und Physik, Bd. XIII, 1849, S. 419—423 (hier auch für beliebige Kreisbögen).

M.

O. U., B. — Der „Reformwinkel", von welchem Herr Fr. Schilling an fraglicher Stelle spricht, ist von Prof. O. Bürklen in Schwäb. Gmünd erdacht worden. Er hat beim Zeichnen an der Wandtafel entschiedene Vorzüge vor dem gewöhnlichen Zeichenwinkel. M.

Anfrage. Als Jahr der Erfindung des *logarithmischen Rechenstabes* durch Edm. Gunter wird gewöhnlich 1624 angegeben, in welchem Jahre Gunters gesammelte Werke erstmals erschienen. Dagegen steht in dem Dictionary of National Biography von Leslie Stephan und Sidney Lee, vol. 23 p. 350, Gunter habe die Anwendung seines Stabes mit den logarithmischen Linien für die Zahlen, sin und tg schon in seinem Canon Triangulorum, London, 1620, gezeigt. Kann jemand diese Angabe bestätigen? Dem Unterzeichneten ist nur die 4. Aufl. der Werke (1662) zugänglich, die keine Entscheidung giebt. R. Mehmke.

Bücherschau.

F. Kölmel, Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projektiver Massbestimmung. Untersuchungen zur Nichteuklidischen Geometrie. Lahr i. B. 1900. 99 S. 8^0, eine Figurentafel.

Angeregt durch das einleitende Kapitel der *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* von R. Fricke und F. Klein (Leipzig 1897) giebt der Verfasser weitere Ausführungen zur Lehre von den zu einer projektiven Maſsbestimmung gehörenden Bewegungen und symmetrischen Umformungen der Ebene. Seine Absicht ist dabei die gröſste Allgemeinheit zu erreichen, indem er, wie Sophus Lie sich einmal ausdrückte, mit voller Musik arbeitet, d. h. die Untersuchung im komplexen Gebiete anstellt. Die Darstellung ist stellenweise ziemlich breit, und es wird viel Bekanntes noch einmal gebracht. Neue Ergebnisse von hervorstechendem Interesse sind nicht zu vermelden, denn die „dualistisch polaren Linienkoordinaten", auf die der Verfasser besonderen Wert legt, hat bereits 1899 Herr Hausdorff (Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie) in den Leipziger Berichten eingeführt und mit Erfolg angewandt. PAUL STÄCKEL.

Neesen, Dr. F., Die Physik in gemeinfaſslicher Darstellung. Verlag von Vieweg, 1900. 357 S.

An guten Lehrbüchern der Physik fehlt es, zumal seit etwa einem Jahrzehnt, durchaus nicht; allein, da es sich bei einem Lehrbuch doch stets um eine bestimmte Auswahl aus der gewaltigen Stoffmenge handeln kann, welche vorliegt, so wird ein weiteres Werk, in welchem entweder für bestimmte Gruppen von Berufen diese Auswahl getroffen oder der Stoff in origineller Darstellung geboten ist, recht wohl noch im Stande sein, sich einen gröſseren Leserkreis zu schaffen. Hier ist beides der Fall.

Das vorliegende Werk dürfte vorzugsweise für Offiziere, Techniker, Mediziner, Studierende an technischen Hochschulen und Lehrer an höheren Lehranstalten, insbesondere an Oberrealschulen berechnet sein. Die praktischen Anwendungen sind in den Vordergrund gerückt, die Theorien zurückgedrängt. So findet man hier Gegenstände, wie den Typendrucktelegraph von Hughes, die Wattmesser, das polarisierte Läutewerk, den Telephonograph, die verkürzten Fernrohre u. s. w. abgehandelt, die man in zahlreichen Lehrbüchern aus der neuesten Zeit vergeblich suchen wird. Besonders angenehm berührt die Lektüre der Kapitel Elektrizität und Magnetismus; man erkennt hier deutlich die Wirkung der Erfahrungen,

welche der Verfasser in längerer Reihe von Jahren als Lehrer der Physik sowie in seiner kritischen Thätigkeit am Patentamt sich verschafft hat. Für Lehrer sei auf die vorzüglich klaren schematischen Figuren z. B. des Paccinottischen Ringes bei den Gleichstromerzeugern, das Modell für Stromverzweigung u. a. aufmerksam gemacht; dafs manche der Figuren aus sonstigen Werken des Viewegschen Verlages entnommen sind, thut der Güte des Buches natürlich keinen Eintrag.

Die Eigenart der Darstellung tritt aufser in den elektrotechnischen Teilen, besonders in der Mechanik zu Tage, wo der Verfasser die Gedankengänge und Hifsmittel der höheren Mechanik für seine Elementarmechanik zu verwenden sucht; daher führt er früh das D'Alembertsche Prinzip ein und sucht mit Hilfe desselben die fundamentale Bedeutung des Schwerpunktes hervorzuheben, die Ableitung des Ausdrucks für Zentripetalbeschleunigung ist nach einem einfachen, von der Art der neuesten anderen Lehrbücher etwas abweichenden Verfahren gegeben. Der aufmerksame Leser stöfst in diesen Abschnitten auf mehrere eindringende und tief durchdachte Erklärungen. Auf das Neesensche Modell für gleitende und rollende Reibung bei der Lokomotive seien die Inhaber von physikalischen Instituten defshalb hingewiesen, weil dieses Modell selten anzutreffen ist. Über die Frage, ob bei dem prinzipiellen Bestreben, durch elementar-geometrische und -mechanische Betrachtungen zu den Resultaten zu gelangen, die Verwendung des Differentialquotienten nicht besser ganz vermieden worden wäre, läfst sich streiten; wenn ferner manche Rechnungsresultate nicht abgeleitet werden, so hatte dazu der Verfasser seine bestimmten Gründe, über die er im Vorwort sich ausspricht.

Wir sind überzeugt, dafs das Werk wegen seiner gedrängten und doch sehr klaren Darstellung und wegen der für die genannten Zwecke vorzüglichen Auswahl des Stoffes sich zahlreiche Freunde erwerben wird.

C. Cranz.

J. H. Cotterill, Applied Mechanics. 5. Aufl. 8⁰. London 1900. Preis 18 sh.

Im Jahre 1858 gab W. J. M. Rankine sein Handbuch über angewandte Mechanik zum ersten Male heraus. An dieses Werk schliefsen sich die nachfolgenden englischen Autoren, welche diesen Gegenstand für Unterrichtszwecke behandelt haben, in der Anordnung des Stoffes und der Darstellung ziemlich eng an. Nur J. Perry zeigt in seinem Applied Mechanics (1899) eine deutlicher ausgeprägte Selbständigkeit.

Das vorliegende Buch von J. H. Cotterill ist — nach Angabe des Verfassers — ganz und gar auf der Grundlage des Rankineschen Werkes aufgebaut. Diese Anlehnung bezieht sich aber, namentlich in Rücksicht auf die Ausgestaltung des Stoffes, wie er in der neuesten Auflage vorliegt, mehr auf die allgemeine Gliederung des Inhaltes und die formale Auffassung und Verwertung der allgemeinen mechanischen Prinzipien als auf die Durchführung im Einzelnen.

In der Statik des Fachwerkes zeigt die Darstellung ein moderneres Gepräge als die letzte Auflage (1898) von Rankines „Manual", wenn auch die neuesten Theorien — vielleicht aus methodischen Rücksichten — noch keine Aufnahme gefunden haben.

In der Kinematik der Mechanismen schliefst sich der Verfasser eng an Reuleaux und Grashof an. Dafs auch daneben die ältere Arbeit von Willis zu ihrem Rechte gekommen ist, erscheint selbstverständlich.

Die Kinetik der Mechanismen ist im Einzelnen mit grofser Sorgfalt durchgeführt. Es ist zwar hier nicht immer Alles geboten, was ein in der Praxis stehender Ingenieur — bei den heutigen Anforderungen der Technik — nötig hat. Dafür ist aber, dem elementaren Charakter des Werkes entsprechend mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des Anfängers, der mit der Materie selbst noch nicht genügend vertraut ist, durchweg eine gründliche Belehrung und eine leicht verständliche Einführung in die Theorie der dynamischen Vorgänge (Massenwirkung beim Kurbelmechanismus, Reibung in den Gelenken, Wirkung des Regulators u. s. w.) gegeben, deren Wert nicht unterschätzt werden darf.

Die Festigkeitslehre im engeren Sinne, die Stofsvorgänge und die Theorie der kleinen Schwingungen sind innerhalb der Grenzen durchgeführt, welche durch die Beschränkung auf elementare mathematische Hilfsmittel bedingt sind.

In der Hydraulik ist die beschreibende und sachlich erklärende Darstellungsform vorherrschend, wodurch dem Anfänger, der zunächst Orientierung wünscht, am besten gedient ist.

Bei der Thermodynamik konnte naturgemäfs mehr die theoretische Seite hervorgehoben werden, da hier die mathematischen Hilfsmittel an und für sich elementarer Natur sind. K. Heun.

Schröder, Dr. **John, Darstellende Geometrie.** Erster Teil: Elemente der darstellenden Geometrie. (Sammlung Schubert XII.) VIII u. 282 S. Leipzig 1901. G. J. Göschensche Verlagshandlung.

Der Verfasser beginnt mit den Grundzügen der schiefen Parallelprojektion, die in den folgenden Abschnitten zur Herstellung anschaulicher Skizzen vielfach benutzt wird. Hieran schliefst sich als Hauptinhalt des Buches die Darstellung des Punktes, der Geraden und der Ebene in orthogonaler Projektion, dann die Darstellung der Vielflache mit den Aufgaben über ebene Schnitte und Durchdringungen. Die hierbei vom Verfasser angewendete Buchstabenbezeichnung ist nicht ganz folgerichtig; wenn nämlich P_1, P_2 und g_1, g_2 bez. die Projektionen des Punktes P und der Geraden g bedeuten, so sollten die Spuren einer Ebene nicht mit s_1, s_2, sondern etwa mit s', s'' bezeichnet werden. Die auf S. 192 behandelte Darstellung des regelmäfsigen Zwölfflachs läfst sich noch vereinfachen; dasselbe gilt von der Abwickelung des schiefen Prismas (S. 207) und von der Konstruktion des Schnittes einer Pyramide und einer Ebene nach dem Flächenverfahren (S. 208). — Der letzte Abschnitt giebt, zumeist ohne Beweis, eine Zusammenstellung verschiedenartiger Kegelschnittskonstruktionen, wobei allerdings gerade einige der für den praktischen Zeichner nützlichsten Methoden zu Gunsten einer Reihe von minder wichtigen übergangen werden.

Das Buch ist breit und leicht verständlich geschrieben und daher zu einer ersten Einführung, namentlich zum Selbststudium, wohl geeignet.

Braunschweig. R. Müller.

Neue Bücher.

Analysis.

BOWLY, ARTHUR L., Elements of Statistics. Diagram. 8vo. 328 p. London, King. 10 s. 6 d.

EDSER, EDWIN, Differential and Integral Calculus for Beginners. Adapted to the use of Students of Physics and Mechanics. Cr. 8vo, 254 p. London, Nelson. 2 s. 6 d.

NERNST, W. und SCHOENFLIES, A., Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefafstes Lehrbuch der Differential- u. Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie. 3. Aufl. gr. 8°. XII, 340 S. m. 68 Fig. München, Wolff. M. 10, geb. M. 11.50.

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

BEAU, O., Die Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse. III. Die ausführliche Berechnung der Sonnenfinsternisse. Progr. Sorau. 4°. 14 S. u. 1 Taf.

ETZOLD, R., Zeitbestimmung mittels des Passage-Instrumentes. gr. 8°. II, 95 S. m. 37 Abb. Leipzig, Diebener. M. 2.

HANDWÖRTERBUCH der Astronomie. 25. Lfg. Breslau, Trewendt. M. 3.60.

JAHRESBERICHT, astronomischer. Hrsg. v. Walt. F. Wislicenus. 2. Bd. enth. die Litteratur des Jahres 1900. gr. 8°. XXVI, 631 S. Berlin, Reimer. M. 19.

LEITFADEN für den Unterricht in der Navigation. Auf Veranlassung der Inspektion des Bildungswesens der Marine ausgearb. 3. Aufl. 4°. VIII, 312 S. m. 139 Abb. u. 8 Steindruck-Taf. Nebst Anhang: Nautische Rechnungen. gr. 4°. VI, 143 S. m. Abb. Berlin, Mittler & Sohn. M. 12.50, geb. in Leinw. M. 15; Leitfaden allein M. 10, geb. M. 11.25; Anh.allein M. 4, geb. 5.25.

LYNN, W. T, Celestial motions. 10 th ed. Cr. 8vo. London, Low. 2 s.

MILLER, WILH., Die Vermessungskunde. Ein Taschenbuch für Schule u. Praxis. 12°. IX, 164 S. m. 117 Abb. Hannover. Gebr. Jänecke. Geb in Leinw. M. 3.

NEUGEBAUER, P. V., Ein Beitrag zur Theorie der speziellen Störungen mit Anwendung auf eine Verbesserung der Bahn des Planeten (196) Philomela. Diss. Breslau. 4°. 48 S.

Darstellende Geometrie.

MEISEL, FERD., Praktische Beispiele zur Schattenkonstruktionslehre. Für den Gebrauch an Gewerbe- und Baugewerkschulen. gr. Fol. 20 Taf. m. III S. Text. Leipzig, Seemann & Co. In Mappe M. 15.

OETTINGEN, ARTH. v., Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens. gr. 8°. VII, 177 S. m. 209 Fig. Leipzig, Engelmann. M. 8, geb. M. 9.

ROHN, KARL und PAPPERITZ, ERWIN, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. (In 2 Bdn.) 1. Bd. 2. Aufl. gr. 8°. XX, 418 S. m. 327 Fig. Leipzig, Veit & Co. M. 12, geb. in Leinw. M. 13.

Schubert, Frz., Die darstellende Geometrie an maschinen-technischen Lehranstalten, Gewerbe- und Fachschulen. II. Tl. Die darstellende Geometrie, einschl. der Elemente der Projektionslehre, Schattenlehre, Axonometrie und Perspektive. B. gr. 8°. S. 259—559 m. Fig. Mittweida, Polytechn. Buchh. geb. in Leinw. M. 5.50.

Geschichte.

Hoppe, E., Zur Geschichte der Fernwirkung. Progr. Hamburg. 4°. 26 S.

Streit, H., Die wissenschaftlichen Forschungen und Entdeckungen des älteren Seebeck auf dem Gebiete der Optik und Wellenlehre. Progr. Schlawe. 4°. 15 S. u. 1 Taf.

Mechanik.

Encyklopädie der mathemat. Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. IV. Bd.: Mechanik. 2. Tl. Red. v. Fel. Klein. 1. Heft. gr. 8°. S. 1—147. Leipzig, Teubner. M. 3.80.

Föppl, Aug., Vorlesungen über technische Mechanik. (In 4 Bdn.) 4. Bd. Dynamik. 2. Aufl. gr. 8°. XV, 506 S. m. 69 Fig. Leipzig, Teubner. geb. in Leinw. M. 12.

Karstens, Heinr., Über gewisse asymptotische Lösungen der Differentialgleichungen der analytischen Mechanik. Diss. gr. 8°. 37 S. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.20.

Keck, Wilh., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. II. Tl.: Mechanik elastisch-fester und flüssiger Körper. 2. Aufl. gr. 8°. X, 380 S. m. 364 Holzschn. Hannover, Helwing. M. 12, geb. M. 13.50.

Königsberger, Leo, Die Principien der Mechanik. Mathematische Untersuchungen. gr. 8°. XII, 228 S. Leipzig, Teubner. Geb. in Leinw. M. 9.

Korn, Arth., Eine mechanische Theorie der Reibung in konstinuierlichen Massensystemen. gr. 8°. XII, 219 S. m. 5 Fig. Berlin, Dümmler. M. 6, geb. M. 7.

Löwe, F., Die Bahnen der Fuhrwerke in den Strafsenbögen. Eine ergänzende Untersuchung zu dessen „Strafsenbaukunde". gr. 8°. 21 S. m. 9 Abb. Wiesbaden, Kreidel. M 1.

Lorentz, H. A., Zichtbare en onzichtbare bewegingen. Voordrachten, op uitnoodiging van het departement Leiden der maatschappij „Tot nut van't algemeen" (cursus voor hooger onderwijs buiten de universiteit) in Februari en Maart 1901 gehouden. Leiden, Brill. gr. 8°. 4 en 176 blz. m. 40 fig. f. 2.50.

Mach, Ernst, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. (Internationale wissenschaftl. Bibliothek Bd. 59.) 4. Aufl. 8°. XIV, 550 S. m. 257 Abb. Leipzig, Brockhaus. M. 8, geb. M. 9.

Prandtl, L., Kipp-Erscheinungen. Ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht. Diss. München. 8°. 75 S. m. Abb. u. 2 Taf. Nürnberg, Ebner.

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. (In 2 Lfgn.) 1. Lfg. gr. 8°. 240 S. m. Fig. Leipzig, Teubner. M. 7.60.

Physik, Chemie, Geophysik und Astrophysik.

Abbott, T. K, Teorica elementare delle maree, e discussione della influenza che esercitano sulla durata del giorno. Versione dall' inglese approvata dall' autore del prof. Edoardo de Ferrari. Pistoia, tip. Flori. 8° fig. 69 p. L. 1.50.

Biske, F., Versuch einer Anwendung hydrodynamischer Untersuchungen auf die Protuberanzen der Sonne. Diss. Berlin. 8°. 37 S.

Borck, R., Interferenzkurven eines Wellensystems, welches mit einer Phasenverzögerung an einer festen Wand reflektiert wird. Prog. Liegnitz. 8°. 22 S.

DALCHOW. E., Mewes-Motor. Studie über Konstruktion und Theorie einer neuen Verbrennungskraftmaschine. gr. 8°. 52 S. Berlin, Dalchow. M. 1.50.

GRÜNEWALD, C., Zur Mathieu'schen Theorie der Transversalschwingungen elastischer Scheiben und ihrer Prüfung durch Barthélemy. Progr. Berlin. 4°. 24 S.

HANN, J., Lehrbuch der Meteorologie. 3—6. Lfg. Leipzig, Tauchnitz. je M. 3.

JAHRBUCH der Astronomie u. Geophysik. Enth. die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie u. physikal. Erdkunde. 11. Jahrg. 1900. gr. 8°. VIII, 379 S. m. 5 Taf. in Schwarzdr. Leipzig, Mayer. M. 7.

KAPP, A. W., Über vollständige Gefrierpunktskurven binärer Metalllegierungen, mit einer Einleitung: Studien über das Luftthermometer. Diss. Königsberg. 8°. 66 S. m. 1 Taf.

LAAR, J. 7. VAN, Lehrbuch der mathematischen Chemie. gr. 8°. XIX, 224 S. m. 28 Fig. Leipzig, Barth. M. 7, geb. in Leinw. M. 8.

MAHLER, G., Physikalische Formelsammlung. (Sammlung Göschen Nr. 136.) 12°. 202 S. m. 67 Fig. Leipzig, Göschen. geb. in Leinw. M. —.80.

NEUHOFF, OTTO, Adiabatische Zustandänderungen feuchter Luft und deren rechnerische u. graphische Bestimmung. (Abhandlungen des königl. preufsischen meteorolog, Instituts, I. Bd. Nr. 6.) Imp. 4°. 35 S. m. Fig. u. 1 Taf. Berlin 1900. Asher & Co. M. 3.

REIMANN, E., Die scheinbare Vergrösserung der Sonne und des Mondes am Horizont. Progr. Hirschberg. 4°. 38 S.

SACK, G., Ein Beitrag zur Untersuchung der täglichen Variationen der erdmagnetischen Inklination und Total-Intensität. Prog. Lübeck. 4°. 40 S. u. 1 Tab.

SCHRAMM, W., Über die Verteilung des Lichtes in der Atmosphäre. Diss. Kiel. 8°. 51 S. m. 2 Taf.

SERVUS, HERM., Die Störungen der Atmosphäre u. des Erdinnern durch Sonne u. Mond. Neue Grundlagen der Meteorologie. 2. Tl. Progr. 4°. 18 S. Berlin, Gaertner. M. 1.

WIENER, OTTO, Die Erweiterung unserer Sinne, Akademische Antrittsvorlesung. 8°. 43 S. Leipzig 1900, Barth. M. 1.20.

ZEUNER, GUST., Technische Thermodynamik. 2. Aufl. Zugleich 4. Aufl. der „Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie". 2. Bd. Die Lehre von den Dämpfen, gr. 8°. VIII, 463 u. XXIX S. m. 65 Holzschn. Leipzig, Felix. M. 14.

Tafeln.

ERNST, J., Abgekürzte Multiplikations-Rechentafeln f. sämtliche Zahlen von 2—1000. nebst e. Anhang, enth. die Quadratzahlen von 1—1000. gr. 8°. X, 503 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 4, geb. in Leinw. M. 5.

SCHULTZ, E., Vierstellige mathematische Tabellen. 4. Aufl. Ausg. f. Maschinenbauschulen. gr. 8°. XII, 108 S. Essen, Bädeker. In Leinw. kart. M. 1.40.

Verschiedenes.

DEL RE, ALF., Sulla struttura geometrica dello spazio in relazione al modo di percepire i fatti naturali. 3ª edizione, Napoli, Lorenzo Alvano. 8°. 47 p.

JAHRBUCH der Mathematik. 29. Bd. 3. Hft. Jahrg. 1898. Berlin, Reimer. M. 12.

KEMPE, H. R., The Engineer's Yearbook of Formulae, Rules, Tables, Data and Memoranda in Civil, Mechanical, Electrical, Marine, and Mine Engineering. Cr. 8vó. lr. London, Crosby, Lockwood & Son. 8 s.

MARC, LUDW., Sammlung der Aufgaben aus der höheren Mathematik, technischen Mechanik u. darstellenden Geometrie, welche bei der Vorprüfung für das Bauingenieur-, Architektur- und Maschinen-Ingenieurfach an der k. techn. Hochschule zu München in den J. 1885—1901 gestellt worden sind. gr. 8°. III, 52 S. m. Fig. München, Ackermann. M. 1.60.

Abhandlungsregister 1900—1901.

Von Prof. Dr. E. Wölffing in Stuttgart.

Unter diesem Titel werden künftig die Abhandlungen aus dem Gebiet der angewandten Mathematik verzeichnet, welche in circa 270 der wichtigsten Zeit- und Gesellschaftsschriften enthalten sind. Die Zeitschriften sind abgekürzt durch Buchstabengruppen bezeichnet, welche sich an die Abkürzungen der „commission du répertoire bibliographique des sciences mathématiques" anschliefsen. Zahlen, auf welche ein Punkt folgt, bedeuten Bandzahlen, alle übrigen Zahlen Seitenzahlen. Die Bandzahl wird weggelassen, wenn nur ein einziger Band ausgezogen wurde. Die russischen Titel sind in tschechischer Orthographie gegeben (c = z, č = tsch, s = ss, š = sch, z = s, ž = sh). Den russischen, tschechischen, polnischen und rumänischen Titeln ist eine deutsche Uebersetzung beigefügt. Die Anordnung geschieht systematisch nach Stichwörtern; Abhandlungen, die zu mehreren Stichwörtern gehören, stehen nur unter einem derselben, während bei den übrigen auf dasselbe verwiesen wird. In der letzten Abteilung (K. Technik) finden sich auch nichtmathematische, den Techniker interessierende Arbeiten erwähnt.

Wünsche aus dem Leserkreise betreffend das Abhandlungsregister erbittet sich der Verfasser (Stuttgart, Hackländerstr. 38).

Abkürzungen:

A.A.L. Atti della R. Acc. Lucchese di Scienze di Lettere ed Arti 30.

A.A.M. Abhandlungen der K. Bayr. Ak. der Wiss. Math.-Phys. Classe 20.

A.A.N. Atti della R. Acc. di Napoli (2) 10.

A.A.T. Atti della R. Acc. di Torino 35—36.

A.C.P. Annales de Chimie et de Physique, Paris (7) 19—22.

A.D.M. Annali di Matematica pura ed applicata, Milano (3) 4.

A.E.N. Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Paris (3) 17.

A.G.C. Atti della Accad. Gioënia di scienze naturali, Catania (4) 13.

A.G.G. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen (2) 1.

A.Gr. Archiv der Math. u. Physik, Leipzig (2) 17; (3) 1.

A.H. Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, Hamburg 28—29.

A.J.M. American Journal of Mathematics, Baltimore 22.

A.J.S. American Journal of Science, New-Haven (4) 9—11.

A.M. Acta Mathematica, Stockholm 24.

A.M.T. Archives du musée Teyler, Haarlem (2) 6—7.

A.N. Archives néerlandaises, Haarlem (2) 4—5.

A.N.K. Astronomische Nachrichten, Kiel 151—153.

A.of M. Annals of Mathematics, Cambridge Mass. (2) 1—2.

A.P.B. Bulletin der K. K. Ak. der Wiss. zu St. Petersburg (5) 12—13.

A.P.L. Annalen der Physik, Leipzig (4) 1—4.

A.S.B. Annales de la Soc. Scientifique de Bruxelles, Louvain 24—25.

A.S.G. Archives des sciences physiques et naturelles, Genève (4) 10.

A.T. Annales de la faculté de Toulouse (2) 2.

A.U.G. Annales de l'Université de Grenoble 12—13.

A.V.A.S. Bihang till K. Svenska Vetenskaps-Ak. Handlingar, Stockholm 25.

B.A.B. Bulletin de l'Ac. Roy. de Bruxelles 1900.
B.B. Blätter für das bayr. Gymnasial- und Realschulwesen, München 36—37.
B.B.L. Bulletino di Bibliografia e di storia delle science matematiche, Genova 3.
B.C. Bolletino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, Bologna 1.
B.D. Bulletin des sciences mathématiques, Paris (2) 24—25.
B.F.S. Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar, Helsingfors 42.
B.G. Beiträge zur Geophysik, Leipzig 4.
B.M. Bibliotheca mathematica, Leipzig (3) 1—2.
B.M.S. Bulletin de Mathématiques spéciales, Paris 6.
B.U.K. Nachrichten der K. K. Universität Kiew 1900.
B.V.A.S. Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akad. Förhandlingar, Stockholm 56—57.
C. Časopis pro pestovany math. a fysiki, Prag 29—30.
C.A.A. Verslagen der zittingen der K. Ak. van Wetensch., Amsterdam 8.
C.C.S. Colorado College Studies, Boulder Col. 8.
C.R. Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Acad. des Sciences, Paris 130—132.
Cr. Journal für reine und angewandte Math., Berlin 121—123.
C.W. Neues Correspondenzblatt für die Gelehrten- und Realschulen Württembergs, Stuttgart 7.
D.A.W. Denkschriften der K. K. Ak. Wien Math.-Nat.-Classe 68.
D.M.Z. Deutsche Mechanikerzeitung, Berlin 5.
D.V.M. Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Leipzig 8—9.
D.V.N. Verhandlungen der Deutschen Naturforscherversammlung, Leipzig 71.
E.M. L'Enseignement Mathématique, Paris 2—3.
G.B. Giornale di Matematiche, Napoli 38.
G.M.B. Gaceta Matematica, Bukarest 5—6.
I.M. L'Intermédiaire des Mathématiciens, Paris 7.
J.E. Journal de Mathématiques élémentaires, Paris (5) 5.
J.E.P. Journal de l'École Polytechnique, Paris (2) 5.
J.F.I. Journal of the Franklin Institution, Philadelphia 149.
J.M. Journal de Mathématiques pures et appliquées, Paris (5) 6.
J.P. Journal de Physique, Paris (3) 9—10.
J.S.M. Jornal de Sciencias mathematicas e astron, Porto 14.
J.T. Communications of the Mathematico-physical Society of Tokio 8.
J.U.T. Journal of the College of Science, Tokio 13.
K.D.P. Klimat, Petersburg 1.
M. Mathesis, Gand (2) 10.
M.A. Mathematische Annalen, Leipzig 53—54.
M.A.T. Memorie della R. Acc. di Torino (2) 49.
M.B. Mathematisch-Naturwissensch. Mitteilungen, Stuttgart (2) 2—3.
M.C. Mémoires de la Soc. nationale des Sciences naturelles et mathématiques, Cherbourg (4) 1.
M.G.G. Mitteilungen des Naturwiss. Vereins von Neuvorpommern und Rügen, Greifswald 31.
M.G.S. Mathematical gazette, Stroud (England) 1—2.
M.H. Monatshefte für Math. u. Physik, Wien 11—12.
M.M. Messenger of Mathematics, London (2) 30.
M.M.F. American Math. Monthly, Springfield 7—8.
M.P.O. Bote der Experimentalphysik und elementaren Mathematik, Odessa 25.
M.Z. Meteorologische Zeitschrift, Wien 17—18.
N. Nature, London 61—62.
N.A. Nouvelles Annales de Math., Paris (3) 19.
N.A.W. Nieuw Archief voor Wiskunde, Amsterdam (2) 5.
N.G.G. Göttinger Nachrichten 1900.
N.L.A. Atti dell'Acc. Pontificia de' Nuovi Lincei, Roma 53.
P.A.Bo. Proceedings of the Amer. Academy of arts and sciences, Boston 35—36.
P.C.P.S. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 11.
P.E.M.S. Proceedings of the Edinburgh Math. Society 18.
Pit. Il Pitagora, Palermo 7.
P.J.G. Preisschriften der Jablonowskischen Gesellschaft, Leipzig 36.
P.L.M.S. Proceedings of the London Math. Soc. 31.
P.M. Philosophical Magazine, London (5) 49—50; (6) 1.
P.M.R. Periodico di Matematica, Livorno (2) 2—3; Supplemento 3—4.
P.M.S. El Progreso matematico, Zaragoza (2) 2.
P.R.I.A. Proceedings of the Roy. Irish Academy, Dublin (3) 6.

P.R.S.L. Proceedings of the Royal Soc., London 66—67.
P.R.S.E. Proceed. Roy. Soc., Edinburgh 22.
P.Z. Physikalische Zeitschrift, Göttingen 1—2.
R.A.L.R. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Roma (5) 9—10.
R.A.N. Rendiconti della R. Acc., Napoli (3) 6—7.
R.C.L. Revista de Ciencias, Lima 3.
R.C.M.P. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo 14—15.
R.F.M. Rivista di fisica, mat. e scienze naturali, Pavia 1—3.
R.G.O. Revue générale des Sciences, Paris 11.
R.I.B. Rendiconto dell Acc. delle Scienze dell' Istituto di Bologna 1900.
R.M. Rivista di Matematica, Torino 7.
R.M.P. Sammelschrift der math. Gesellsch. Prag 4.
R.M.S. Revue de Math. spéciales, Paris 10.
S.A.B. Sitzungsber. der K. Ak. der Wiss., Berlin 1900.
S.A.M. Sitzungsber. der K. Bayr. Ak. der Wiss. Math.-Phys. Cl., München 30.
S.A.W. Sitzungsber. der K. K. Ak. Wien Math.-Nat. Classe 109.
S.G.M. Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften, Marburg 1900.
S.I.D. Sitzungsberichte der naturwiss. Gesellschaft Isis, Dresden 1900.
S.M. Bulletin de la Société Math. de France, Paris 28—29.
S.M.Am. Bulletin of the American Math. Soc., New-York (2) 6—7.
S.M.H. Mitteilungen der Math. Gesellsch., Hamburg 4.
S.M.Ka. Bulletin der physicomathemat. Gesellsch., Kasan (2) 10.
S.M.Kh. Mitteilungen der Math. Gesellsch., Charkow (2) 7.
S.M.M. Sammelschrift der Math. Gesellsch., Moskau 21.
S.N.M. Bulletin de la Soc. Impér. des Naturalistes, Moskau 1900.
S.N.J. Sitzungsber. der Naturforscherges., Jurjew 12.
S.P.M. Memoirs und Proceedings of the Literary and Philosophical Society, Manchester (5) 4—5.
S.V.K. Sitzungsberichte des naturwiss. Vereins für Schleswig, Kiel 11.
T.M. Nyt Tidskrift for Mathematik, Kjöbnhavn 11—12.
T.R.I.A. Transactions of the Roy. Ir. Acad., Dublin 31.
T.R.S.L. Philosoph. Transactions, London 193—195.
T.S.L. Transactions of the St. Louis Acad. of Science 10.
T.S.M.Am. Transactions of the Amer. Math. Soc., New-York 1.
T.W. Prace mat. fizyczne, Warschau 10.
U.M.N. Unterrichtsblätter für Math. u. Naturw., Berlin 6.
V.N.K. Verhandlungen des naturwiss. Vereins zu Karlsruhe 13.
V.N.Z. Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellsch., Zürich 45.
V.P.G. Verhandlungen der Deutschen Physikal. Gesellsch., Berlin 2.
W.M. Wiadomości mat., Warschau 5.
Z.I. Zeitschrift für Instrumentenkunde, Berlin 20—21.
Z.S. Zeitschrift für Math. u. Physik, Leipzig 45—46.
Z.V. Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart 29—30.

A. Allgemeines und Philosophie.

Geschichte der angewandten Mathematik.

1. *R. S. Woodward.* The century's progress in applied mathematics S.M.Am. 6. 133. Poln. Übersetzung: Postępi matematyki stosowanej w XIX stuleciu W.M. 17.

Logikkalkul.

2. *G. Peano.* Formules de logique mathématique. R.M. 1.

3. *P. Buffa.* Alcune formule di logica. R.M. 56.

4. *P. S. Poretzky.* Quelques lois ultérieures de la théorie des égalités logiques. S.M.Ka. 10. 50.

B. Analysis und Algebra.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

5. *L. Carlini.* Nota sulle origini del calcolo delle probabilità. Pit. 65.

6. *S. Dickstein.* Kilka uwag o określeniu prawdopodobieństwa matematycznego (Einige Bemerkungen über die Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit). W.M. 52.

7. *A. A. Markov.* O verojatnosti „a

posteriori" (Über Wahrscheinlichkeit a posteriori). S.M.Kh. 7. 23.

8. *J. Eggenberger*. Zur Darstellung des Bernouilli'schen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Z.S. 45. 43.

9. *P. A. Nekrasov*. Novyja osnovanija učenija o verojatnostjach summ i srednich veličin. (Neue Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Summen und Mittelwerte). S.M.M. 21. 579.

10. *A. Liapounoff*. Sur un théorème du calcul des probabilités. C.R. 132. 126.

11. *T. Brodén*. Wahrscheinlichkeitsbestimmungen der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung reeller Zahlen. B.V.A.S. 57. 239.

12. *A. Wiman*. Über eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe bei Kettenbruchentwicklungen. B.V.A.S. 57. 829.

13. *J. Gomoll*. Ableitungen von Formeln für die mathematische Wahrscheinlichkeit beim Würfelspiele nebst einigen Anwendungen. A. Gr. 17. 363.

14. *F. Galton*. A geometric determination of the median value of a system of normal variants, from two of its centiles. N. 61. 102.

15. *E. Zermelo*. Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dynamische Systeme. P.Z. 1. 317.

16. *R. J. Strutt*. On the tendency of the atomic weights to approximate to whole numbers. P.M. 1. 311.

17. *K. Pearson*. On some applications of the theory of chance to racial differentiation. P.M. 1. 110.

18. *K. Pearson*. On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. P.M. 50. 157.

19. *Estienne*. Valeur plausible d'une grandeur variable. C.R. 130. 393.

20. *Andrade*. A propos de deux problèmes de probabilité. C.R. 130. 395.

21. *L. Lindelöf*. Un problème de calcul des probabilités. B.F.S. 79.

22. *L. Lindelöf* et *C. Moreau*. Question 1580. I.M. 101. 338.

23. *C. Moreau*. Question 1768. I.M. 377.

24. *M. Stuyvaert*. Sur une réussite. M. 13.

Methode der kleinsten Quadrate.

25. *E. Hammer*. Beitrag zur Geschichte der Ausgleichungsrechnung. Z.V. 29. 613.

Fehlerrechnung.

26. *Estienne*. Sur la théorie des erreurs. C.R. 130. 66.

27. *W. Láska*. Über die Ausgleichungsrechnung. A.N.K. 153. 37.

28. *A. Blümcke*. Zur Jordan'schen Theorie des Maximalfehlers. Z.V. 30. 229.

29. *A. Klingatsch*. Zur graphischen Ausgleichung von Polygonzügen. Z.V. 29. 540.

30. *B. Weinberg*. Über die Wahrscheinlichkeit einer Fehlerverteilung. A.N.K. 153. 193.

31. *L. Krüger*. Über die Ausgleichung mit Bedingungsgleichungen bei der trigonometrischen Punktbestimmung durch Einschneiden. N.G.G. 1.

32. *C. Runge*. Graphische Ausgleichung beim Rückwärtseinschneiden. Z.V. 29. 581.

33. *G. v. Niessl*. Über die günstigsten Bedingungen zur Nachweisung der heliocentrischen Geschwindigkeit bei Meteorbeobachtungen. A.N.K. 152. 1.

Politische Arithmetik.

34. *L. Bachelier*. Théorie de la spéculation. A.E.N. 21.

35. *J. S. Stevens*. Forecasting the census returns. M.M.F. 160.

36. *H. v. Mangoldt*. Über eine Aufgabe der kaufmännischen Arithmetik. D.V.M. 9. 136.

Zinseszins- und Rentenrechnung.

37. *C. Hansen*. Renter og afdrag. T.M. 12. A. 36.

38. *C. Hansen*. En Annuitetsformel. T.M. 11. A. 65; 12. A. 15.

39. *C. Hansen*. Livrenter betalbare m Gange aarligt. T.M. 11. B. 58.

Statistik.

40. *W. T. Sheppard*. On the tabulation of certain frequency-distributions. P.M. 50. 393.

41. *M. F. Sheppard*. On the statistical rejection of extreme variations, single or correlated. P.L.M.S. 70.

42. *G. U. Yule*. On the association of attributes in statistics. P.R.S.L. 66. 22; T.R.S.L. 194. 257.

43. *K. Pearson*. Mathematical contributions to the Theory of evolution. P.R.S.L. 66. 140; 241; 324; T.R.S.L. 195. 1; 79.

44. *K. Pearson*. Data for the problem of evolution in man. P.R.S.L. 66. 316; 67. 159; 333.

45. *L. Camerano.* Lo studio quantitativo degli organismi. A. A. T. 35. 327; 650.

Siehe auch 17.

Versicherungsmathematik.

46. *Z. Czubalski.* Zagadnienie z teoryi ubezpieczenia ren na wypadek niezdolnósci do pracy (Über eine Aufgabe aus der Theorie der Rentenversicherung im Invaliditätsfalle). W. M. 59.

Spiele.

47. *F. Fitting.* Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe. Z. S. 45. 137.

48. *G. Cardoso-Laynes.* Problemi di biliardo P. M. R. Suppl. 4. fasc. 7. copertina.

Siehe auch 13.

Numerisches Rechnen.

49. *Parmentier.* Multiplication complémentaire. I. M. 285.

50. *E. Gelin.* Calculul patratului unui numâr (Berechnung des Quadrats einer Zahl). G. M. B. 6. 109.

51. *E. Jürgens.* Numerische Berechnung von Determinanten. D. V. M. 9. 131.

52. *C. Kassner.* Bequeme Berechnung der Koefficienten der Bessel'schen Formel. M. Z. 18. 81.

53. *W. St. Aldis.* On the numerical computation of the functions $G_0(x)$, $G_1(x)$ and $J.(x\sqrt{i})$ P. R. S. L. 66. 32.

Näherungsmethoden, analytische.

54. *B. Niewęglowski.* O metodzie skroconej wyciąganie pierwiastku kwadratowego z liczb (Über die abgekürzte Methode der Quadratwurzelausziehung). W. M. 63.

55. *Steiff.* Näherungsformeln für $\sqrt{x^2+y^2}$ Z. V. 30. 133. — *W. Wojtan* 135.

56. *W. Wojtan.* Wzory pry bliżone na $\sqrt{a^2+b^2}$ *i* $\sqrt{a^2-b^2}$ (Näherungsformeln für $\sqrt{a^2+b^2}$ und $\sqrt{a^2-b^2}$) W. M. 67.

57. *A. Emch.* Two hydraulic methods to extract the n[th] root of any number. M. M. F. 8. 10.

58. *K. Heun.* Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen. Z. S. 45. 23.

59. *E. Picard.* Sur un exemple d'appropinquations successives divergentes. S. M. 28. 137.

60. *A. Davidoglou.* Sur une application de la méthode des approximations successives. C. R. 130. 692; 1241.

Siehe auch 787.

Gleichungen, numerische.

61. *G. Meslin.* Sur une machine à résoudre les équations. J. P. 9. 339.

62. *E. Hammer.* Auflösung quadratischer Gleichungen mit dem Rechenschieber. Z. V. 29. 495. — *H. Zimmermann* 30. 58.

63. *P. J. E. Goedseels.* Étude sur la méthode de Tobie Mayer. A. S. B. 24. 37.

64. *O. Biermann.* Über die näherungsweise Bestimmung der Lösungen mehrerer Gleichungen. M. H. 11. 148.

Siehe auch 89, 96, 97.

Interpolation.

65. *G. Lazzeri.* Nozioni sul calcolo delle differenze. P. M. R. Suppl. 4. 81.

66. *V. Alberti.* Su le differenze di o. G. B. 117.

67. *A. v. Braunmühl.* Historische Untersuchung der ersten Arbeiten über Interpolation. B. M. 2. 86.

68. *W. Veltmann.* Nachtrag zu meiner Herleitung der Interpolationsformeln. Z. S. 45. 337.

69. *K. Lewicky.* Einige Bemerkungen über die Lagrange'sche Interpolationsformel. A. Gr. 17. 214

70. *P. A. Nekrasov.* *K* voprosu o približennom vyčislenii dalekago člena Lagranževa rjada. (Über die näherungsweise Berechnung eines hohen Gliedes der Lagrange'schen Reihe) S. M. M. 21. 431.

71. *N. Bougaiev.* Sur la série analogue à la série de Lagrange. C. R. 131. 793.

72. *W. F. Sheppard.* On central-difference formulae. P. L. M. S. 449.

73. *W. Laska.* Über das arithmetische Mittel. Z. V. 29. 593.

74. *W. Köppen.* Über Periodicität in meteorologischen Zahlenreihen. A. H. 29. 135.

75. *W. Meinardus.* Eine einfache Methode zur Berechnung klimatologischer Mittelwerte von Flächen. M. Z. 17. 241.

76. *E. D. Roe.* On a formula of interpolation. M. M. F. 8. 1.

77. *S. Pincherle.* Sopra un problema d'interpolazione. R. C. M. P. 14. 142.

Empirische Formeln.

78. *C. Runge.* Über die Vergleichung empirischer Formeln. Z. S. 45. 78.

79. *C. Runge*. Über empirische Formeln und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten. Z.S. 46. 224.

Tafeln.

80. *W. F. Sheppard*. A method for extending the accuracy of certain mathematical tables. P.L.M.S. 423.

Siehe auch 53, 837.

Logarithmen.

81. *E. Hoppe*. Notiz zur Geschichte der Logarithmentafeln. S.M.H. 54.

82. *H. C. Pocklington*. Mechanical methods of calculating logarithms. N. 61. 469.

83. *A. Dufton*. To calculate a simple table of logarithms. N. 61. 415.

C. Geometrie.

Nomographie.

84. *F. Villareal*. Nomografia. R.C.L. 162.

85. *M. d'Ocagne*. Sur quelques principes élémentaires de nomographie. B.D. 24. 286.

86. *M. d'Ocagne*. La nomographie dans l'enseignement. E.M. 2. 207.

87. *G. Pesci*. Abachi trigonometrici. P.M.R. 2. 201.

88. *G. Pesci*. Costruzione elementare di due abachi trigonometrici. P.M.R. Suppl. 3. 81; 97.

89. *M. d'Ocagne*. Sur la résolution nomographique de l'équation du 7. dégré. C.R. 131. 522.

90. *M. d'Ocagne*. Sur l'application de la nomographie à la prédiction des occultations d'étoiles par la lune. C.R. 130. 554.

91. *A. A. Nyland*. Über einen Refraktionsabakus für Mikrometerbeobachtungen. A.N.K. 153. 211.

92. *A. Schleusinger*. Geographische Parametertafeln zur Bestimmung von $s=\sqrt{\Delta a^2+\Delta o^2}=\Delta a+p$. Z.V. 29. 561.

Graphischer Calcul.

93. *G. Recknagel*. Über den Anfangsunterricht in allgemeiner Arithmetik und Algebra. D.V.N. 279.

94. *E. Holtzhey*. Calculul grafic a lui π (graphische Berechnung von π). G.M.B. 5. 238.

95. *Tait*. On the generalisation of Josephus' problem. P.R.S.E. 165.

96. *R. E. Gaines*. A graphical method of deducing the criteria for the nature of the roots of cubic and quartic equations. A. of M. 1. 111.

97. *G. B. Matthews*. Solution of the quartic. N. 61. 55.

98. *A. L. Baker*. Diagrammatic proof of the condition of functionality in complex functions. M.M.F. 7. 240.

99. *J. Coulon*. Remarques à propos d'un mémoire de M. Massau sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. C.R. 130. 1378.

Siehe auch 14, 478.

Winkelteilung.

100. *E. Wölffing*. Bibliographie der Winkelteilung. M.B. 2. 21; 92.

101. *P. H.* Vinklens tredeling. T.M. 11 A. 12.

102. *P. Mansion*. Division d'un angle en n parties égales. M. 156.

Näherungsmethoden, geometrische.

103. *E. Hammer*. Über den aus 2 Kreisbögen bestehenden Korbbogen zur Verbindung zweier gegebenen Tangentialpunkte. Z.V. 29. 236.

104. *A. S. Bang*. Tilnaermet Kvadratur af cirkel. T.M. 11. A. 14.

105. *J. Jensen*. Tilnaermet Kvadratur af cirklen. T.M. 12. A. 16.

106. *Puller*. Zur Quadratur des Kreises. Z.V. 29. 588.

106a. *B. Carrara*. I tre problemi classici degli antichi in relazione ai recenti risultati della scienza. R.F.M. 2. 407.

107. *Hoffbauer*. Formule approchée donnant le périmètre de l'ellipse. I.M. 409.

Rechenmaschinen.

108. *L. Torres*. Sur les machines à calculer. C.R. 130. 472; 874.

109. *G. Meslin*. Sur une machine à résoudre les équations. C.R. 130. 888.

110. *M. Petrovich*. Appareil à liquide pour l'intégration graphique de certaines types d'équations différentielles. A.J.M. 1.

111. *W. A. Price*. Petrovitchs apparatus for integrating differential equations of the first order. P.M. 49. 487.

Siehe auch 727.

Rechenschieber.

112. *C. Lallemand*. Zweiteiliger logarithmischer Rechenschieber. Z.V. 29. 233.

113. *P. Weiss.* Sur un nouveau cercle à calcul. C.R. 131. 1289.

114. *R. Proell.* Neue logarithmische Rechentafel. Z.S. 46. 218.

Geometrischer Calcul.

115. *F. Villareal.* Calculo geometrico. R.C.L. 117. 133. 168; 186; 266.

116. *R. Bonola* Bibliografia sui fondamenti della geometria in relazione alla geometria non-euclidea. B.B.L. 2; 33; 70.

117. *U. Carstens.* Om multiplication. T.M. 11. A. 47.

118. *L. van Emelen.* Note sur l'emploi du symbole 1ϑ dans la recherche des formules trigonométriques. E.M. 3. 210.

Vektorenrechnung.

119. *U. Fornari.* Elementi di calcolo vettoriale. P.M.R. Suppl. 4. 49.

120. *G. Tzitzeica.* Asupra vectorilor (Über Vektoren). G.M.B. 6. 53.

121. *M. F. Daniëls.* Über die Derivirte eines Vektors. Z.S. 45. 203.

122. *Tait.* On linear and vector function. P.R.S.E. 547.

123. *E. Study.* Die Geometrie der Dynamen. D.V.M. 8. A. 204.

Siehe auch 237, 246.

Ausdehnungslehre.

124. *J. V. Collins.* An elementary exposition of Grassmann's „Ausdehnungslehre“ or theory of extension. M.M.F. 7. 31; 63; 163; 181; 207; 253; 281.

125. *C. J. Joly.* On the place of the „Ausdehnungslehre“ in the general associative algebra of the quaternion type. P.R.I.A. 13.

126. *C. Burali-Forti.* Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques. Z.S. 45. 52.

Quaternionen.

127. *E. Study.* Die Hauptsätze der Quaternionentheorie. M.G.G. 1.

128. *F. H. Griessemann.* Elementarer Nachweis des Satzes von Frobenius über die Ausnahmestellung der Quaternionen unter den komplexen Zahlsystemen von mehr als 2 Einheiten. M.H. 11. 132.

Siehe auch 125.

Zeichenapparate.

129. *C. Rohrbach.* Ein neues Perspektivlineal. Z.S. 46. 249.

130. *E. M. Blake.* The ellipsograph of Proclus. A.J.M. 146.

131. *A. Aubry.* Estudio sobre los conicografos. P.M.S. 337.

132. *M. Dechevrens.* Le campylographe, machine à tracer les courbes. C.R. 130. 1616.

133. *R. Bricard.* Demande de renseignement sur un certain dispositif. I.M. 62.

Siehe auch 194.

Geometrie, darstellende.

134. *R. Mehmke.* Zur Konstruktion der Schnitte von Hüllflächen mit ebenen oder krummen Flächen. Z.S. 46. 246.

135. *A. Sucharda.* Důkaz základní věty Désarguesovy užitím deskriptivní (Beweis des Desargues'schen Fundamentalsatzes mit Hilfe der darstellenden Geometrie). C. 29. 42.

Projektion.

136. *S. L. Penfield.* Stereographic projection and its possibilities. A.J.S. 11. 1; 115.

137. *E. Ascione.* Proiezione ombelicale relativa alle quadriche a punti ellittici. A.A.N. 10. Nr. 2.

138. *E. Janisch.* Evoluten als Contourkurven windschiefer Flächen. M.H. 12. 97.

Perspektive.

139. *B. Procházka.* Poznámka ku perspektivnému zobrazování (Bemerkung über die perspektivische Abbildung). C. 29. 49.

140. *F. Schiffner.* Die stereoskopische Reliefperspektive. M.H. 12. 177.

141. *H. Lecocq.* De l'abatographe et de la méthode abatographique en perspective. J.E. 122; 135; 153; 169; 185.

Schattenkonstruktionen.

142. *E. Wölffing.* Bibliographie der Schattenkonstruktionen bei Rotationsflächen. M.B. 2. 63.

143. *R. Mehmke.* Eine Schattenkonstruktion. Z.S. 46. 244.

Photogrammetrie.

144. *L. de Ball.* Neue Ableitung einiger bei der Berechnung einer photographischen Aufnahme nach Prof. Turner's Methode vorkommender Formeln. A.N.K. 153. 61.

145. *H. G. van de Sande Bakhuyzen.* Quelques remarques sur la réduction des

positions des étoiles mesurées sur les clichés photographiques. A.N. 5. 542.

146. *W. Láska.* Über ein Problem der photogrammetrischen Küstenaufnahme. M.H. 12. 172.

147. *O. Bergstrand.* Sur la déformation des couches sensibles des plaques photographiques. B.V.A.S. 57. 187.

Krystallographie.

148. *W. Barlow.* Crystal symmetry. P.M. 1. 1.

149. *H. Marshall.* Note on the axes of symmetry which are crystallographically possibles. P.R.S.E. 62.

Modelle.

150. *A. Andreini.* Sullo sviluppo dei poliedri e su alcune norme pratiche per la costruzione dei loro modelli in cartone. P.M.R. 2. 233.

151. *K. Fischer.* Demonstration von Unterrichtsmodellen zur Mechanik. D.V.N. 289.

152. *F. Schilling.* Nouveaux modèles cinématiques et introduction nouvelle à la théorie des courbes cycloidales. E.M. 2. 31.

Siehe auch 540.

D. Mechanik.

Allgemeines. Prinzipien.

153. *G. K. Souslow.* Elemente der analyt. Mechanik. Fortsetzung (russ.) B.U.K. Nr. 2—4.

154. *J. Petersen.* Den rationelle mekaniks indledning. T.M. 12 B. 25.

155. *E. Picard.* Sur les principes de la mécanique et l'explication mécanique des phénomènes naturels. B.D. 25. 17.

156. *M. de Tilly.* Sur trois principes fondamentaux ou axiomes ou hypothèses de la mécanique rationnelle (inertie, indépendance, réaction). A.S.B. 24. 214.

157. *A. Brill.* Über ein Beispiel des Herrn Boltzmann zu der Mechanik von Hertz. D.V.M. 8. A. 200.

158. *A. Brill.* Über die Mechanik von Hertz. M.B. 2. 1.

159. *W. Wien.* Über die Möglichkeit einer electromagnetischen Begründung der Mechanik. A.N. 5. 96.

160. *G. Mie.* Die mechanische Erklärbarkeit der Natur-Erscheinungen. V.N.K. 402.

161. *T. Schwartze.* Dynamische Betrachtungen. A.Gr. 17. 205.

162. *K. Laves.* Maupertuis' Prinzip der kleinsten Wirkung für Kräfte, die ein effektives Potential zulassen. A.N.K. 152. 361.

163. *P. Duhem.* Sur un point du calcul des variations. A.T. 115.

164. *Lord Rayleigh.* The law of partition of kinetic exergy. P.M. 49. 98. — H. Burbury. 226.

165. *H. S. Burbury.* On the law of partition of energy. P.M. 50. 584.

166. *W. Gosiewski.* O prawie zachowania energii i wzrostu entropii (Über das Gesetz der Erhaltung der Energie und der Zunahme der Entropie). T.W. 25.

167. *Lord Rayleigh.* On a theorem analogeous to the virial theorem. P.M. 50. 210.

168. *T. Schwartze.* Zusammensetzung lebendiger Kräfte. A.Gr. 17. 333.

169. *H. Poincaré.* Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. C.R. 132. 369.

170. *D. de Francesco.* Alcuni problemi di meccanica in uno spazio a 3 dimensioni a curvatura costante. A.A.N. 10 Nr. 4; Nr. 9; R.A.N. 6. 15; 153.

Kinematik.

171. *M. Puglisi.* Sulle formole per la composizione di più movimenti finiti. R.C.M.P. 14. 225.

172. *A. S. Chessin.* On relative motion. T.S.M.Am. 116.

173. *R. Lipschitz.* Nachweis des Zusammenhanges zwischen den 4 Drehungsaxen einer Lagenänderung eines orthogonalen Systems und einem Maximumstetraeder. A.M. 123.

174. *A. S. Gales.* Wiener's theory of displacements with an application of the proof of four theorems of Chasles. A. of M. 2. 1.

175. *L. Bickart.* Note de géometrie. R.M.S. 497.

176. *E. Duporcq.* Sur un remarquable déplacement à deux paramètres. S.M. 29. 1.

177. *B. Cluzeau.* Sur le déplacement d'une figure qui reste semblable à ellemême. B.M.S. 69.

178. *E. M. Blake.* Two plane movements generating quartic scrolls. T.S.M. Am. 421.

179. *G. K. Souslow.* Sur la question du mouvement d'un point dans un milieu qui se déforme. S.M.M. 351.

180. *M. Disteli.* Über Rollkurven und Rollflächen II. Z. S. 46. 134.

181. *H. Brocard.* Utilité de la photographie dans les recherches de géométrie. I. M. 133.

182. *G. Floquet.* Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. C.R. 130. 1745.

183. *N. J. Hatzidakis.* Sur les équations cinématiques fondamentales des variétés dans l'espace à n dimensions. C.R. 130. 557.

Siehe auch 123; 152.

Schraubenrechnung.

184. *R. S. Ball.* Farther development of the relations between impulsive and instantaneous screws. T.R.I.A. 99.

185. *R. S. Ball.* The twelfth and concluding memoir on the theory of screws. T.R.I.A. 145.

186. *T. J. Bromwich.* The displacement of a given line by a motion of a given screw. M.M. 41.

187. *E. Cotton.* Sur quelques mouvements à plusieurs paramètres et sur la théorie des vis principales d'inertie. A.E.N. 9.

188. *R. Bricard.* Sur une propriété du cylindroïde. S.M. 29. 18.

Mechanismen.

189. *T. Burgatti.* Teoria dei sistemi articolati più semplici. R.C.M.P. 14. 192; 201.

190. *P. Somov.* Über einige Anwendungen der Kinematik veränderlicher Systeme auf Gelenkmechanismen. Z.S. 46. 199.

191. *E. Delassus.* Sur la méthode de Cremona pour déterminer les torsions dans les systèmes articulés. A.T. 67.

192. *A. Krahe.* Cuatriláteros esféricos articulados. P.M.S. 318.

193. *A. Emch.* Illustration of the elliptic integral of the first kind by a certain linkwork. A of M. 1. 81.

194. *G. Koenigs.* Compas homographique, réalisant, par articulations, l'homographie plane générale. C.R. 131. 1179.

Statik.

195. *M. d'Ocagne.* Sur la composition des forces dans le plan. E.M. 3. 225.

196. *C. Wasteels.* Notes sur la composition des forces. M. 220.

197. *R. S. Ball.* A geometrico-statical theorem. M.G.S. 2. 25.

198. *P. J. Heawood.* On the quadrilaterals connected with four coplanar forces in equilibrium. M.G.S. 1. 319.

199. *A. Emch.* On the projectivity of stresses in a plane. M.M.F. 7. 134.

200. — Problème de mécanique. B.M.S. 67.

201. *J. H. Michell.* The uniplanar stability of a rigid body. M.M. 35.

202. *F. Kötter.* Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Cr. 121. 300.

203. *C. Popovici.* Spirala logaritmica ca figura de echilibru (Die logarithmische Spirale als Gleichgewichtsfigur). G.M.B. 6. 60.

Schwerpunkte.

204. *L. Clariana.* Aplicacion á la mecánica de la fórmula de Dirichlet. P.M.S. 179.

205. *R. Pitoni.* Sopra una formola di Euler. P.M.R. Suppl 3. 49; 65.

205a. *F. Caspary.* Sur le centre de gravité d'un quadrilatère. S.M. 28. 143.

206. *Philippin.* Centre de gravité d'un trapèze. M. 249.

207. *G. Lazzeri.* Baricentro di un tronco di prisma triangolare. P.M.R. 2. 219.

208. *S. Catania.* Sul baricentro del tronco di prisma triangolare. P.M.R. 3. 28.

Momente.

209. *V. Janků.* Elementární odvození momentu setrvačnosti některých těles pravidelných (Elementare Bestimmung der Trägheitsmomente einiger regelmässiger Körper). C. 30. 51.

210. *S. Jolles.* Die Beziehungen der Centralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde. A.Gr. 1. 91.

Siehe auch 204.

Kettenlinien.

211. *J. Jung.* Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie. Z.S. 45. 229.

212. *D. J. Korteweg.* La solution de Christian Huygens du problème de la chainette. B.M. 1. 97.

Dynamik des Punktes.

213. *E. Picard.* Une première leçon de dynamique. E.M. 2. 3.

214. *W. H. Macaulay.* The law of dynamics and their treatment in textbooks. M.G.S. 1. 379; 399.

215. *H. Duport.* Sur le théorème des forces vives. C.R. 132. 24.

216. *G. H. Bryan.* Energy accelerations. A study in energy partition and irreversibility. A. N. 5. 279.

217. *K. Pryts.* Resultant hastigheden ved to partiklers forening. T. M. 11 A. 75.

218. *P. Stäckel.* Über die Gestalt der Bahnkurven bei einer Klasse dynamischer Probleme. M. A. 54. 86.

219. *M. Puglisi.* Sul movimento di un punto non soggetto ad alcuna forza sopra un toro. R. C. M. P. 14. 180.

220. *N. N. Saltykov.* K zadače o dviženii materialnoj točki, pritjagivaemoj dvumja nepodvižnymi centrami obratno proporcionalno kvadratam razstojanij (Über die Aufgabe der Bewegung eines materiellen Punktes, der von zwei unbeweglichen Centren umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung angezogen wird). S. M. Kh. 7. 1.

221. *A. J. Swart.* Een vraagstuk der dynamica. N. A. W. 44.

222. *V. Strouhal.* Váty a vážcni (Wagen und Wägung). C. 29. 232; 321.

Centralbewegung.

223. *H. Renan.* Étude du mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale constante. I. M. 145.

224. *F. de Brun.* Sur le mouvement d'un point matériel sollicité par une force centrale. B. V. A. S 56. 107.

Pendel.

225. *G. A. Maggi.* Sulla teoria del pendolo. G. B. 1.

226. *P. Burgatti.* Sul moto di un pendolo verticale, il punto di sospensione del quale è soggetto a movimenti oscillatori e sulla determinazione di questi movimenti. R. A. L. R. 9. II. 295.

227. *K. R. Koch.* Über die Konstruktion invariabler Pendel. D. V. N. 39.

228. *C. Féry.* Pendule à réstitution électrique constante. C. R. 130. 1248.

229. *O. Hecker.* Beitrag zur Theorie des Horizontalpendels. B. G. 59.

230. *J. Wilsing.* Zur Theorie des Repsoldschen Federpendelregulators. A. N. K. 151. 293.

Dynamik des starren Systems.

231. *H. Petrini.* De allmänna rörelseekvationerna för en fast kropp i förhållande till rörliga axlar. T. M. 11. B. 1.

232. *P. Somoff.* Über Gebiete von Schraubengeschwindigkeiten eines starren Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen. Z. S. 45. 245.

233. *D. de Francesco.* Sul moto spontaneo di un corpo rigido in uno spazio di curvatura costante. A. A. T. 35. 34; 387.

Dynamik des deformierbaren Systems.

234. *A. Voss.* Über die Principe von Hamilton und Maupertuis. N. G. G. 322.

235. *Lord Rayleigh, S. H. Burbury.* The law of partition of kinetic energy. P. M. 49. 98; 226.

236. *W. Gosiewski.* O rozdziale prędkości w ukladzie dynamicznym ożywionym (Über die Verteilung der Geschwindigkeiten in einem dynamischen System, das eine stationäre Bewegung besitzt). T. W. 16.

237. *A. Broca.* Champs de vecteur et champ de force. Action réciproque des masses scalaires et vectorielles. C. R. 130. 109.

238. *T. Levi-Cività.* Sui moti stazionari dei sistemi olonomi. R. A. L. R. 10. I. 137.

239. *F. Kosch.* Theorie der Fallmaschine mit 2 festen und einer losen Rolle. A. Gr. 17. 113.

240. *H. Lorenz.* Dynamik der Kurbelgetriebe. Z. S. 45. 57; 177.

241. *J. Jung.* Synthetische Betrachtung eines in sich bewegten Fadens. Z. S. 45. 39.

242. *G. Floquet.* Sur le mouvement d'un fil dans l'espace. C. R. 131. 27.

243. *G. Floquet.* Sur les équations du mouvement d'un fil en coordonnées quelconques. C. R. 131. 97.

244. *G. Floquet.* Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un fil et sur le calcul de sa tension. C. R. 131. 666.

245. *G. Dillner.* Sur le mouvement des éléments d'une molécule de matière pondérable d'après la loi de Newton. B. V. A. S. 57. 1145.

246. *A. Broca.* Sur les masses vectorielles de discontinuité. C. R. 130. 317.

247. *D. Francesco.* Su alcuni problemi di meccanica in uno spazio pseudosferico analiticamente equivalenti a problemi nello spazio ordinario. R. A. N. 7. 28.

Differentialgleichungen der Mechanik.

248. *P. Appell.* Développements sur une forme nouvelle des équations de la dynamique. J. M. 5.

249. *P. Appell.* Sur une forme générale des équations de la dynamique. Cr. 121. 310.

250. *P. Appell.* Sur une forme géné-

rale des équations de la dynamique et sur le principe de Gauss. Cr. 122. 205.

251. *A. Viterbi.* Sulle trasformazioni delle equazioni della dinamica a due variabili. R.A.L.R. 9 I. 66; 97.

252. *A. de St. Germain.* Sur la fonction S introduite par M. Appell dans les équations de la dynamique. C.R. 130. 1174.

253. *G. Schouten.* De differentiaalvergelijkingen voor de beweging van een vast lichaam. N.A.W. 86.

254. *P. Appell.* Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arrête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau. R.C.M.P. 14. 1.

255. *V. Volterra.* Sugli integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche independenti. A.A.T. 35. 186.

256. *D. de Francesco.* Sull'integrazione delle equazione differenziali del moto spontaneo di un corpo rigido in un spazio di curvatura costante. R.A.L.R. 9 I. 245.

257. *E. Schultz.* Die Bahn- und Integralgleichungen eines Punktes in einem n-dimensionalen Raume. A.Gr. 17. 175.

258. *D. J. Korteweg.* Extrait d'une lettre à M. Appell. R.C.M.P. 14. 7.

Siehe auch 15.

Drehung.

259. *E. Lacour.* Formules elliptiques pour l'étude des mouvements de Poinsot. A.E.N. 283.

260. *D. N. Gorjačev.* O dviženii tjaželago tverdago tela vokrug nepodvižnoj točki v slučaje $A = B = 4C$ (Über die Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt im Falle $A = B = 4C$). S.M.M. 21. 431.

261. *J. H. Michell.* The stress in a rotating lamina. P.L.M.S. 124.

Reibung.

262. *O. Feller.* Eine neue Anschauung über die Reibung. D.V.N. 55.

Potentialtheorie.

263. *K. Böhm.* Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten abhängigen kinetischen Potentials. Cr. 121. 124.

264. *L. Königsberger.* Über die allgemeinen kinetischen Potentiale. Cr. 121. 141.

265. *H. Petrini.* Étude sur les dérivées du potentiel d'une couche simple. B.V.A.S. 57. 867.

266. *H. Petrini.* Sur l'existence des dérivées secondes du potentiel. C.R. 130. 233.

267. *H. Petrini.* Allgemeine Existenzbedingungen für die 2. Differentialquotienten des Potentials. B.V.A.S. 57. 225.

268. *L. Königsberger.* Über das erweiterte Newtonsche Potential. S.A.B. 1150.

269. *G. Lauricella.* Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie. A.A.T. 35. 480.

270. *D. Hilbert.* Über das Dirichletsche Prinzip. D.V.M. 8 A. 184.

271. *D. Hilbert.* Sur le principe de Dirichlet. N.A. 337.

272. *I. Fredholm.* Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. B.V.A.S. 57. 39.

273. *W. Steklow.* Sur la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. C.R. 130. 396; 826; 1599. — *A. Korn* 557; 1238.

274. *W. Steklow.* Sur les problèmes de Neumann et de Gauss. C.R. 130. 480.

275. *A. Korn.* Sur la méthode de Neumann et de Dirichlet. C.R. 131. 26.

276. *W. Steklow.* Sur la méthode de la moyenne arithmétique de Neumann. C.R. 131. 1182.

277. *A. Korn.* Über Lösungen des Dirichletschen Problems, welche durch eine Kombination der Methoden von Neumann und Schwarz gefunden werden. M.A. 53. 593.

278. *A. A. Pétrovsky.* Sur la distribution du potentiel dans un milieu hétérogène. C.R. 130. 112.

279. *T. Levi-Cività.* Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate. M.A.T. 105.

280. *G. Dougall.* The determination of Green's function by means of cylindrical or spherical harmonics. P.E.M.S. 33.

281. *M. Bôcher.* Greens functions in Space of one dimension. S.M.Am. 7. 279.

282. *W. F. Osgood.* On the existence of the Green function for the most general simply connected plane region. T.S.M.Am. 310.

283. *W. Peddie.* Elementary proof of the potential theorems regarding uniform spherical shells. P.E.M.S. 30.

284. *R. F. Muirhead.* Remark on Dr. Peddies proof of the potential theorems

regarding uniform spherical shells. P.E.M.S. 32.

285. *G. Prasad.* On the potentials of ellipsoids of variable densities. M.M. 8.

286. *P. Paci.* Sulla funzione potenziale di uno strato superficiale sferico. R.C.M.P. 15. 52.

287. *H. Petrini.* Démonstration générale de l'équation $\Delta v = -4\pi\varrho$. B.V.A.S. 56. 873.

288. *E. Marx.* Über den Potentialfall und die Dissociation in Flammengasen. A.P.L. 2. 768.

289. *G. Bakker.* Opmerking over de molekulaire potentiaalfunctië van van der Waals. C.A.A. 223.

290. *G. Bakker.* De potentialfunctiës

$$\varphi(r) = \frac{Ae^{-qr} + Be^{qr}}{r}$$

en

$$\varphi(r) = \frac{A\sin(qr + \alpha)}{r}$$

en de potentialfunctië van van der Waals. C.A.A. 308.

291. *F. v. Dalwigk.* Über das Poissonsche Integral. S.G.M. 1900. 59.

Siehe auch 162; 205; 376.

Attraktion.

292. *Q. Majorana.* Sull' attrazione fra metalli eterogenei. R.A.L.R. 9II. 199.

Gravitation.

293. *J. H. Poynting.* Recent studies in gravitation. N. 62. 403.

Siehe auch 346.

294. *M. Curtze.* Zwei Beiträge zur Geschichte der Physik im Mittelalter. B.M. 1. 51.

Hydrostatik.

295. *F. Büttner.* Studien über die Green'sche Abhandlung: Mathematical investigations concerning the laws of the equilibrium of fluids. P.J.G.

296. *P. Duhem.* Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique. B.M. 1. 15.

297. *A. Sella.* Sulla forma della superficie libera di un liquido pesante in presenza di un corpo elettrico. R.A.L.R. 9II. 80.

298. *P. Appell.* Sur l'équilibre d'un flotteur avec un chargement liquide. J.E.P. 101.

299. *C. de Vaux.* Notice sur un manuscrit arabe traitant de machines attribuées à Héron, Philon et Archimède. B.M. 1. 28.

Siehe auch 57.

Hydrodynamik.

300. *R. Reiff.* Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertzsche Mechanik. A.P.L 1. 225. — *L. Boltzmann.* 673.

301. *Touche.* Les équations de l'hydrodynamique données par Lagrange. S.M. 28. 121; 125.

302. *P. Duhem.* Sur la condition supplémentaire en hydrodynamique. C.R. 132. 117.

303. *P. E. Doudna.* Equations of motions of a viscous liquid. C.C.S. 1.

304. *C. H. Lees.* On the viscosities of mixtures of liquids and of solutions. P.M. 1. 128.

305. *E. J. Wilczynski.* An application of group theory to hydrodynamics. T.S.M. Am. 339.

306. *P. Duhem.* Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch. J.M. 215.

307. *M. Knudsen.* Ein hydrographischer Lehrsatz. A.H. 28. 316.

308. *R. F. Gwyther.* On the motion of the fluid particles in a class of cases of steady motion. S.P.M. 4. Nr. 10.

309. *F. Wittenbauer.* Über den Stofs freier Flüssigkeitsstrahlen. Z.S. 46. 182.

310. *P. Forchheimer.* Über Grundwasserbewegung. D.V.N. 77.

311. *F. Kötter.* Die von Steklow und Liapunow entdeckten integrablen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit. S.A.B. 79.

312. *H. S. Allen.* The motion of a sphere in a viscous fluid. P.M. 50. 323; 519.

313. *E. Armanini.* Sulla superficie di minima resistenza. A.D.M. 131

314. *Touche.* Sur une question posée par d'Alembert. S.M. 29. 4.

Siehe auch 202; 406.

Wirbel.

315. *Fournier.* Lois dynamiques des cyclones. C.R. 130. 382.

316. *J. Weingarten.* Über die geometrischen Bedingungen, denen die Unstetigkeiten der Derivirten eines Systems dreier stetiger Funktionen des Ortes unterworfen sind und ihre Bedeutung in der Theorie der Wirbelbewegung. A.Gr. 1. 27.

317. *P. Appell.* Déformation spéciale d'un milieu continu, tourbillons de divers ordres. S.M. 29. 16.

318. *T. de Donder.* Étude sur les invariants intégraux. R.C.M.P. 15. 66.

Siehe auch 551.

Schiffsbewegung.

819. *L. E. Bertin.* Position d'équilibre des navires sur la boule. M.C. 1.

820. *G. H. Bryan.* The steadying of ships. N. 62. 186.

Aerodynamik.

821. *V. Bjerknes.* Das dynamische Prinzip der Cirkulationsbewegungen in der Athmosphäre. M.Z. 17. 97. 145.

822. *M. Möller.* Der räumliche Gradient. M.Z. 17. 275.

823. *V. Bjerknes.* Räumlicher Gradient und Cirkulation. M.Z. 17. 481.

824. *M. v. Smoluchowski.* Über die Atmosphäre der Erde und der Planeten. P.Z. 2. 307.

825. *F. G. Donnan.* The relative rates of effusion of Argon, Helium and some other Gases. P.M. 49. 423.

826. *H. Wilde.* On aerial locomotion. S.P.M. 4. Nr. 11.

827. *F. Ahlborn.* Über die Mechanik der Flugbewegung. U.M.N. 108.

827 a. *Lord Rayleigh.* The mechanical principles of flight. S.P.M. 4. Nr. 5.

828. *L. Lecornu.* Sur le volant élastique. C.R. 131. 253.

Ballistik, äufsere.

829. *M. Radakovic.* Über den Verlauf der Geschwindigkeit eines Projektils in der Nähe der Gewehrmündung. S.A.W. 941.

830. *P. Vieille.* Sur la loi de résistance de l'air au mouvement des projectiles. C.R. 130. 235.

831. *de Sparre.* Sur une application des fonctions elliptiques. S.M. 28. 52.

832. *de Sparre.* Sur l'application des fonctions elliptiques à l'étude du mouvement des projectiles. S.M. 29. 30.

833. *A. V. Guillet.* Oscillomètre balistique. C.R. 130. 1549.

834. *M. Radakovic.* Über eine neue Methode zur Bestimmung von Geschofsgeschwindigkeiten. S.A.W. 276.

Ballistik, innere.

835. *G. Decknagel.* Die Verteilung der Luftgeschwindigkeit über den Querschnitt eines Rohres. D.V.N. 76.

836. *C. Cranz* und *K. R. Koch.* Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes. A.A.M. 589.

837. *E. Vallier.* Sur le tracé des rayures dans les bouches à feu. C.R. 130. 1102; 1508.

Mechanik, physiologische.

838. *A. Chauveau.* Forces liées à l'état d'élasticité parfaite que la contraction crée dans la substance musculaire. Travail physiologique intime constitué par cette création. C.R. 130. 757.

E. Mathematische Physik.

Allgemeine Prinzipien.

839. *L. Boltzmann.* Über die Entwickelung der Methoden der theoretischen Physik. D.V.M. 8. A. 71.

840. *W. A. Steklow.* Les méthodes générales pour résoudre les problèmes fondamentaux de la physique mathématique. A.T. 207.

841. *J. Farkas.* Allgemeine Prinzipien für die Mechanik des Äthers. A.N. 5. 56.

842. *D. Hilbert.* Mathematische Probleme. N.G.G. 253. A.Gr. 1. 44

843. *V. Novák.* Princip jednoduchosti ve fysice (Prinzip der Einfachheit in der Physik). C. 29. 137; 217.

844. *M. Planck.* Über die Elementarquanta der Materie und der Elektricität. A.P.L. 4. 564.

845. *H. Poincaré.* Über Beziehungen zwischen der experimentellen und der mathematischen Physik. P.Z. 1. 166; 182; 196.

846. *H. A. Lorentz.* Beschouwingen over de zwaartekracht. C.A.A. 603.

847. *Lord Kelvin.* On the duties of ether for electricity and magnetism. P.M. 50. 305.

848. *M. Reinganum.* Theoretische Bestimmung des Verhältnisses der Wärme- und Elektrizitätsleitung der Metalle aus der Drudeschen Elektronentheorie. A.P.L. 2. 398.

849. *E. Riecke.* Über das Verhältnis der Leitungsfähigheiten der Metalle für Wärme und für Elektricität. A.P.L. 2. 835.

Differentialgleichungen der math. Physik.

850. *S. Zaremba.* Sur les équations de la physique mathématique. C.R. 132. 29.

Mafssystem, absolutes.

851. *C. E. Guillaume.* Über die Mafseinheiten. P.Z. 1. 565.

852. *M. Thiesen.* Über allgemeine Naturconstante. V.P.G. 116.

853. *K. Schreber.* Das Ostwaldsche Maßsystem und die Abhängigkeit der Oberflächenspannung vom electrischen Potential. P.Z. 1. 75; 165.

Molekularphysik.

854. *H. Petrini.* Über das Wirkungsgesetz der innern Kräfte eines Körpers. A.P.L. 3. 749.

855. *D. Berthelot.* Sur la valeur de la pression interne dans les équations de van der Waals et de Clausius. C.R. 130. 69.

856. *W. Spring.* Svojstva tverdych tel pod davleniem, diffuzija tverdago veščestva, vnutrennija dviženija v tverdom veščestve (Eigenschaften von unter Druck befindlichen festen Körpern, Diffusion der festen Materie, innere Bewegung in der festen Materie). M.P.O. 25. 73; 102; 150; 169.

856a. *Guinchant.* Compressibilité des dissolutions. C.R. 132. 469.

857. *Lord Rayleigh.* On the stresses in solid bodies due to unequal beating and on the double refraction resulting therefrom. P.M. 1. 169.

Elastizität.

858. *J. Kübler.* Beitrag zur Knick-Elasticität und -Festigkeit. Z.S. 45. 307.

859. *W. Voigt.* Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnisse der Krystall-Elasticität. N.G.G. 117.

860. *J. Weingarten.* Sulle superficie di discontinuità nella teoria della elasticità dei corpi solidi. R.A.L.R. 10. I. 57.

861. *G. Jäger.* Über Longitudinalschwingungen. S.A.W. 81.

862. *O. Tedone.* Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici in coordinate curvilinee. A.A.T. 35. 460.

863. *P. Alibrandi.* Sulla elasticità dei solidi complicata da variazioni di temperatura. G.B. 77.

864. *T. Schwedoff.* Die Starrheit der Flüssigkeiten. P.Z. 1. 552.

865. *A. Cornu.* Deux méthodes optiques pour l'étude de l'élasticité des corps solides. A.N. 5. 322.

866. *P. Appell.* Sur les expériences du commandant Hartmann. S.M. 28. 66.

867. *Tait.* On the directions which are most alterated by a homogeneous strain. P.R.S.E. 162.

868. *T. Boggio.* Sull' equilibrio delle membrane elastiche piane. A.A.T. 35. 219.

869. *E. Estanave.* Contribution a l'étude de l'équilibre d'une plaque rectangulaire mince. A.E.N. 295.

870. *O. Tedone.* Sulla deformazione delle piastre di grossezza finita. R.A.L.R. 10. I. 131.

871. *T. Boggio.* Sull' equilibrio delle piastre elastische incastrate. R.A.L.R. 10. I. 197.

872. *E. Almansi.* Sulla torsione dei cilindri cavi a spessore piccolissimo. A.A.T. 35. 39.

873. *J. H. Michell.* The determination of the stress in an isotropic elastic sphere by means of intrinsic equations. M.M. 16.

874. *L. Lecornu.* Sur l'équilibre élastique du tore. J.E.P. 79.

875. *Lord Rayleigh.* On the stresses in solid bodies due to unequal heating and on the double refraction resulting therefrom. A.N. 5. 32.

876. *J. H. Michell.* The transmission of stress across a plane of discontinuity in an isotropic elastic solid and the potential solutions for a plane boundary. P.L.M.S. 183.

877. *J. H. Michell.* On the direct determination of stress in an elastic solid with application to the theory of plates. P.L.M.S. 100.

878. *H. Bouasse.* Sur les courbes de déformation des fils. A.T. 5.

879. *G. F. C. Searle* On the elasticity of wires. P.M. 49. 193.

880. *W. Voigt.* Über das numerische Verhältnis der beiden Elasticitätskonstanten isotroper Medien nach der molekularen Theorie. A.P.L. 4. 187.

881. *I. Fredholm.* Solution d'un problème d'équilibre élastique. C.R. 131. 875.

Siehe auch 408; 482.

Festigkeitslehre.

882. *W. Voigt.* Zur Festigkeitslehre. A.P.L. 4. 567.

883. *J. J. Guest.* On the strength ot ductile materials under combined stress. P.M 50. 69.

884. *M. Grübler.* Ringspannung und Zugfestigkeit. D.V.N. 73.

885. *J. H. Michell.* The uniform torsion and flexure of incomplete tores with application to helical springs. P.L.M.S. 130.

886. *L. N. G. Filon.* On the resistance to torsion of certain forms of shafting, with special reference to the effect of keyways. T.R.S.L. 193. 309.

887. *J. Buchanan.* Torsion structure in the Alps. P.M. 50. 261.

388. *F. Villareal.* Resistencia de materiales. R.C.L. 178. 202; 240; 272; 296.

Krystallstruktur.

389. *E. Riecke.* Über Wechselwirkung und Gleichgewicht trigonaler Polsysteme. P.Z. 1. 277.

Schwingungen.

390. *R. Pitoni.* Isocronismo delle piccole oscillazioni. B.C. 133.

391. *A. Davidoglou.* Sur l'équation des vibrations transversales des verges élastiques. A.E.N. 359.

392. *W. Peddie.* Note on Mr. J. O. Thompsons results regarding vibrating wires. P.R.S.E. 598.

393. *T. J. Baker.* The frequency of transverse vibrations of a stretched indiarubber cord. P.M. 49. 347.

394. *E. Riecke.* Zur Kinetik der Serienschwingungen eines Linienspektrums. A.P.L. 1. 399.

395. *E. Riecke.* Zur Dynamik der Serienschwingungen eines Linienspektrums. P.Z. 1. 10; 2. 107.

396. *A. F. Sundell* u. *H. Tallquist.* Über das Dekrement elektrischer Schwingungen bei der Ladung von Kondensatoren. A.P.L. 4.72.

Siehe auch 361; 362; 658; 856.

Wellenlehre.

397. *Lord Rayleigh.* On approximately simple waves. P.M. 50. 135.

398. *P. Duhem.* Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes analogues. C.R. 131. 1171.

399. *R. F. Gwyther.* The classes of progressive long waves. P.M. 50. 213; 308.

400. *A. Gleichen.* Über eine Eigenschaft eines Systems von Wellennormalen. V.P.G. 249.

401. *R. F. Gwyther.* On the conditions for the propagation of a solitary wave. S.P.M. 4. Nr. 9.

402. *H. Lamb.* Geometrical representation of the relation between wave-velocity and group-velocity. S.P.M. 4. Nr. 6.

403. *R. F. Gwyther.* The general motion of long waves with on examination of the direct reflexion of the solitary wave. P.M. 50. 349.

404. *R. F. Gwyther.* The progressive long waves of solitary and periodic types in shallow water. P.M. 1. 106.

405. *J. Hadamard.* Sur la propagation des ondes. S.M. 29. 50.

406. *T. Duhem.* Sur la propagation des ondes dans les fluides visqueux. C.R. 132. 393.

407. *M. J. Pupin.* Wave propagation over non uniform conductors. T.S.M.Am. 259.

408. *Lord Kelvin.* On the reflexion and refraction of solitary plane waves at a plane interface between two isotropic elastic mediums. P.R.S.E. 366.

409. *N. Kasterin.* Über die Ausbreitung der Wellen in einem nicht homogenen Medium von lamellarer Struktur. A.N. 5. 506.

410. *Hadamard.* Sur l'intégrale résiduelle. S.M. 28. 69.

411. *Vieille.* Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation. J.P. 9. 621.

412. *R. W. Wood.* Photography of sound waves and the kinematographical demonstration of the evolutions of reflected wave-fronts. P.R.S.L. 66. 283.

413. *M. P. Rudzki.* Über ein der optischen Dispersion analoges Phänomen. B.G. 47.

414. *H. Pierce.* Indices of refraction for electric waves. P.M. 1. 179.

415. *G. Mie.* Electrische Wellen an zwei parallelen Drähten. A.P.L. 2. 201.

416. *K. Pearson* and *A. Lee.* On the vibrations in the field round a theoretical Hertzian Oscillator. T.R.S.L. 193. 159.

417. *E. Lacour.* Sur la surface de l'onde et la surface correspondente de l'élasticité. N.A. 362.

418. *J. Coulon.* Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles. C.R. 130. 1064.

Siehe auch 435; 436; 486; 634; 667; 705, 874.

Strahlen.

419. *A. Sommerfeld.* Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen. Z.S. 46. 11; P.Z. 1. 105; 2. 55.

420. *C. H. Wind.* Zur Beugung der Röntgenstrahlen. P.Z. 2. 292.

421. *W. G. Cady.* On the energy of the cathode rays. A.J.S. 10. 1.

422. *W. Cady.* Über die Energie der Kathodenstrahlen. A.P.L. 1. 678.

423. *L. Starke.* Über die Reflexion der Kathodenstrahlen. A.P.L. 3. 75.

Siehe auch 675.

Radiographie.

424. *T. Marie et H. Ribaut.* Nouveau stéréomètre permettant la détermination

de 3 coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'un objet radiographé stéréoscopiquement. C.R. 130. 748.

Kapillarität.

425. *G. Bakker*. Théorie de la capillarité. II. J.P. 9. 394.

426. *A. Einstein*. Folgerungen aus den Kapillaritätserscheinungen. A.P.L. 4. 513.

427. *Gouy*. Sur la théorie thermodynamique de la capillarité et de l'électrocapillarité. J.P. 10. 245.

428. *G. Bakker*. La constante capillaire de Laplace. J.P. 10. 135.

429. *H. Hulshof*. De rechtstreek'sche afleiding van de waarde der moleculairconstante σ, beschouwd als spanning in het oppervlak. C.A.A. 432.

430. *G. Vincent*. Sur l'épaisseur des couches de passage. J.P. 9. 78.

431. *K. Witt*. Über die Constitution des Wassers. B.V.A.S. 57. 63.

Siehe auch 528.

Akustik.

432. *O. d'Alencar Silva*. De l'action d'une force accélératrice sur la propagation du son. J.S.M. 17.

433. *Lord Rayleigh*. On a problem relating to the propagation of sound between parallel walls. P.M. 1. 301.

434. *E. H. Barton*. On the refraction of sound by wind. P.M. 1. 159.

435. *B. Davis*. On a new effect produced by stationary sound-waves. A.J.S. 10. 231.

436. *B. Davis*. Eine neue durch Schallwellen hervorgerufene Wirkung. P.Z. 2. 348.

437. *P. Jaerisch*. Transformation der Kirchhoff'schen Gleichungen und Integration derselben für Kreiscylinderkoordinaten. S.M.H. 11.

Siehe auch 412; 871.

Optik, geometrische.

438. *T. Levi-Cività*. Complementi al teorema di Malus-Dupin. R.A.L.R. 9 I. 185; 237.

439. *T. J. Bromwich*. Note on the characteristic invariants of an asymmetric optical system. P.L.M.S. 4.

440. *R. Dongier*. Appareil de mesure des courbures et des éléments d'un système optique quelconque. J.P. 10. 266.

441. *L. T. More*. On the coincidence of refracted rays of ligth in crystalline media. P.M. 49. 262.

442. *N. Koenig*. Doppelbrechung in transversal schwingenden Glasplatten. A.P.L. 4. 1.

443. *A. Mallock*. Interference curves depending on perspective. N. 61. 29.

444. *P. Lugol*. Étude graphique de la déviation dans le prisme. J.P. 10. 339.

445. *P. J. E. Goedseels*. Étude sur les prismes à reflexions intérieures. A.S.B. 24. 13.

446. *S. P. Thompson*. On obliquely crossed cylindrical lenses. P.M. 49. 316.

447. *T. H. Blakesley*. On some improved formulae and methods connected with lenses. P.M. 49. 447.

448. *A. Killermann*. Brennpunkte der Linsen; Bestimmung der Constanten der Linsen. Z.S. 46. 98.

449. *G. Bassi*. Visione degli oggetti attraverso alle lenti. A.A.L. 19.

450. *B. Wanach*. Über L. v. Seidel's Formeln zur Durchrechnung von Strahlen durch ein zentriertes Linsensystem, nebst Anwendung auf photographische Objektive. Z.J. 20. 161. — *H. Harting*. 234.

451. *R. J. Sowter*. On astigmatic lenses. P.M. 1. 239.

452. *C. V. L. Charlier*. Über achromatische Linsensysteme. B.V.A.S. 56. 657.

453. *H. Kellner*. Über einige Methoden und Apparate zur Bestimmung der optischen Konstanten des Fernrohrs. Z.J. 20. 1; 33.

454. *A. Gleichen*. Über die Helligkeit der Bilder im Fernrohr. D.MZ. 1.

455. *A. Cornu*. Sur la loi de rotation diurne du champ optique fourni par le sidérostat et l'héliostat. J.P. 9. 249; C.R. 130. 537.

456. *A. Schuster*. Über eine Korrektion bei der Winkelmessung durch Spiegelablesung. P.Z. 1. 223.

457. *R. Müller*. Isophoten und Isophengen insbesondere auf den Flächen 2. Ordnung. A.Gr. 1. 166.

Siehe auch 294.

Optik, physikalische.

458. *A. Cornu*. Die Theorie der Lichtwellen und ihr Einfluſs auf die moderne Physik. P.Z. 1. 377.

459. *A. Goldhammer*. Über den Druck der Lichtstrahlen. A.P.L. 4. 834; A.N. 5. 467.

460. *C. Godfrey*. On the application of Fouriers double integrals to optical problems. T.R.S.L. 195. 329.

461. *G. Sagnac*. Rélations nouvelles entre la réflexion et la réfraction vitreuse de la lumière. A.N. 5. 380.

462. *G. Sagnac.* Théorie nouvelle de la transmission de la lumière dans les milieux en repos ou en mouvement. J.P. 9. 177.

463. *E. Carvallo.* Sur la nature de la lumière blanche. C.R. 130. 79; J.P. 9. 138.

464. *Rayleigh.* On the law of reciprocity in diffuse reflexion. P.M. 49. 324.

465. *C. Viola.* Le deviazioni minime della luce mediante prismi di sostanze anisotrope. R.A.L.R. 9. I. 196.

466. *P. Zeeman.* Ein Experiment über die sogenannte anomale Fortpflanzung von Wellen. P.Z. 1. 542.

467. *L. T. More.* On the coincidence of refracted rays of light in crystalline media. P.M. 49. 262.

468. *C. Fabry.* Sur la décomposition d'un mouvement lumineux en éléments simples. C.R. 130. 238.

469. *C. H. Wind.* Zur Anwendung der Fourier'schen Reihenentwicklungen in der Optik. P.Z. 2. 189.

470. *E. Carvallo.* Sur la dispersion exceptionnelle du spath d'Islande. J.P. 9. 465.

471. *L. Gorczynski.* Über die Brauchbarkeit der Dispersionsformeln. P.Z. 2. 205.

472. *W. Gorcynski.* O stosowalności wzorów dyspersyjnych (Über die Formeln der Dispersion des Lichts). W.M. 1.

473. *A. de Gramont.* Contribution à l'étude de la réfraction et de la dispersion. J.P. 10. 97.

474. *A. P. Gruzincev.* K teorii dispersii: slučaj mnogich polos pogloščenija (Über die Theorie der Dispersion: Fall mehrerer Absorptionsstreifen). S.M.Kh. 7. 4.

475. *W. Voigt.* Weiteres zur Änderung der Schwingungsform des Lichtes beim Fortschreiten in einem dispergirenden und absorbirenden Mittel. A.P.L. 4. 209.

476. *O. Lummer.* Komplementäre Interferenzerscheinungen im reflectirten Lichte. S.A.B. 504.

477. *E. Carvallo.* Nouvelle interprétation des résultats de M. Michelson pour l'analyse des lumières simples par la méthode des anneaux de Newton. C.R. 130. 496.

478. *O. Lummer* und *E. Jahnke.* Über die Spektralgleichung des schwarzen Körpers und des blanken Platins. A.P.L. 3. 283.

479. *M. Planck.* Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum. A.P.L. 4. 553.

480. *O. Lummer.* Über die Giltigkeit des Draper'schen Gesetzes. A.Gr. 1. 77.

481. *J. Macé de Lépinay.* Détermination des constantes optiques du quartz pour la radiation verte du mercure. Leur application aux mesures d'épaisseurs par la méthode de Mouton. J.P. 9. 644.

482. *Lord Kelvin.* On the motion produced in an infinite elastic solid by the motion through the space occupied by it of a body acting on it only by attraction on repulsion. P.M. 50. 181.

483. *C. Jensen.* Beiträge zur Photometrie des Himmels. S.V.K. 281.

484. *W. Voigt.* Eine Methode zur Untersuchung des Polarisationszustandes von ultraviolettem Lichte. P.Z. 2. 303.

485. *E. W. Marchant.* The Echelon spectroscope. P.M. 49. 384.

Siehe auch 395; 413.

Elektrooptik.

486. *A. Macaulay.* Notes on the electromagnetic theory of light. P.M. 49. 228.

487. *P. Duhem.* Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnetique de la lumière. A.N. 5. 227.

488. *W. Voigt.* Über das elektrische Analogon des Zeemaneffektes. A.P.L. 4. 197; A.N. 5. 366.

489. *A. Garbasso.* Über eine Darstellung der lichtdrehenden Körper. A.N. 5. 524.

490. *M. Planck.* Über die von einem elliptisch schwingenden Ion emittirte und absorbirte Energie. A.N. 5. 164.

491. *H. T. Simon.* Über den sprechenden Flammenbogen und seine Verwendung zu einer Telephonie ohne Draht. P.Z. 2. 253.

492. *W. Kaufmann.* Über die Schwingungsamplitude der Elektronen. A.N. 5. 148.

493. *H. Abraham* et *J. Lemoine.* Nouvelle méthode de mesure des durées infinitésimales. Analyse de la disparition des phénomènes électrooptiques. A.C.P. 20. 264.

494. *E. Rutherford.* Radioactivity produced in substances by the action of thorium compounds. P.M. 49. 161.

Siehe auch 638.

Magnetooptik.

495. *Lorentz.* De elementaire theorie van het verschijnsel van Zeeman. C.A.A. 69.

496. *W. Voigt.* Neuere Untersuchungen über die optischen Wirkungen eines Magnetfeldes. P.Z. 1. 116; 128.

497. *H. A. Lorentz.* Zur Theorie des Zeemaneffekts. P.Z. 1. 39.

498. *W. Voigt.* Über eine Dyssymmetrie der Zeemanschen normalen triplets. A.P.L. 1. 376.

499. *A. Righi.* Über das Zeemansche Phänomen in dem allgemeinen Falle eines beliebig gegen die Richtung der magnetischen Kraft geneigten Lichtstrahles. P.Z. 1. 329.

500. *O. Blumenthal.* Die Bewegung der Ionen beim Zeemanschen Phänomen. Z.S. 45. 119.

501. *W. Voigt.* Weiteres zur Theorie der magnetooptischen Wirkungen. A.P.L. 1. 389.

502. *F. J. Micheli.* Über den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerrsche magneto-optische Phänomen. A.P.L. 1. 542.

503. *M. Planck.* Ein vermeintlicher Widerspruch des magneto-optischen Faradayeffekts mit der Thermodynamik. V.P.G. 206.

504. *G. Scalfaro.* Velocità della luce nei cristalli magnetici. R.A.L.R. 10. I. 109.

Siehe auch 488.

Wärmelehre.

505. *J. D. van der Waals.* De entropie der straling. C.A.A. 338; 529.

506. *M. Planck.* Entropie und Temperatur strahlender Wärme. A.P.L. 1. 719.

507. *J. Boussinesq.* Réduction de certains problèmes d'échauffement ou de refroidissement par rayonnement au cas plus simple de l'échauffement ou refroidissement des mêmes corps par contact; échauffement d'un mur d'épaisseur indéfinie. C.R. 130. 1579.

508. *J. Boussinesq.* Problème de refroidissement d'un mur par rayonnement ramené au cas plus simple où le refroidissement aurait lieu par contact. C.R. 130. 1731.

509. *J. Boussinesq.* Échauffement permanent mais inégal par rayonnement d'un mur d'épaisseur indéfinie, ramené au cas d'un échauffement analogue par contact. C.R. 131. 9.

510. *J. Boussinesq.* Problème de l'échauffement permanent d'une sphère par rayonnement, ramené au problème plus simple d'échauffement de la même sphère par contact. C.R. 131. 81.

511. *Lord Rayleigh.* Remarks upon the law of complete radiation. P.M. 49. 539.

512. *E. Picard.* Sur l'équilibre calorifique d'une surface fermée rayonnée au dehors. C.R. 130. 1499.

513. *J. J. van Laar.* Sur le chauffage d'un cilindre dont chaque partie subit une élévation de temperature continuelle par quelque procès intérieur, physique ou chimique. A.M.T. 6. 65.

514. *M. Smoluchowski.* O przewodnictwie cieplnem gazów wedlug dotychzasowych teoryj i doświadczén (Über die Wärmeleitungsfähigkeit der Gase nach den gegenwärtig bekannten Theorien und Versuchen). T.W. 33.

515. *J. Schubert.* Zur Theorie der Wärmeleit ng im Erdboden. P.Z. 1. 442.

516. *E. Müller.* Die Abhängigkeit des Wärmeleitungskoeffizienten der Luft von der Temperatur. P.Z. 1. 161.

517. *C. H. Lees.* On the thermal conductivities of mixtures and of their constituents. P.M. 49. 286.

518. *E. Riecke.* Über das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und Elektricität. N.G.G. 250.

519. *B. O. Peirce.* On the thermal conductivity of Vulcanite. P.M. 49. 15.

520. *E. Picard.* Sur quelques problèmes relatifs à l'équation $\Delta u = k^2 u$. S.M. 28. 186.

521. *K. Kerkhof.* Über die Temperaturen in Geisslerschen Röhren. A.P.L. 4. 327.

522. *G. Tammann.* Über die Grenzen des festen Zustands V. A.P.L. 3. 195.

523. *D. Berthelot.* Sur le covolume dans l'équation caractéristique des fluides. C.R. 130. 115.

524. *A. Battelli* et *A. Stefanini.* Recherches cryoscopiques et ébulliscopiques. A.C.P. 20. 64.

525. *H. Diesselhorst.* Über das Problem eines electrisch erwärmten Leiters. A.P.L. 1. 312.

526. *F. Kohlrausch.* Über den statischen Temperaturstand eines electrisch geheizten Leiters. A.P.L. 1. 132.

527. *W. Richards.* The driving energy of physicochemical reaction and its temperature coefficient. P.A.Bo. 35. 471.

528. *O. Dörge.* Eine Studie über Seifenblasen. A.P.L. 1. 1.

529. *M. Planck.* Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum. V.P.G. 237.

530. *W. Wien.* Die theoretischen Gesetze der Strahlung. P.Z. 1. 610.

531. *E. Jahnke, O. Lummer* und *E. Pringsheim.* Kritisches zur Herleitung der Wien'schen Spektralgleichung. A.P.L. 4. 225.

532. *M. Planck.* Über eine Verbesse-

rung der Wien'schen Spektralgleichung. V.P.G. 202.

533. *E. Pringsheim.* Über die Gesetze der schwarzen Strahlung. P.Z. 2. 154.

534. *M. Thiesen.* Über das Gesetz der schwarzen Strahlung. V.P.G. 65.

535. *H. Rubens* und *F. Kurlbaum.* Anwendung der Methode der Reststrahlen zur Prüfung des Strahlungsgesetzes. A.P.L. 4. 649.

536. *H. Rubens* und *F. Kurlbaum.* Über die Emission langwelliger Wärmestrahlen durch den schwarzen Körper bei verschiedenen Temperaturen. S.A.B. 929.

537. *O. Lummer* und *E. Pringsheim.* Über die Strahlung des schwarzen Körpers für lange Wellen. V.P.G. 163.

538. *A. Goldhammer.* Über die Spektralgleichung des blanken Platins. A.P.L. 4. 828.

539. *C. Hermite.* Sur une équation transcendante. A.Gr. 1. 22.

Siehe auch 357; 363; 478—480; 545a; 861.

Thermodynamik.

540. *W. B. Boynton.* Gibbs thermodynamical model. N. 61. 414.

541. *Lord Kelvin.* On thermodynamics founded on motivity and energy P.R.S.E. 126.

542. *P. Duhem.* Sur la stabilité isentropique d'un fluide. C.R. 132. 244.

543. *B. Brunhes.* Quelques propriétés des moteurs à gaz étudiées par le diagramme entropique. J.P. 10. 309.

544. *B. Brunhes.* Sur l'entropie d'un mélange gazeuse en combustion. J.P. 10. 325.

545. *J. J. van Laar.* Über die Ableitung des thermodynamischen Potentials nach T und p bei zusammengesetzten Komponenten. A.N. 5. 484.

546. *M. Planck.* Über irreversible Strahlungsvorgänge. A.P.L. 1. 69.

547. *W. Stekloff.* Le problème des températures stationnaires. C.R. 131. 608.

548. *C. Dieterici.* Zur Theorie des kritischen Zustands. P.Z. 1. 78.

549. *S. Young.* On the law of Cailletet and Mathias and the critical density. P.M. 50. 291.

550. *H. Hulshof.* Über die Oberflächenspannung. A.P.L. 4. 165.

551. *Jougnet.* Le théorème du tourbillon en thermodynamique. C.R. 131. 1190.

552. *A. Ponsot.* Loi des modules. Modules thermochimiques. C.R. 131. 673.

553. *van der Waals.* Afkoeling van een gasstroom by plotselinge drukverandering. C.A.A. 441.

554. *G. N. Lewis.* A new conception of thermal pressure and a theory of solutions. P.A.Bo. 36. 145.

555. *H. L. Callendar.* On the thermodynamical properties of gases and vapours as deduced from a modified form of Joule-Thomson equation, with special reference to the properties of steam. P.R.S.L. 67. 266.

556. *J. D. van de Waals.* Sur la relation entre les modifications subis par le volume spécifique de la vapeur saturée et celui du liquide coexistant sous l'influence des variations de température. A.N. 5. 407.

557. *J. H. Grindley.* An experimental investigation of the thermodynamical properties of superheated steam. P.R.S.L. 66. 79.

558. *J. H. Grindley.* An experimental investigation of the thermodynamical properties of superheated steam. On the cooling of saturated steam by free expansion. T.R.S.L. 194. 1.

559. *J. H. Grindley.* The thermodynamical properties of superheated steam and the dryness of saturated steam. S.P.M. 5. No. 3.

560. *H. Moulin.* Formules donnant les volumes de vapeur saturée et les tensions maxima. C.R. 130. 1454.

561. *H. Moulin.* Vérification de deux formules donnant les volumes de vapeur saturée et les tensions maxima en fonction de la température. J.P. 9. 390.

562. *P. Juliusburger.* Über das Dupré-Rankinesche Dampfspannungsgesetz. A.P.L. 3. 618.

563. *Ponsot.* Sur la chaleur spécifique moléculaire des composés gazeux dissociables. C.R. 131. 990.

564. *E. H. Amagat.* Sur les lois des chaleurs spécifiques des fluides. C.R. 130. 1443.

565. *E. H. Amagat.* Sur les chaleurs spécifiques des fluides. J.P. 9. 417.

566. *P. Duhem.* Sur les chaleurs spécifiques des fluides dont les éléments sont soumis à des actions mutuelles. C.R. 132. 292.

567. *D. Berthelot.* Quelques remarques sur l'équation caractéristique des fluides. A.N. 5. 417.

568. *G. Tammann.* Über adiabatische Zustandsänderungen eines Systems bestehend aus einem Krystall und seiner Schmelze. A.P.L. 1. 275; S.N.J. 270.

569. *F. Haber.* Graphische Thermodynamik elektrochemischer Prozesse. P.Z. 1. 361.
570. *J. J. van Laar.* Sur la loi de dilution chez les electrolytes fortement dissociés. A.M.T. 7. 59.
571. *Lord Kelvin.* On thermodynamics of Volta-contact electricity. P.R.S.E. 118.
572. *A. Schmidt.* Das Wärmegleichgewicht in der Athmosphäre nach den Vorstellungen der kinetischen Gastheorie. B.G. 1.
573. *H. Mache.* Über die Regenbildung. M.Z. 17. 554.
574. *K. Tsuruta.* Thermodynamische Bemerkungen (japan.). J.T. 135.
575. *R. Cozza.* Sur l'hygromètre à détente et son application à la mesure de $\gamma = \frac{C}{c}$. A.S.G. 132.
576. *E. Mathias.* Sur deux groupes rémarquables de lieux géométriques. C.R. 130. 1748; J.P. 9. 479.
577. *M. Planck.* Bemerkung zu einer Abhandlung über Thermodynamik des Herrn K. Wesendonk. A.P.L. 1. 621.
578. *K. v. Wesendonk.* Weiteres zur Thermodynamik. A.P.L. 2. 746.
579. *H. Kamerlingh Onnes.* Die reduzierten Gibbs'schen Flächen. A.N. 5. 665.
Siehe auch 288; 427; 503; 828.

Lösungen.

580. *S. R. Milner.* Note on the theory of solution pressure. P.M. 49. 417.
581. *J. J. van Laar.* Théorie générale des dissolutions. A.M.T. 6. 1.
582. *N. Schiller.* Einige thermodynamisch abzuleitende Beziehungen zwischen den Grössen, die den physikalischen Zustand einer Lösung charakterisiren. A.N. 5. 118.
583. *H. L. Châtelier.* Sur les points anguleux des courbes de solubilité. C.R. 130. 1606.
584. *H. J. S. Sand.* On the concentration at the electrodes in a Solution. P.M. 1. 45.
Siehe auch 554; 648; 712.

Zustandsgleichung.

585. *M. Reinganum.* Über die Theorie der Zustandsgleichung und der inneren Reibung der Gase. P.Z. 2. 241.
586. *J. J. van Laar.* Évaluation de la deuxième correction sur la grandeur b de l'équation de M. van der Waals. A.M.T. 6. 237.
587. *J. E. Verschaffelt.* Contributions à la connaissance de la surface ψ de van der Waals. A.N. 5. 644.
588. *C. M. A. Hartmann.* Beiträge zur Kenntnis der von der Waals'schen ψ Fläche. III A.N. 5. 636.
589. *J. D. van der Waals.* Statik der Flüssigkeitsmischungen. P.Z. 1. 608.
Siehe auch 567.

Gastheorie, kinetische.

590. *S. H. Burbury.* Über die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie. A.P.L. 3. 355; 4. 646.
591. *G. Zemplén* Über die Grundhypothesen der kinetischen Gastheorie. A.P.L. 2. 404; 3. 761.
592. *S. H. Burbury.* On certain supposed irreversible processes. P.M. 49. 475.
593. *M. Brillouin.* Théorie moléculaire des gaz. Diffusion du mouvement et de l'énergie. A.C.P. 20. 440.
594. *G. Jäger.* Über den Einfluss des Molekularvolumens auf die innere Reibung der Gase. S.A.W. 74.
595. *A. Fliegner.* Die Molekularwärme mehratomiger Gase. V.N.Z. 137.
596. *M. Reinganum.* Über die molekulare Anziehung in schwachkomprimirten Gasen. A.N. 5. 574.
597. *L. Boltzmann.* Notiz über die Formel vom Druck der Gase. A.N. 5. 76.
598. *Lord Kelvin.* Application of Sellmeiers dynamical theory to the dark lines D_1 D_2 produced by Sodium-vapour. P.R.S.E. 523.
599. *J. S. Townsend.* The Diffusion of Ions into gases. T.R.S.L. 193. 129.
600. *G. W. Walker.* On the distribution of a gas in an electrical field. P.M. 49. 529.
Siehe auch 572.

Elektrostatik.

601. *W. J. Julius.* Bemerkungen über einige Grundsätze der Elektricitätslehre. A.N. 5. 497.
602. *O. M. Corbino.* Über die Folgerungen des Princips von der Erhaltung der Elektricität. P.Z. 1. 321.
603. *A. Abraham* et *J. Lemoine.* Période d'établissement de l'étincelle électrique. Sa durée totale. C.R. 130. 245.
604. *W. Mac F. Orr.* Considérations regarding the theory of electrons. P.M. 50. 269.
605. *C. Heinke.* Über Wellenstrom-Energie. D.V.N. 48.
606. *P. Sacerdote.* Sur un cas parti-

culier de déformation électrique d'un diélectrique solide isotrope. J.P. 10. 196.

607. *H. Pellat.* Des diélectriques et de leur polarisation réelle. J.P. 9. 313.

608. *V. Schaffers.* Les plaques sensibles au champ électrostatique. A.S.B. 24. 175.

609. *D. Robertson.* Dust figures of electrostatic lines of force. P.R.S.E. 361.

610. *H. Dörrie.* Über die Verteilung der Elektrizität auf dem Ellipsoid. A.P.L. 4. 638.

611. *J. H. Jeans.* The striated electrical discharge. P.M. 49. 245.

612. *E. Merritt* u. *S. J. Barnett.* Der Einfluſs einer Elektrisirung auf die Oberflächenspannung des Wassers und Quecksilbers. P.Z. 1. 249.

613. *E. Haschek.* Druck und Temperatur im elektrischen Funken. A.P.L. 3. 672; S.A.W. 866.

614. *H. Pellat* et *F. Beaulard.* De l'énergie absorbée par les condensateurs soumis à une différence de potentiel sinusoidale. C.R. 130. 1457.

615. *V. A. Julius.* Sur l'action subie par un conducteur chargé dans un champ d'intensité constante. A.N. 5. 17.

616. *W. Einthoven.* Bijdrage tot de theorie van Lippmanns Capillair-electrometer. C.A.A. 177.

617. *A. B. Chauveau.* Sur la déviation limite de l'électromètre à quadrants. J.P. 9. 524.

Siehe auch 353; 600; 631.

Elektrodynamik.

618. *P. Duhem.* Les théories électriques de J. Clerk Maxwell. Étude historique et critique. A.S.B. 24. 239; 25. 1.

619. *E. Kohl.* Über die Stefansche Entwicklung der Maxwellschen Gleichungen und ihre Voraussetzungen. M.H. 12, 239.

620. *E. Wichert.* Elektrodynamische Elementargesetze. A.P.L. 4. 667; A.N. 5. 549.

621. *A. Guevara.* Nota sobre una formula equivalente á las leyes de Kirchhoff. R.C.L. 217. 233.

622. *Q. Majorana.* Sul effetto Volta e su di un nuovo metodo par misurarlo. R.A.L.R 9 II. 132.

623. *Q. Majorana.* Influenza dello stato superficiale e delle basse temperature sull' effetto Volta. R.A.L.R. 9 II. 162.

624. *O. Lodge.* On the controversity of Voltas contact force. P.M. 49. 351; 454.

625. *E. Kohn.* Über die Gleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. A.N. 5. 516.

626. *A. F. Sundell.* Über das Ohmsche Gesetz. B.F.S. 298.

627. *J. Stark.* Ionenschuss, innere Ladungen, Kraft- und Stromlinien in durchströmten Gasen. P.Z. 2. 132.

628. *H. C. Pocklington.* On the fundamental equations of electrodynamics and Crémieu's experiment. P.M. 1. 325.

629. *T. des Coudres.* Zur Theorie des Kraftfeldes elektrischer Ladungen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. A.N. 5. 652.

630. *C. H. Lees.* On the electrical resistance between opposite sides of a quadrilateral, one diagonal of which bisects the other at right angles. S.P.M. 4. Nr. 1.

631. *E. Riecke.* Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem Felde elektrostatischer und elektromagnetischer Kraft. A.P.L. 4. 378.

632. *H. J. S. Sand.* Sur le concentration aux électrodes dans une solution. C.R. 131. 992.

633. *K. Schreber.* Die Energieverhältnisse beim Lippmannschen Kreisprozeſs. M.G.G. 93.

634. *W. B. Morton.* On some cases of propagation of electric oscillations along a number of parallel waves. P.M. 50. 605.

635. *P. Sacerdote.* Recherches théoriques sur les déformations électriques des diélectriques solides isotropes. A.C.P. 20. 289.

636. *A. A. Pétrowsky.* Sur la mesure de la capacité dans un milieu hétérogène. C.R. 130. 164.

637. *W. Kaufmann.* Elektrodynamische Eigentümlichkeiten leitender Gase. A.P.L. 2. 158.

638. *J. Stark.* Berechnung der Leitfähigkeit durchströmter Gase in der positiven Lichtsäule. A.P.L. 4. 215.

639. *J. Stark.* Änderung der Leitfähigkeit von Gasen durch einen stetigen elektrischen Strom. A.P.L. 2. 62.

640. *J. Stark.* Theoretische Bemerkungen über den elektrischen Ausgleich in Gasen. P.Z. 1. 439.

641. *O. Lehmann.* Beiträge zur Theorie der elektrischen Entladungen in Gasen. V.N.K. 280.

642. *E. Marx.* Über den Potentialfall und die Dissociation in Flammengasen. N.G.G. 34. A.P.L. 2. 768.

643. *C. H. Lees.* On the conductivities of certain heterogeneous media for a steady flux having a potential. P.M. 49. 221.

644. *A. Schuster.* On electric inertia and the inertia of electric convection. P.M. 1. 277.

645. *M. Wien.* Über die Erzeugung und Messung von Sinusströmen. A.P.L. 4. 425.

645 a. *P. Drude.* Zur Electronentheorie der Metalle. A.P.L. 1. 566.

646. *C. H. Wind.* Über den Fall langsam bewegter Elektronen. A.N. 5. 609.

647. *W. Kaufmann.* Über die Schwingungsamplitude der Elektronen. P.Z. 2. 283.

648. *G. Jaumann.* Zur Theorie der Lösungen. S.A.W. 512.

649. *E. Riecke.* Über Schichtung in einem Strome elektrischer Teilchen. A.P.L. 4. 388; P.Z. 2. 227.

650. *L. Donati.* Teorema generale relativo alla distribuzione del potenziale in una rete di fili conduttori con alcune applicazioni. R.I.B. 65.

651. *K. R. Johnson.* Über den Öffnungsstrom in einem verzweigten Stromkreise. A.P.L. 2. 495.

652. *J. H. Jeans.* Finite current sheets. P.L.M.S. 131.

653. *C. Heinke.* Über Wellenströme. P.Z. 1. 8.

654. *C. Heinke.* Über Wellenstromenergie. P.Z. 1. 197.

655. *L. Donati.* Relazione generale fra le correnti in una rete di fili conduttori. R.I.B. 29.

656. *F. Oliveri.* Über Polarisation mit Wechselströmen. P.Z. 2. 225.

657. *G. Claude.* Sur l'élimination des harmoniques des courants alternatifs industriels par l'emploi des condensateurs et sur l'intérêt de cette élimination au point de vue de la sécurité de la vie humaine. C.R. 131. 613.

658. *M. Abraham.* Elektrische Schwingungen in einem frei endigenden Draht. A.P.L. 2. 32.

659. *E. Mathy.* Application des signes de Weierstrass à l'étude de l'énergie potentielle de deux courants circulaires parallèles d'intensité un. J.P. 10. 33.

660. *B. Navrátil.* Jednoduchý přistroj k objektivnímu demonstrování proudů proměnných (Einfacher Apparat zur objektiven Demonstration der Wechselströme). C. 30. 10.

661. *H. V. Carpenter.* Über eine neue Methode zur Vergleichung zweier Selbstinduktionen. P.Z. 1. 353.

662. *G. Bakker.* Théorie de l'induction électrique. A.N. 5. 312.

663. *K. R. Johnson.* Beiträge zur Kenntnis der Vorgänge in Induktionsapparaten. A.P.L. 3. 438; 4. 137; 722.

664. *K. R. Johnson.* On the theory of the function of the condenser in an induction-coil. P.M. 49. 216.

665. *L. M. Potts.* On Rowlands new method for measuring electric absorption and losses of energy due to hysteresis and Foucault currents and on the detection of short circuits in coils. A.J.S. 10. 91.

666. *E. Perreau.* Étude géométrique du condensateur transformateur. J.P. 10. 332.

667. *E. H. Barton.* Reflexion and transmission by condensers of electrical waves along wires. P.M. 50. 357.

668. *T. Mizuno.* Über den Einfluſs eines selbst inductionslosen Widerstandes auf die oscillatorische Kondensatorentladung. A.P.L. 4. 811.

669. *J. D. van der Waals.* Vergelijkingen waarin functiës voorkommen voor verschillende waarde der onafhankelijk veranderlijke. C.A.A. 638.

670. *M. Abraham.* Funkentelegraphie und Elektrodynamik. P.Z. 2. 329.

Siehe auch 228; 396; 414—416; 487; 518; 525; 526; 571.

Thermoelektrizität.

671. *A. H. Bucherer.* Zur Theorie der Thermoelektrizität der Elektrolyte. A.P.L. 3. 204.

672. *O. Wiedeburg.* Energetische Theorie der Thermoelektriztät und Wärmeverteilung von Metallen. A.P.L. 1. 758.

Ionentheorie.

673. *P. Drude.* Zur Ionentheorie der Metalle. P.Z. 1. 161.

674. *J. S. Townsend.* Diffusion von Ionen in Gasen. P.Z. 1, 313.

675. *J. Zeleny.* The velocity of the ions produced in gases by Roentgen rays. T.R.S.L. 195. 193.

676. *J. J. Townsend.* The conductivity in gases by the motion of negatively-charged ions. N. 62. 340.

677. *E. Rutherford.* Radioactivity produced in Substances by the action of Thorium compounds. P.M. 49. 161.

678. *M. Couette.* Sur la théorie osmotique des piles. J.P. 9. 200; 269.

679. *W. Kaufmann.* Versuch einer Erklärung des dunklen Kathodenraumes. V.P.G. 137.

Siehe auch 348; 490; 492; 500; 599; 604; 627; 645a; 646; 647; 703—706.

Magnetismus.

680. Lord *Kelvin*. Magnetism and molecular rotation. P.R..S.E 631.

681. *R. Manzetti* et *A. Sella*. ricerche magnetiche. A.G.C.Nr. 1.

682. *F. Beaulard*. Sur les formules de Mosotti-Clausius et de Betti relatives à la polarisation des diélectricques. A.U.G. 12. 91.

683. *D. Hurmuzesca*. Die durch Magnetisierung hervorgerufenen physikalischen Veränderungen. P.Z. 2. 353.

684. *V. Crémieu*. Recherches sur l'effet inverse du champ magnétique que devrait produire le mouvement d'un corps électrisé. C.R. 131. 578.

685. *J Throwbridge* and *E. P. Adams*. Circular magnetization and magnetic permeability. A.J.S. 11. 175.

686. *H Nagaoka*. Über Magnetostriktion. P.Z. 1. 547.

687. *S. P. Tompson*. Über magnetische Bilder und ihre Anwendung auf die Theorie der Motoren mit rotierendem Feld. P.Z. 2. 68.

688. *H. Nagaoka*. Bemerkung über die Spannung eines eisernen Ringes durch Magnetisierung (japan.). J.T. 7.

689. *J. Buchanan*. A contribution to the theory of magnetic induction in iron and other metals. P.M. 1. 330.

690. *W. Voigt*. Über die Influenz ferromagnetischer Krystalle. N.G.G. 331.

691. *L. R. Laird*. Über den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben. A.P.L. 1. 207.

692. *H. Nagaoka*. Change of volume and of length in iron steel and nickel ovoids by magnetization. J.U.T. 57.

693. *H. Nagaoka* and *K. Honda*. On the change of volume and of length in iron, steel and nickel ovoids by magnetization. P.M. 49. 329.

694. *K. Honda*. Combined effect of longitudinal and circular magnetization on the dimensions of iron, steel and nickel tubes. J.U.T. 77.

695. *E. van Everdingen*. Het verschijnsel van Hall en de magnetische weerstandstoename in bismuth bij zeer lage temperaturen. C.A.A. 218; 380.

696. *A. Schuster*. On magnetic procession. P.M. 1. 314.

697. *M. Solomon*. On the damping of galvanometer needles. P.M. 49. 559.

Siehe auch 819—822.

Electromagnetismus.

698. *C. Raveau*. Sur la loi élémentaire de l'électromagnétisme. J.P. 9. 150.

699. *H. Poincaré*. La théorie de Lorentz et le principe de la réaction. A.N. 5. 252.

700. *H. A. Lorentz*. Electromagnetische Theorien physikalischer Erscheinungen. P.Z. 1. 498; 514.

701. *P. Drude*. Zur Geschichte der elektromagnetischen Dispersions-Gleichungen. A.P.L. 1. 437.

702. *H. S. Hele-Shaw*. Lines of induction in a magnetic field. T.R.S.L. 195. 303.

703. *P. Drude*. Zur Elektronentheorie der Metalle. II A.P.L. 3. 369.

704. *H. A. Lorentz*. Über die scheinbare Masse der Ionen. P.Z. 2. 78.

705. *A. Righi*. Sur les ondes électromagnétiques d'un ion vibrant. A.N. 5. 348.

706. *W. Kaufmann*. Über Ionenwanderung in Gasen. P.Z. 1. 22.

707. *Doerge*. Die magnetische Energie eines Systems elektrischer Ströme. Z.S. 45. 339.

708. *W. Wien*. Über mögliche Ätherbewegungen. P.Z. 2. 148.

709. *F. Beaulard*. Sur les formules de Mossotti-Clausius et de Betti relatives à la polarisation des diélectriques. A.U.G. 12. 91.

710. *E. Hagenbach*. Der elektromagnetische Rotationsversuch und die unipolare Reduktion. A.P.L. 4. 233.

711. *G. Mie*. Über die Bewegungen eines als flüssig angenommenen Äthers. P.Z. 2. 319.

712. *G. Jaumann*. Zur Theorie der Lösungen. A.P.L. 3. 578: S.A.W. 512.

713. *H. du Bois*. Halbring-Elektromagnet. A.P.L. 1. 19.

714. *E. Marx*. Über das Hallsche Phänomen in Flammengasen. A.P.L. 2. 798.

715. *R. A. Fessenden*. Electromagnetic mechanism with special reference to telegraphic work. J.F.I. 459.

Siehe auch 159.

Thermomagnetismus.

716. *G. Moreau*. Sur les phénomènes thermomagnétiques. J.P. 9. 500.

717. *G. Moreau*. Sur le phénomène de Hall et les courants thermomagnétiques. C.R. 130. 122.

718. *L. Lownds*. Beiträge zur Kenntnis des thermomagnetischen Longitudinaleffekts. A.P.L. 4. 776.

719. *G. Moreau*. Sur l'interprétation de l'effet thérmomagnétique dans la théorie de Voigt. C.R. 130. 562.

Siehe auch 714.

F. Geodäsie.

Geodäsie, niedere.

720. *F. Villareal.* Topografia y geodesia. R.C.L. 212; 229; 306.

721. *G. Giovanetti.* Osservazione sopra una formola utile in topografia e geodesia. P.M.R. 3. 83.

722. *J. Schnoeckel.* Die Flächenberechnung mittelst eines neuen antilogarithmischen Grundsteuer-Kartenmafsstabs. Z.V. 29. 413.

723. *L. Szarvas.* Abstecken von Kreisbögen aus dem Tangentialschnittpunkt. Z.V. 30. 129.

724. *E. Hammer.* Zur Kreisbogenabsteckung. Z.V. 30. 205.

725. *A. Schreiber.* Besondere Centrirungsverhältnisse. Z.V. 29. 321.

726. *W. Laska.* Über den Einfluss der Ungenauigkeit gegebener Punkte auf das Resultat des Voreinschneidens. Z.V. 29. 557.

727. *F. Schuster.* Vereinfachung der Methode zur Berechnung des Messungsliniennetzes mittelst Rechenmaschine. Z.V. 29. 488.

728. *Wilcke.* Teilung eines Grundstücks mit veränderlichem Wert der Flächeneinheit. Z.V. 30. 159.

729. *J. E. Goedseels.* Étude sur le niveau à bulle. A.S.B. 24. 133.

730. *P. Pizzetti.* Sulla correzione a fare alle latitudini osservate per tener conto dell'altezza dei punti di stazione sul livello del mare. R.C.M.P. 14. 9.

Siehe auch 31; 32;

Geodäsie, höhere.

731. *M. Brillouin.* Les définitions de la forme de la terre. R.G.O. 823.

732. *Hatt.* Sur la convergence des méridiens. C.R. 131. 635.

733. *W. Snellius.* Le dégré du méridien terrestre mesuré par la distance des parallèles de Berg-op-Zoom et de Malines. A.S.B. 24. 111.

734. *H. Poincaré.* La revision de l'arc méridien de Quito. R.G.O. 925.

735. *M. Brillouin.* Les réductions de la pesanteur au niveau de la mer. Les différentes géoides. R.G.O. 875.

736. *Helmert.* Zur Bestimmung kleiner Flächenstücke des Geoids aus Lotabweichungen mit Rücksicht auf Lotkrümmung. S.A.B. 964.

737. *J. Guth.* Stoleti metru (Jahrhundertfeier des Meters). C. 29. 121.

738. *O. Eggert.* Vergleichung der Ergebnisse des geometrischen und des trigonometrischen Nivellements nach den durch von Bauernfeind im Jahre 1881 ausgeführten Beobachtungen. Z.V. 29. 113.

Polygonometrie.

739. *R. Hoppe.* Eine Vermessungsaufgabe in der Ebene. A.Gr. 17. 269.

Topographie.

740. *S. Finsterwalder.* Über die Konstruktionen von Höhenkarten aus Ballonaufnahmen. S.A.M. 149.

Kartenprojektion.

741. *A. Schreiber.* Zur konformen Doppelprojektion der Preufsischen Landesaufnahme. Z.V. 29. 257; 289.

G. Astronomie.

Astronomie, theoretische.

742. *H. Wronski.* Reforma de la mecanica celeste. R.C.L. 112; 152; 182; 244; 289.

743. *P. J. E. Goedseels.* Remarques sur certaines théories d'astronomie mathématique. Généralisation des coordonnées polaires. A.S.B. 24. 254.

744. *C. V. L. Charlier.* On periodic orbits. B.V.A.S. 57. 1059.

745. *Gruey.* Remarque sur le critérium de Tissérand. C.R. 130. 877.

746. *Gruey.* Sur les termes complémentaires du critérium de Tissérand. C.R. 130. 1109.

747. *L. Picart.* Démonstration du Théorème d'Adams; existence d'une proposition analogue. C.R. 131. 663.

748. *G. Gruss.* Odvozeni pozoruchodnych rovnic pro komponenty rychlosti ve drahách planět a komet (Ableitung bemerkenswerter Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten bei den Planeten- und Kometenbahnen). C. 29. 195.

749. *C. V. L. Charlier.* Einige Fälle von Librationsbewegungen in dem Planetensystem. I B.V.A.S. 57. 165.

750. *F. Porro.* Sul movimento non perturbato di una pianeta intorno al sole. G.B. 29.

751. *M. Brendel.* Theorie der kleinen Planeten. A.G.G. Nr. 2.

751a. *C. de Freycinet.* Sur les planètes télescopiques. C.R. 130. 1145.

752. *C. A. Schultz-Steinheil.* Über die Teilung des Kreises beim Rechnen der kleinen Planeten nach Hansen. B.V.A.S. 56. 273.

753. *A. Jwanow.* Hilfstafeln zur Berechnung von angenäherten Bahnen kleiner Planeten vom Hecuba- und Sybillatypus und Ableitung der Glieder dritter Ordnung im Ausdrucke (ψ). A.P.B. 13. 277.

754. *E. Maximow.* Bahnbestimmung des Planeten Dido. A.P.B. 12. 331.

755. *H. Poincaré.* Sur la théorie de la précession. C.R. 132. 50.

756. *O. Backlund.* Sur la précession. C.R. 132. 291.

757. *O. Backlund.* Zur Theorie der Präzession und Nutation. A.P.B. 12. 387.

758. *F. Folie.* Les expressions correctes de la nutation eulérienne rapportée aux axes instantanés. B.A.B. 462.

759. *F. Folie.* Sur les nutations eulérienne et chandlérienne d'après les latitudes déterminées à Poulkovo. B.A.B. 270.

760. *G. W. Hill.* On the extension of Delaunays method in the lunar theory to the general problem of planetary motion. T.S.M.Am. 205.

761. *F. Folie.* Sur des termes nouveaux de l'accélération séculaire de la lune. B.A.B. 42.

762. *S. v. Glasennapp.* Bewegung des Mondes. K.D.P. 21.

763. *A. Scheller.* definitive Bestimmung der Bahn des Kometen 1845 II (de Vico). D.A.W. 483.

764. *O. Callendreau* et *G. Fayet.* Sur le calcul de l'orbite d'une comète dont le mouvement géocentrique est considérable. C.R. 130. 281.

765. *R. Sprague.* Notes on the computation of preliminary orbits. A.N.K. 153. 385.

766. *J. C. Kapteyn.* Over de bepalingen van de coördinaten van het apex der zonsbeweging. C.A.A. 402.

767. *J. C. Kapteyn.* Sur la détermination des coordonnées de l'apex du mouvement solaire. A.N. 4. 93.

768. *K. Schwarzschild.* Ein Verfahren der Bahnbestimmung bei spektroskopischen Doppelsternen. A.N.K. 152. 65.

769. *N. C. Dunér.* Calcul des éléments elliptiques de l'orbite du système stellaire de l'étoile variable. Y Cygni. B.V.A.S. 57. 145.

770. *A. Gray.* The stability of a swarm of meteorites and of a planet and satellite. N. 62. 582.

771. *J. Malíř.* O letavicích (Über Meteore). C. 29. 68.

772. *T. J. J. See.* On the temperature of the sun and on the relative ages of the stars and Nebulae. T.S.L. Nr. 1.

773. *K. Bohlin.* Om tillämpningen af Lamberts lag inom den celesta fotometrien. A.V.A.S. Nr. 7.

Siehe auch 90; 483; 792.

Störungen.

774. *A. Féraud.* Sur la convergence des coefficients du développement de la fonction perturbatrice. C.R. 130. 1376.

774a. *G. Noren* und *J. A. Wallberg.* Entwicklung der Störungsfunktion durch kanonische Elemente. B.V.A.S. 56. 941.

775. *A. Féraud.* Sur la convergence des coefficients du développement de la fonction perturbatrice. C.R. 131. 661.

776. *C. A. Schultz-Steinheil.* Introduction of the argument X_m in the problem of perturbations. B.V.A.S. 56. 669.

777. *Gruey.* Sur l'équation générale donnant l'intégrale de Jacobi comme cas particulier. C.R. 131. 602.

778. *A. Gaillot.* Influence des perturbations périodiques du demi-grand axe sur la valeur du moyen mouvement déduite des observations d'une planète. Correction correspondante de la valeur primitivement adoptée du grand axe. C.R. 130. 1057.

779. *C. V. L. Charlier.* Zur Theorie der säcularen Störungen. B.V.A.S. 57. 1083.

780. *A. Idman.* Bemerkungen zu einem Satz von Leverrier, die sekularen Störungen betreffend. B.V.A.S. 57. 977.

781. *K. G. Olsson.* Allgemeine Jupiterstörungen derjenigen Asteroiden vom Typus $^1/_3$ welche grofse Bahnexcentricitäten und Neigungen haben. A.V.A.S. Nr. 8.

782. *H. v. Zeipel.* Angenäherte Jupiterstörungen derjenigen kleinen Planeten, welche eine mittlere Bewegung in der Umgebung von 600° haben. A.N.K. 151. 325.

783. *H. v. Zeipel.* Über die Bestimmung der Integrationsconstanten in der Theorie der Gruppenstörungen. A.N.K. 153. 93.

784. *A. Weiler.* Die Normalgleichung der gestörten Ellipse. A.N.K. 153. 305.

Vielkörperproblem.

785. *C. V. L. Charlier.* Über das reduzierte Dreikörperproblem. B.V.A. S. 56. 263.

786. *T. Levi-Cività.* Sur le problème restreint des trois corps. C.R. 131. 236.

787. *E. Strömgren.* Über mechanische Integration zu deren Verwendung für numerische Rechnungen auf dem Gebiete des Dreikörperproblems. B.V.A.S. 57. 443.

788. *R. Moulton.* On a class of particular solutions of the problem of four bodies. T.S.M.Am. 17.

789. *W. Ebert.* Sur un système d'équations différentielles qui équivaut au problème de *n* corps, mais admet une intégrale de plus. C.R. 131. 152.

790. *P. Painlevé.* Sur les intégrales uniformes du problème des *n* corps. C.R. 130. 1699.

791. *Dziobek.* Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems. A.N.K. 152. 33.

Astronomie, sphärische.

792. *H. Kobold.* Über die Darstellung der Richtungen der Eigenbewegung der Fixsterne. A.N.K. 153. 273.

793. *B. Wanach.* Eine Methode Schtschotkins von gleichzeitiger Zeit- und Breitebestimmung aus Beobachtungen von Sternpaaren in gleichen Höhen. Z.V. 29. 209.

794. *C. Börgen.* Über die Auflösung des Zweihöhenproblems nach einer Näherungsmethode von Raper, unter Benutzung der Tabelle der Mercatorschen Funktionen. A.H. 28. 84.

795. *O. Fulst.* Zur Höhenberechnung. A.H. 28. 320.

796. *W. Reuter.* Zur Berechnung des Höhenunterschiedes bei der Höhenmethode. A.H. 28. 504.

797. *Bolte.* Zur Berechnung des Schiffsorts aus zwei Gestirnshöhen nach der Höhenmethode. A.H. 28. 29; R. Schorr 128. G. Holtz 130.

798. *E. Caspari.* Azimut latitude et longitude par des hauteurs égales d'astres. J.E.P. 5. 1.

799. *W. Reuter.* Zur Berechnung der Breiten- und Längenberichtigung nach der Standlinienmethode. A.H. 28. 24.

800. *W. Reuter.* Über die Benutzung der Mercator'schen Funktion bei der Berechnung einer Standlinie. A.H. 28. 383.

801. *W. Reuter.* Hülfstafel der Berechnung der Besteckversetzung bei der Länge und Breitenmethode. A.H. 28. 126.

802. *G. Bolwin.* Nochmals die Bestimmung des Schiffsortes nach St. Hilaire ohne Konstruktion. A.H. 28. 584.

803. *A. Fowler.* Orientation of the field of view of the siderostat and coelostat. N. 62. 428.

804. *W. Ebert.* Über die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten äufserst polnaher Sterne mit der Zeit. A.N.K. 151. 145.

805. *L. de Ball.* Reduktion der Eigenbewegungen der Fixsterne auf verschiedene Äquinoktien und Epochen. Formel von Fabritius. A.N.K. 151. 363.

Chronologie.

806. *C. Berdellé.* Au sujet des questions chronologiques. E.M. 2. 188.

807. *E. Cercignani.* Notizie storiche sulla misura del tempo. B.C. 285.

808. *P. G. Lais.* Il calendario gregoriano e la odierna computazione dell'equinozio. N.L.A. 196.

809. *P. J. E. Goedseels.* Tables de réduction relative à l'heure et au dégré divisés décimalement. A.S.B. 24. 105.

810. *E. Pasquier.* De la décimalisation du temps et de la circonférence. A.S.B. 24. 59.

Siehe auch 762; 868.

H. Geophysik.

Geophysik im engeren Sinne.

811. *de Lapparent.* Sur la symmétrie tétraédrique du globe terrestre. C.A. 130. 614.

812. *F. Heiderich.* Die mittlere Erhebung der Landflächen. B.G. 26.

813. *J. Collet.* Les corrections topographiques des observations pendulaires. A.U.G. 13. 1.

814. *J. Collet.* Sur la correction topographique des observations pendulaires. C.R. 131. 742.

815. *A. Sella.* Sur une nouvelle méthode proposée par M. Gerschun de détermination de la densité de la terre. A.S.G. 322.

816. *V. Strouhal.* Stanovení relattivné hmoty země a slunce na základě fisikal-

ním. (Bestimmung der Masse der Erde und der Sonne auf physikalischem Wege.) C. 29. 1.

817. *V. Novák.* Měření konstanty gravitační a středni spezifické hmoty země. (Messung der Gravitationskonstanten und des mittleren spezifischen Gewichts der Erde). C. 29. 10.

818. *Boussinesq.* Problème de réfroidissement de la croûte terrestre, traité au même point de vue que l'a fait Fourier, mais par une méthode d'intégration beaucoup plus simple. C.R. 130. 1652.

819. *A. Nippold.* Der heutige Stand der Theorie des Erdmagnetismus. P.Z. 2. 108; 119.

820. *Wessely.* Bemerkung über den Erdmagnetismus. A.Gr. 17. 116.

821. *E. Mathias.* Calcul de la formule définitive donnant la loi de la distribution régulière de la composante horizontale du magnétisme terrestre en France au 1. janvier 1896. C.R. 132. 320.

822. *A. Angot.* Sur la relation de l'activité solaire avec la variation diurne de là déclination magnétique. C.R. 132. 254.

823. *R. Manzetti.* Di un nuovo istrumento per la misura de la frequenza delle correnti alternate. R.A.L.R. 10. I. 157.

824. *S. Arrhenius.* Über die Ursache des Nordlichts. B.V.A.S. 57. 545.

Siehe auch 735; 873; 889.

Meteorologie, mathematische.

825. *N. Demčinskij.* Versuch einer mathematischen Theorie der Barometerwelle. K.D.P. 6; 27; 46; 87.

826. *E. Leyst.* Über den täglichen Gang des Luftdrucks in Moskau. S.N.M. 1900. 1.

827. *H. Mohn.* Einige Bemerkungen über die Schwerekorrektionen der Barometerhöhen. M.Z. 18. 49.

828. *v. Bezold.* Zur Thermodynamik der Atmosphäre. V S.A.B. 356.

829. *O. Petterson.* Über den Einfluſs der Eisschmelzung auf die ozeanische Zirkulation. B.V.A.S. 56. 141.

830. *H. Mache.* Über die Regenbildung S.A.W. 793; M.Z. 17. 554.

831. *F. Pockels.* Zur Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen. A.P. L. 4. 459.

832. *Schreiber.* Beiträge zur Hageltheorie. M.Z. 18. 58.

833. *A. Gleichen.* Grundzüge einer Dioptrik der Athmosphäre. V.P.G. 24.

834. *E. v. Oppolzer.* Über den Zusammenhang von Refraktion und Parallaxe. S.A.W. 578.

835. *C. Maltézos.* Sur la méthode de Kepler dans la réfraction. J.P. 10. 337.

836. *A. Gleichen.* Erweiterung der Laplace'schen Extinctionstheorie des Sternenlichtes. V.P.G. 222.

Siehe auch 74; 75; 91; 315; 321; 324; 572.

Ebbe und Flut.

837. *E. Guyon.* Formules et tables pour calculer les heures et hauteurs des pleines et basses mers connaissant les hauteurs d'heure en heure. C.A. 131. 1158.

838. *E. W. Brown.* On tide currents in estuaries and rivers. A. of M. 1. 68.

839. *C. Schrader.* Die Beschickung von Lothungen auf Niedrigwasser. A.H. 28. 21.

I. Naturwissenschaften, mathematische.

Chemie, mathematische.

840. *G. Helm.* Mathematik und Chemie. S.I.D. 1900. 29.

841. *R. Wegscheider.* Über die allgemeinste Form der Gesetze der chemischen Kinetik homogener Systeme. S.A.W. 699.

842. *H. Pélabon.* Sur l'équilibre chimique d'un système dans lequel quatre corps gazeux sont en présence. C.R. 130. 576.

843. *L. Marchis.* Sur les faux équilibres chimiques. J.P. 9. 326.

844. *W. D. Bancroft.* Reaction velocity and solubility. A.N. 5. 46.

845. *J. Walker.* On the velocity of graduated actions. P.R.S.E. 22.

846. *W. Sutherland.* The molecular constitution of water. P.M. 50. 460.

847. *E. Warburg.* Über die Bildung des Ozons bei der Spitzenentladung im Sauerstoff. S.A.B. 712.

Siehe auch 527.

Biologie, mathematische.

848. *A. Gallardo.* Les mathématiques et la biologie. E.M. 3. 25.

849. *J. S. Macdonald.* The demarcation current of mammalian nerve. P.A.S.L. 67. 310.

850. *J. L. Horrweg.* Recherches sur l'excitation biologique des nerfs. A. M. T. 6. 285.

851. *R. E.* and *C. Crompton.* The fitting of the cycle to its rider. N. 61. 87; 391. — *D. E. Hutchins* 368.

Siehe auch 338.

Botanik, mathematische.

852. *G. Bergamo.* Teoria delle spostazioni fillotassiche. R. A. N. 6. 28.

853. *F. Delpino.* Circa la teoria delle spostazioni fillotassische. R. A. N. 6. 43.

854. *J. Friedel.* Action de la pression totale sur l'assimilation chlorophyllienne. C. R. 132. 353.

K. Technik.

Mechanik, technische.

855. *K. Heun.* Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. D. V. M. 9. B.

856. *M. Panetti.* Sul calcolo delle vibrazioni trasversali di una trave elastica. A. A. T. 36. 6.

857. *Rateau.* Théorie des hélices propulsives. C. R. 130. 486; 702.

Gewölbe.

858. *Ribière.* Sur les voûtes en arc de cercles encastrées aux naissances. C. R. 132. 315.

Maschinenlehre.

859. *H. Lorentz.* Über den Ungleichmäßigkeitsgrad von Dampfmaschinen. P. Z. 1. 175; D. V. N. 74.

860. *A. Perot.* Sur l'accouplement des alternateurs au point de vue des harmoniques et effet des moteurs synchrones sur ceux-ci. C. R. 131. 377.

861. *E. Meyer.* Die spezifischen Wärmen der Gase und die Gasmotorentheorie. D. V. N. 79.

862. *L. Marchis.* Sur les moteurs à gaz à explosion. C. R. 130. 705; 1246.

863. *d'Arsonval.* Exploseur rotatif et dispositifs divers pour la production des puissants courants à haute fréquence. C. R. 130. 1049.

864. *A. Witz.* Le cycle théorique des moteurs à gaz à explosion. C. R. 130. 1118.

Siehe auch 657.

Technologie.

865. *Vasseur.* Traces superficielles laissées par les outils dans le travail du sciage des métaux. C. R. 132. 460.

Telegraphie.

866. *P. E. Shaw.* Some lecture experiments illustrating syntony. P. M. 50. 283.

Siehe auch 670; 715.

Photographie.

867. *G. Sigriste.* Appareil de photographie instantanée à rendement maximum. C. R. 130. 82.

867ª. *N. Jadanza.* Il teleobiettivo e la sua storia. M. A. T. 153.

Siehe auch 181.

Messinstrumente.

868. *Mehmke, Bauschinger, Schülke.* Berichte und Diskussion über die Dezimalteilung der Winkel- und Zeitgrößen. D. V. M. 8. A. 138.

Instrumentenkunde.

869. *M. Dieterich.* Zur Theorie des Atwood'schen Fallapparates. B. B. 37. 61.

870. *M. Brillouin.* Constante de la gravitation universelle. Sur une cause de dissymétrie dans l'emploi de la balance de Cavendish. C. R. 131. 1293.

871. *A.* et *V. Guillet.* Nouveaux modes d'entretien des diapasons. C. R. 130. 1002.

872. *L. Malassez.* Nouveau modèle d'oculaire à glace micrométrique. C. R. 132. 405.

873. *B. Wanach.* Über die Änderung des Schraubenwerts eines Mikrometers durch Einschaltung einer Korrektionslinse für Mirenstellungen. A. N. K. 152. 49.

874. *K. Strehl.* Zonenfehler und Wellenflächen. Z. J. 20. 266.

875. *W. Harkness.* On the best form for the double achromatic objectives of telescopes. A. J. S. 9. 287.

876. *J. Hartmann.* Bemerkungen über den Bau und die Justierung von Spektrographen. Z. J. 20. 17; 47.

877. *H. Lehmann.* Über Spektralapparate mit drehbarem Gitter. Z. J. 20. 193.

878. *W. Ziegler.* Die Jablochkoff-Lampe. M. G. G. 195.

879. *Lortet* et *Genon.* Appareil très simple pour l'application photothérapique de Finson. C. R. 132. 246.

880. *Foveau de Courmelles* et *G. Trouve.* Appareil permettant diverses applications physiologiques de la lumière produite par une lampe à incandescence. C.R. 131. 1198.

881. *A. Dufour.* Sur un thermomètre en quartz pour hautes températures. C.R. 130. 775.

882. *J. Rose-Jnnes.* Theory of the constant-volume gasthermometer. P.M. 50. 251.

883. *Schott.* Elektrische Tiefenthermometer. A.H. 29. 167.

884. *V. Novák.* O pokroku pyrometrie (Über die Fortschritte der Pyrometrie). C. 30. 161.

885. *G. Massol.* Sur un thermocalorimètre à déversement. C.R. 130. 1126.

886. *J. Y. Buchanan.* On a solar calorimeter used in Egypt at the total solar eclipse in 1882. P.C.P.S. 37.

887. *R. Beattie.* Note on a possible source of error in the use of a ballistic galvanometer. P.M. 50. 575.

888. *H. du Bois.* Magnetische Präzisionswage. Z.J. 20. 97; 129.

889. *A. Schmidt.* Das Trifilargravimeter. B.G. 109.

890. *M. Contarini.* Sulla determinazioni dei moti sismici. R.A.L.R. 10. I 143; 205.

891. *E. Boggio-Lera.* Sopra un apparecchio registratore delle scariche elettriche dell' atmosfera. A.G.C.Nr. 13.

892. *E. Legrand.* Anémomètre électrique à indications à distance. C.R. 132. 323.

893. *F. Weczerz.* Nový rozložitelný přistroj pro astronomický zcměpis (Neuer zerlegbarer Apparat für astronomische Geographie). C. 29. 201.

894. *C. Guidi.* Di un nuovo flessimetro e sue applicazioni. A.A.T. 35. 175.

Siehe auch 91; 222; 227; 239; 333; 455; 543; 575; 617; 663; 678; 697; 752; 803; 823.

Die Tragkraft der Säulen bei veränderlichem Querschnitt.

Von Baurat ADOLF FRANCKE in Herzberg a/Harz.

Für die Bemessung der Standsicherheit eines auf Druck beanspruchten Stabes ist, wie bekannt, die Knickkraft desselben, d. i. der Grenzwert desjenigen Druckes, welcher hinreichend ist, den unendlich wenig ausgebogenen Stab in dieser Verbiegung zu erhalten, in der Weise als malsgebend anzusehen, dafs der Stab jedenfalls nur mit einem Bruchteil dieses Knickwertes belastet werden darf, wenn anders die für die Standfähigkeit des Bauwerkes erforderliche Sicherheit gegen etwaige Verbiegung des Stabes gewährleistet sein soll. Diese nämliche Überlegung gilt wie für Stäbe von unveränderlichem Querschnitt, so auch für Stäbe mit, stetig oder unstetig, veränderlichem Querschnitt. Eine zweckmäfsige Wirtschaftlichkeit aber erfordert jedenfalls in sehr vielen Fällen die Anordnung von gedrückten Stäben mit veränderlichem Querschnitt, und es soll daher die Knickkraft der Stäbe bei veränderlichem Querschnitt im Folgenden näher betrachtet werden.

1) Der gedrückte Stab bei Verstärkung des mittleren Teiles.

Für den in Abb. 1 dargestellten Stab gelten für die Strecken I, II, bei genügend kleinen Verbiegungen, die Differentialgleichungen:

$$EJ_1 \frac{d^2y}{dx^2} = -Qy$$

$$EJ_2 \frac{d^2y}{dx^2} = -Qy.$$

Wird gesetzt:

$$m_1 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_1}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_2}}; \quad \mu_1 = am_1, \quad \mu_2 = bm_2,$$

so können die aus denselben folgenden Integralgleichungen geschrieben werden:

$$y = \frac{h \sin(m_1 x)}{\sin(m_1 a)} = f \frac{\cos(m_2 b) \sin(m_1 x)}{\sin(m_1 a)}$$

für Strecke I,

$$y = f\cos(m_2(x - l))$$

für Strecke II, wenn, wegen gemeinsamer Drehung im gemeinsamen Grenzpunkte der Strecken die Bedingung erfüllt wird:

(1) $$tg\mu_2 tg\mu_1 = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}},$$

welche Gleichung, da $\mu_1 = a\sqrt{\frac{Q}{EJ_1}} = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{J_2}{J_1}}\mu_2 = n\cdot\mu_2$ ist, bei gegebenem Zahlenwert n zur Bestimmung des Zahlenwertes μ_2 aus $tg\mu_2 tg n\mu_2 = \sqrt{\frac{J_2}{J_1}}$ und damit des Knickwertes:

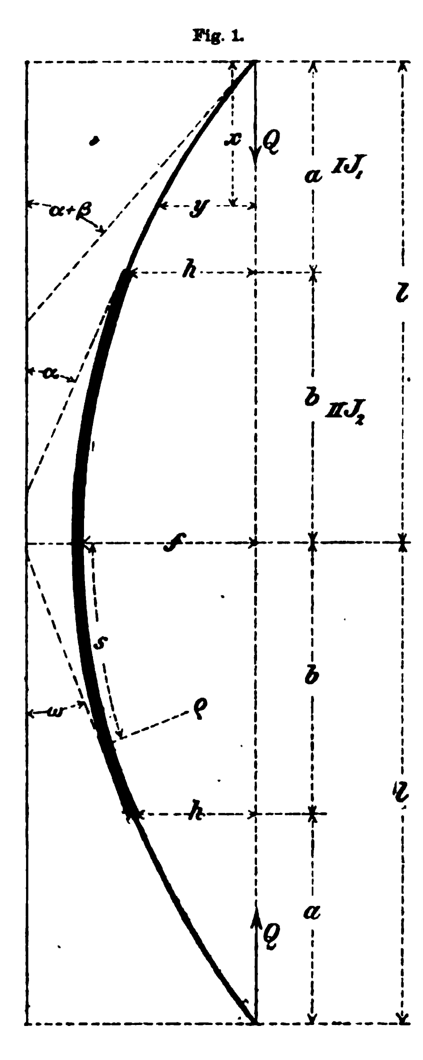


Fig. 1.

$$Q = \frac{EJ_2}{b^2}\mu_2^2 = \frac{EJ_1}{a^2}\mu_1^2$$

benutzt werden kann. Die Zahlen μ_2, μ_1 liegen stets zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, und für $a = 0$ oder $b = 0$ erreicht Q den Grenzwert $\frac{EJ}{l^2}\frac{\pi^2}{4}$.

Aus der Form der Navierschen Differentialgleichungen kann nur der Knickwert, als Grenzwert der Beugungskraft bei unendlich kleinen Biegungen, nicht der genaue Wert der Beugungskraft bei gröfseren endlichen Biegungen ermittelt werden, da der allgemeine genaue Wert der Beugungskraft mit den Winkelgröfsen, α, $\alpha + \beta$, der Verbiegung anwächst, letztere aber in der Navierschen Grundgleichung als verschwindend klein angesehen werden.

Bei gröfseren endlichen Verbiegungen kann man den Säulenteil a als einen unter dem Winkel α schräg am Fufs eingemauerten Stab ansehen. Für denselben gelten die Gleichungen:

(1a) $$h = \sqrt{\frac{2EJ_1}{Q}(\cos\alpha - \cos(\alpha + \beta))}$$

(2a) $$a\sqrt{\frac{Q}{EJ_1}} = \int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin^2\varphi}},$$

wenn

$$\eta = \arcsin\left\{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\right\}$$

ist. Für den Stabteil b aber gelten die genaueren Gleichungen:

$$d\left\{\frac{EJ_2}{\varrho}\right\} = -ds\cdot\sin\omega\cdot Q, \quad \text{und da} \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{d\omega}{ds}, \quad d\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2\omega}{ds},$$

also

$$\frac{EJ_2}{Q}\frac{d^2\omega}{ds}\cdot\frac{d\omega}{ds} = -d\omega\sin\omega$$

$$EJ_2\left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = 2Q\left\{\cos\omega - \left(1 - \frac{J_1}{J_2}\right)\cos\alpha - \frac{J_1}{J_2}\cos(\alpha+\beta)\right\}$$

oder für

$$\cos\alpha - \frac{J_1}{J_2}\{\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\} = \cos\theta,$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\alpha + \frac{J_1}{J_2}(\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta))}{2},$$

$$\frac{d\omega}{2\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2}}} = ds\sqrt{\frac{Q}{EJ_2}},$$

(3a) $$b = \int_0^{\alpha} ds = \sqrt{\frac{EJ_2}{Q}}\int_0^{\arcsin\left\{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right\}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}\sin^2\varphi}},$$

(4a) $$f - h = \int_0^{\alpha} ds\cdot\sin\omega = \sqrt{\frac{2EJ_2}{Q}}\left\{\sqrt{1-\cos\theta} - \sqrt{\cos\alpha - \cos\theta}\right\}.$$

Beispiele:

Für die runde Hohlsäule der Abb. 2 ist:

$$J_1 = \frac{\pi\{16^4 - 12^4\}}{64} = 2199; \quad J_2 = \frac{\pi\{20^4 - 12^4\}}{64} = 6836$$

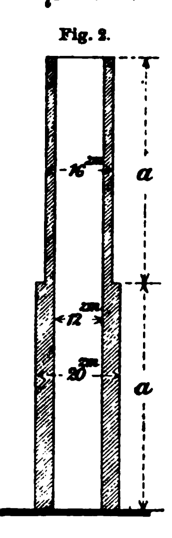
$$\frac{J_2}{J_1} = 3{,}109, \quad \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} = 1{,}763$$

und aus:

$$tg\mu_2\, tg\, 1{,}763\mu_2 = 1{,}763$$

folgt der Zahlenwert μ_2 = rund 0,65; μ_2^2 = rund 0,42; $Q = \frac{EJ_2}{a^2} 0{,}42 = \frac{EJ_2}{l^2} 1{,}68$, im Vergleich zum Eulerschen Knickwert:

Fig. 2.



$$\frac{EJ}{l^2} \frac{\pi^2}{4}.$$

Für die schlanke Holzsäule der Abb. 3 ist

$$J_1 = 201; \quad J_2 = 804; \quad \sqrt{\frac{J_2}{J_1}} = 2; \quad tg\mu_2 \cdot tg 1{,}5\mu_1 = 2.$$

$$\mu_2 = 0{,}7545 \quad \text{und daher für} \quad E = 100000.$$

$$Q = \frac{100000 \cdot 804 \cdot 0^2{,}754}{400^2} = 285{,}7 \text{ kg}.$$

Wir erhalten daraus die Zahlenwerte:

$$m_1 = \frac{1{,}5\mu_2}{300} = \frac{1}{265}; \quad m_2 = \frac{\mu_2}{400} = \frac{1}{530};$$

$$h = f \cdot \cos\mu_2 = 0{,}72859 f$$

$$tg(\alpha + \beta) = m_1 f \cdot \frac{\cos\mu_2}{\sin\mu_1} = \frac{f}{329}; \quad tg\alpha = \frac{f}{774}.$$

Wenden wir nun diese Beziehungen, welche der Ableitung nach nur für sehr kleine Verlängerungen giltig sind, auch für gröfsere Durchbiegungen f an, so sind wir in der Lage, an der Hand der Gleichungen (1a) bis (4a) zu prüfen, ob und wie weit dieses rechnerisch zulässig bleibt.

Fig. 3.

Sei z. B

$$f = 80 \text{ cm},$$

dann wäre

$$tg(\alpha + \beta) = 0{,}243; \quad \alpha + \beta = 13^0 40'$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 0{,}9716$$

$$tg\alpha = 0{,}1034, \quad \alpha = 5^0 54, \quad \cos\alpha = 0{,}9947.$$

Setzt man diese Zahlen in die Gleichungen (1a) bis (4a) bei dem Werte $Q = 285$ kg, ein, so wird man finden, dafs dieselben zwar nicht mathematisch genau, aber doch annähernd erfüllt werden.

Der Kreis als Biegungslinie der Säule.

Allgemein, nicht nur für sehr kleine, sondern auch für beliebig grofse Knickbeugungen, Abb. 4, folgt aus $d\left\{\frac{EJ}{\varrho}\right\} = -Q \sin\omega \, ds$ für $\varrho = r$ = unverändert:

$$\frac{E}{Qr^2} dJ = -\sin\omega \, d\omega$$

$$J = \frac{Qr^2}{E}\{\cos\omega - \cos\beta\} =$$

$$\frac{J_m\{\cos\omega - \cos\beta\}}{1-\cos\beta} = J_m \cdot \frac{y}{f};$$

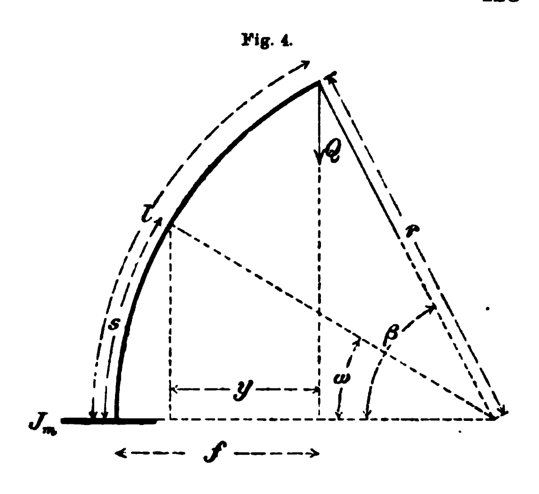
$$Q = \frac{EJ_m}{r^2(1-\cos\beta)}.$$

Für kleine Werte β folgt aus $1-\cos\beta = \frac{\beta^2}{2}$, $r\beta = l$:

$$Q = \frac{2EJ_m}{l^2};$$

$$J_m\left(1-\left(\frac{\omega}{\beta}\right)^2\right) =$$

$$J_m\left(1-\frac{v^2}{l^2}\right) = J.$$



Die Säule des veränderlichen Kreisquerschnittes der Abb. 5, vom Durchmesser

$$w = d\sqrt[4]{\frac{xz}{l^2}} =$$

$$d\sqrt[4]{\frac{x(2l-x)}{l^2}} = d\sqrt{\frac{h}{l}};$$

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{64}\frac{d^4x(2l-x)}{l^2} =$$

$$\frac{\pi}{64}d^4\left(1-\frac{v^2}{l^2}\right),$$

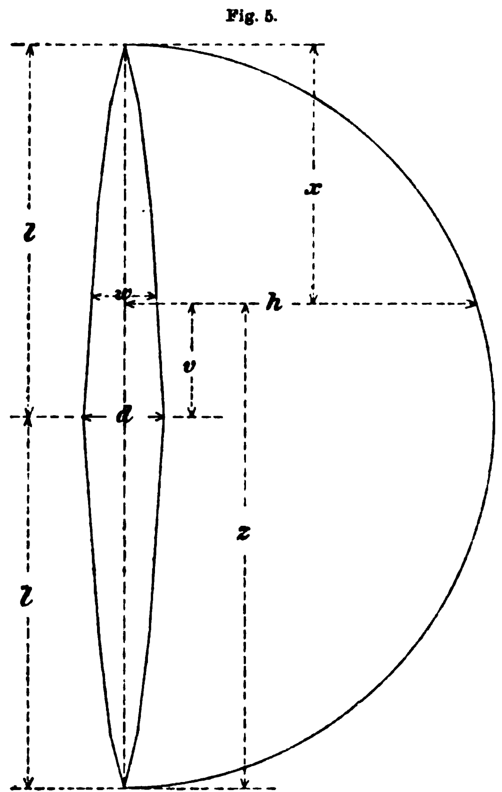
verbiegt sich daher bei genügend kleinen Beugungen nach den Gleichungen:

$$E\frac{\pi}{64}\frac{d^4}{l^2}x(2l-x)\frac{d^2y}{dx^2} = -Qy,$$

$$y = \frac{f}{l^2}(2l-x)x$$

bei der Knickkraft:

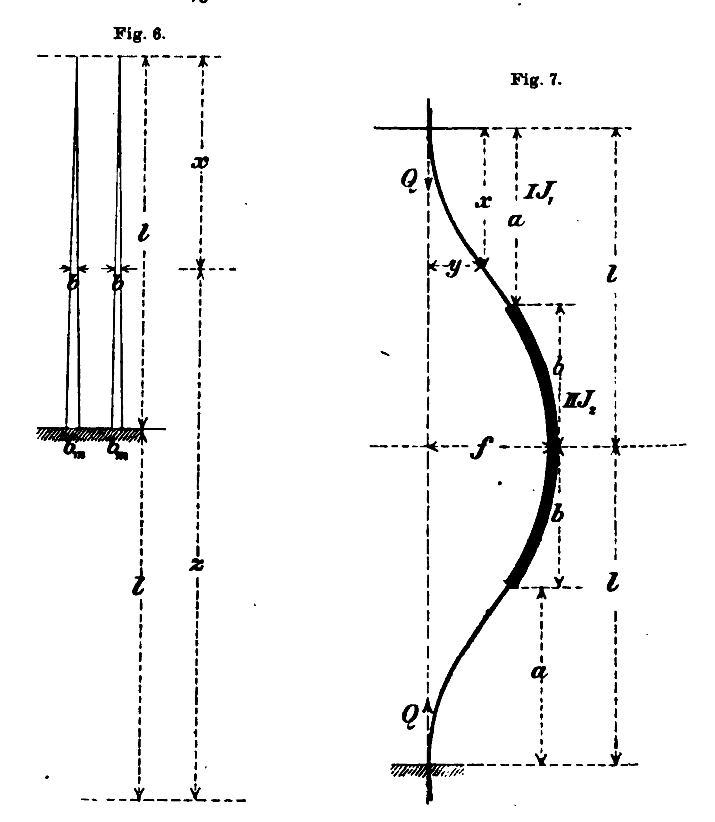
$$Q = \frac{E\pi}{32}\frac{d^4}{l^2} = \frac{2EJ_m}{l^2}.$$



Bei einer Hohlsäule, Abb. 6, der Wandstärke $b = b_m\frac{xz}{l^2} = b_m\left(\frac{h}{l}\right)^2$ ändert sich bei genügend grofsem Säulendurchmesser das Trägheitsmoment mit hinreichender Genauigkeit nach dem angenommenen

Gesetze $J = J_m \frac{(2l - x)x}{l^2}$. Eine solche Säule würde daher, bei eintretender Beugung, sich nach einem Kreisbogen verbiegen und zugleich, in Bezug auf diese Knickbiegungen, als ein Stab von gleichem Widerstande erscheinen.

Das Gewicht einer solchen Säule beträgt bei gleichen Säulendurchmessern rund $^2/_3$ der Säule von unveränderlicher Wandstärke b,



daher dieselbe, bei gleichem Gewicht, rund eine $\frac{12}{\pi^2}$ fache Knickkraft besitzt, als die Säule von gleichmäfsiger Wandstärke.

Die Säule mit beiderseits undrehbaren Enden bei Verstärkung der Säulenmitte.

Für den in Abb. 7 dargestellten gedrückten Stab gelten bei genügend kleinen Verbiegungen die Gleichungen:

$$y = c(1 - \cos m_1 x)$$

für die Strecke I,

$$y = c\left(1 - \frac{\cos(m_1 a)}{\cos m_2 b}\cos\left(m_2(x - b)\right)\right)$$

für Strecke II, wenn die Durchbiegung der Mitte $f = c\left(1 = \frac{\cos m_1 a}{\cos m_2 b}\right)$ ist und

$$m_2 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_2}} = \frac{\mu_2}{b}, \quad m_1 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_1}} = \frac{\mu_1}{a}$$

gesetzt wird, und der Knickwert Q der Bedingung genügt:

(2) $$\sqrt{\frac{J_2}{J_1}} = -\, tg\mu_2 ctg\mu_1 .$$

Da $\sqrt{\frac{J_2}{J_1}}$ als positive Zahl zu betrachten ist, so liegt einer der beiden Winkelwerte μ_2, μ_1 stets zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, der andere zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π.

Ist z. B. b sehr klein, so nähert sich, für $\lim \mu_2 = 0$, μ_1 seinem äufsersten Grenzwerte π, ist umgekehrt a sehr klein, so nähert sich für $\lim ctg\mu_1 = +\infty$ μ_2 seinem Grenzwert π. Nähert sich J_2 dem Werte J_1, so folgt, für alle Verhältnisse $a : b$, aus $\mu_1 + \mu_2 = \pi$ stets $Q = \frac{EJ \cdot \pi^2}{(a + b)^2}$.

Zahlenbeispiele:

Wäre die Säule der Abb. 2 an beiden Enden fest eingemauert, so würde ihre Knickkraft zu berechnen sein aus:

$$tg\mu_2 ctg 1{,}763\mu_2 = -1{,}763; \quad Q = \frac{\mu_2^2 EJ_2}{b^2},$$

wobei μ_2 den Zahlenwert 1,2178 und daher Q den Wert $\frac{1^2{,}2178\, EJ_2}{b^2}$ annimmt.

Wäre aber die Säule der Abb. 3 an beiden Enden undrehbar, so würden die Werte gelten:

$$tg\mu_2 ctg 1{,}5\mu_2 = -2; \quad Q = \frac{\mu_2^2 EJ_2}{b^2} = \frac{1^2{,}34 \cdot EJ_2}{b^2}$$

$$= \frac{1^2{,}34 \cdot 100000 \cdot 804}{400^2} = 902 \text{ kg}.$$

Säule mit mehrfachen Verstärkungen.

Für den am Fufse eingemauerten Stab der Abb. 8 mit zwei Sprüngen des Trägheitsmomentes des Stabquerschnittes gelten für unendlich kleine Beugungen die Differentialgleichungen:

I) $EJ_1 \frac{d^2y}{dx^2} = -Qy$, II) $EJ_2 \frac{d^2y}{dx^2} = -Qy$, III) $EJ_3 \frac{d^2y}{dx^2} = -Qy$,

aus welchen bei den Werten:

$$m_1 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_1}}, \quad \mu_1 = am_1, \quad m_2 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_2}}, \quad \mu_2 = bm_2,$$
$$m_3 = \sqrt{\frac{Q}{EJ_3}}, \quad \mu_3 = cm_3$$

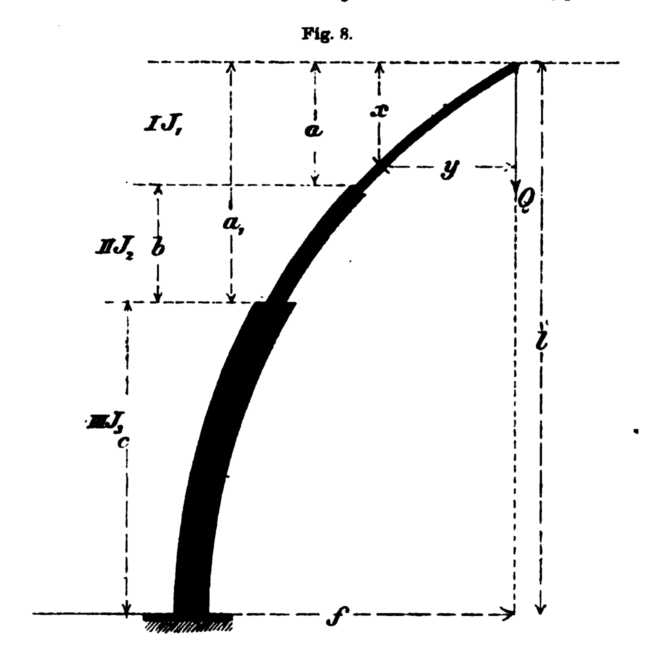
die Gleichungen der Durchbiegungen folgen:

(III) $$y = f\cos(m_3(x-l)),$$

(II) $$y = f\left\{\cos\mu_3 \cos(m_2(a_1-x)) - \frac{m_3}{m_2}\sin\mu_3 \sin(m_2(a_1-x))\right\},$$

(I) $$y = f\left\{\cos\mu_3\cos\mu_2 - \frac{m_3}{m_2}\sin\mu_3\sin\mu_2\right\}\frac{\sin m_1 x}{\sin\mu_1}$$

Fig. 8.



mit der Bedingungsgleichung zur Bestimmung des Knickwertes Q:

$$m_2^2 tg\mu_1 tg\mu_2 + m_2 m_3 tg\mu_1 tg\mu_3 + m_1 m_3 tg\mu_3 tg\mu_2 = m_1 m_2.$$

Zahlenbeispiel:

Es sei $J_2 = 4J_1$, $J_3 = 4J_2$, $a = c = 3b$, dann lautet die Bestimmungsgleichung für $\mu_1 = a\sqrt{\frac{Q}{EJ_1}}$:

$$tg\mu_1 tg\frac{\mu_1}{6} + \tfrac{1}{2}tg\mu_1 tg\frac{\mu_1}{4} + tg\frac{\mu_1}{4}tg\frac{\mu_1}{6} = 2,$$

welcher der Wert $\mu_1 = 78^0 = 1{,}36$ entspricht, mit dem Zahlenwerte:

$$Q = 1{,}85\frac{EJ_1}{a^2}.$$

Betrachtet man den oberen Stabteil a für sich, so wäre dessen Knickwert, bei Einmauerung seines Fufses $= \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ_1}{a^2}$, im Vergleich zum gefundenen, rund 25% kleineren Werte Q.

Säule mit von den Enden zur Mitte gleichmäfsig anwachsendem Trägheitsmoment.

Eine Säule mit freien Enden, bei welcher das Trägheitsmoment J des Querschnittes von den Enden zur Mitte gleichmäfsig zunimmt nach dem Gesetze $J = J_m \frac{x}{l}$, worin J_m das gröfste Trägheitsmoment in der Säulenmitte darstellt, verbiegt sich bei eintretender, unendlich kleiner Knickbeugung nach der Gleichung:

$\frac{EJ_m}{lQ} \frac{d_y^2}{dx^2} = \frac{-y}{x}$, oder wenn die unbekannte Längenzahl $\frac{EJ_m}{lQ} = \lambda$ gesetzt und $x = \lambda z$ gesetzt wird, nach der Gleichung:

$$\frac{d_y^2}{dz^2} = -\frac{y}{z}$$

mit dem, die Bedingung $y = 0$ für $x = 0$, $z = 0$ erfüllenden Integrale:

$$y = A \left\{ z - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{2^2 \cdot 3} - \frac{z^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{z^5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} - \cdot \cdot \right\}.$$

Der Zahlenwert λ und damit die Knickkraft Q ist aber bestimmt durch die Forderung $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dz} = o$ für $x = l$, $z = \frac{l}{\lambda}$, aus der Gleichung:

$$o = 1 - z + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{z^4}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \frac{z^5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2}$$

mit dem Werthe $z = \frac{l}{\lambda} = 1,4$;

$$Q = 1,4 \frac{EJ_m}{l^2}.$$

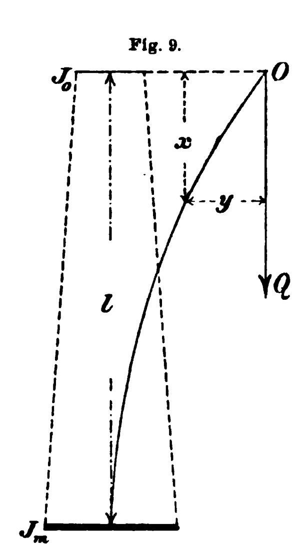
Der abgestumpfte Kegel.

Das Trägheitsmoment des Querschnittes eines abgestumpften geraden Kegels, sowie überhaupt allgemein einer abgestumpften geraden Pyramide von beliebiger Querschnittsbildung, kann gegeben werden, Abb. 9, durch die Formel:

$$J = J_0 \left\{ 1 + \alpha \frac{x}{l} \right\}^4, \text{ wenn } (1 + \alpha) = \sqrt[4]{\frac{J_m}{J_0}},\ J_m = J_0 (1 + \alpha)^4$$

ist, J_m das Trägheitsmoment der Grundfläche, J_0 dasjenige der Kopffläche ist. Für J_0 setzen wir im Folgenden, zunächst, ausdrücklich

einen endlichen, von 0 verschiedenen Wert voraus, sodafs also auch α als eine endliche, bestimmte und bekannte Zahl erscheint. Alsdann



geht die Gleichung: $\frac{EJ}{Q}\frac{d_y^2}{dx^2} = -y$ über in $\frac{EJ_0}{Q}\left\{1+\frac{\alpha x}{l}\right\}^4\frac{d_y^2}{dx^2} = -y$, oder, wenn gesetzt wird:

$$\frac{EJ_0}{Q} = \frac{l^2}{\alpha^2\eta^2}, \left(1+\frac{\alpha x}{l}\right) = \eta z,\ dx = \left(\frac{\eta l}{\alpha}\right)dz,$$

in die Gleichung:

$$z^4\frac{d_y^2}{dz^2} = -y$$

mit dem allgemeinen Integral $y = Az\sin\frac{1}{z} + Bz\cos\frac{1}{z}$, welches, weil für $x=0$, $z=\frac{1}{\eta}$, $y=0$ ist, die Form annimmt:

$$\frac{y}{c} = z\sin\left(\eta - \frac{1}{z}\right),$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{c}\frac{dy}{dz} = \sin\left(\eta-\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\cos\left(\eta-\frac{1}{z}\right)$$

Für $x = l$, $z = \frac{1+\alpha}{\eta}$ ist $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = 0$, also ist $\operatorname{tg}\left\{\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right\} = -\frac{\eta}{1+\alpha}$, aus welcher Gleichung bei gegebenem Zahlenwert α, der zugehörige Wert $\frac{\eta}{1+\alpha}$ stets bestimmt ist und mithin auch die Knickkraft Q gegeben ist.

Da $\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}$ stets gröfser als $\frac{\pi}{2}$ ist, so liegt Q stets irgendwo zwischen den Grenzen

$$\frac{EJ_m\pi^2}{l^2 4(1+\alpha)^2} < Q < \frac{EJ_m}{l^2}\frac{\pi^2}{4}.$$

Zahlenbeispiel: Sei $J_m = 16\,J_0$, $1+\alpha = 2$, $\alpha = 1$, so ergiebt die Gleichung $\operatorname{tg}\frac{\eta}{2} = -\frac{\eta}{2}$ den Zahlenwert $\frac{\eta}{2} = 2{,}029$ und Q hat den Zahlenwert $Q = \frac{EJ_0}{l^2}4^2{,}058 = \frac{EJ_m}{l^2}1^2{,}014$. —

Ersetzen wir wiederum z durch x, so können wir die Biegungsgleichung schreiben

$$\frac{y}{f} = \frac{\left((1+\alpha\frac{x}{l}\right)\sin\left\{\frac{\alpha\eta x}{l+\alpha x}\right\}}{(1+\alpha)\sin\left(\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right)},$$

welche für $\alpha = 0$, $\frac{\alpha\eta}{l} = m$ die Knickbiegung des Cylinders darstellt,

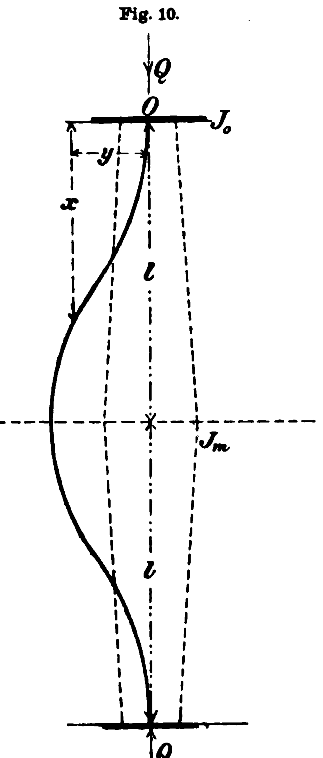
für $\alpha = \infty$, also den spitzen Kegel, aber der Natur der Sache nach unbestimmt werden mufs, weil die Spitze mehrfach unendlich biegsam wird und daher die allgemeine Bedingung der Gültigkeit der Gleichung $EJ\frac{d_y^2}{dx^2} = -M$, nämlich das Verschwinden des Wertes $\frac{dy}{dx}$ gegen 1, selbst bei kleinen Werten Q nicht mehr erfüllt ist.

Der abgestumpfte Doppelkegel mit beiderseits fest eingemauerten Enden.

Es gilt, Abb. 10, die Differentialgleichung:

$$\frac{EJ}{Q}\frac{d_y^2}{dx^2} = -y + c,$$

oder wenn die Beziehungen der vorhergehenden Darstellung beibehalten werden:



$$\frac{EJ_0}{Q}\left\{1 + \alpha\frac{x}{l}\right\}^4 \frac{d_y^2}{dx^2} = -y + c,$$

$$z^4\frac{d_y^2}{dz^2} + y - c = 0,$$

$$y = c + Az\sin\frac{1}{z} + Bz\cos\frac{1}{z}.$$

Weil für $x = 0$, $z = \frac{1}{\eta}$, $y = 0$, $\frac{dy}{dz} = 0$ ist, so ist

$$A = -c\,\{\cos\eta + \eta\sin\eta\};$$

$$B = C\,(\sin\eta - \eta\cos\eta),$$

$$y = c\left\{1 + z\sin\left(\eta - \frac{1}{z}\right) - \eta z\cos\left(\eta - \frac{1}{z}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{c}\frac{dy}{dz} = \sin\left(\eta - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\cos\left(\eta - \frac{1}{z}\right)$$

$$-\eta\cos\left(\eta - \frac{1}{z}\right) + \frac{\eta}{z}\sin\left(\eta - \frac{1}{z}\right).$$

Für $x = l$, $z = \frac{1+\alpha}{\eta}$ ist $\frac{dy}{dz} = 0$, woraus die Bestimmungsgleichung für η und Q folgt:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right) = \frac{\alpha\eta}{1+\alpha+\eta^2}.$$

Der Zahlenwert $\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}$ liegt stets zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$, weshalb der Knickwert Q der Bedingung genügt:

$$\frac{EJ_m\pi^2}{l^2(1+\alpha)^2} < Q < \frac{EJ_m 9\pi^2}{4l^2(1+\alpha)^2}$$

und es schmiegt sich für sehr kleine Werte αQ dem linksseitigen, für grofse Werte α dem rechtseitigen Werte an.

Die Beugung des abgestumpften Kegels bei Angriff der Last aufserhalb der Mittellinie.

Es gilt, Abb. 11, wenn die vorigen Beziehungen beibehalten werden, bei Annahme des Lastpunktes O als Ursprung, die Gleichung:

$$\frac{y}{a} = \frac{\eta z\left[\frac{\eta}{1+\alpha}\cdot\cos\left(\frac{1}{z}-\frac{\eta}{1+\alpha}\right)+\sin\left(\frac{1}{z}-\frac{\eta}{1+\alpha}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right)+\frac{\eta}{1+\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right)}$$

oder, nach Einführung von x:

$$\frac{y}{a} = \frac{\left\{\frac{l+\alpha x}{l}\right\}\left[\frac{\eta}{1+\alpha}\cos\left(\frac{\eta\alpha}{1+\alpha}\cdot\left(\frac{l-x}{l+\alpha x}\right)\right)+\sin\left(\frac{\eta\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{l-x}{l+\alpha x}\right)\right)\right]}{\sin\left(\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right)+\frac{\eta}{1+\alpha}\cos\left(\frac{\alpha\eta}{1+\alpha}\right)},$$

welche allen Bedingungen, sowie der Differentialgleichung:

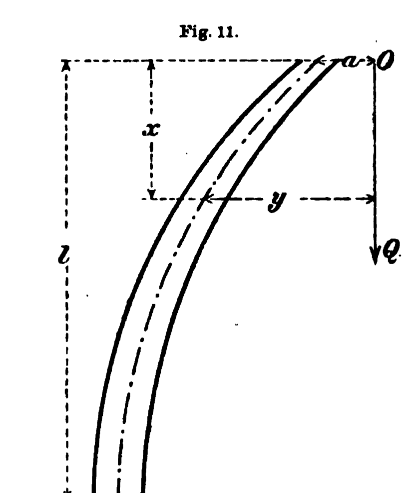


Fig. 11.

$$\frac{EJ_0\left(1+\alpha\frac{x}{l}\right)^4}{Q}\,\frac{d^2y}{dx^2} = -y, \text{ oder}$$

$$z^4\frac{d^2y}{dz^2}+y=0$$

Genüge leistet, während der Zahlenwert $\eta = \frac{l}{\alpha}\sqrt{\frac{Q}{EJ_0}}$ für beliebige, willkürliche, von 0 anfangende Werte Q gegeben ist, $\eta z = 1 + \alpha\frac{x}{l}$ zu setzen ist.

Diese Gleichung hat, wie überhaupt jede derartige Gleichung, der Natur der Sache nach so lange rechnerische Gültigkeit, als die daraus entspringenden Werte y, $\frac{dy}{dx}$ so klein bleiben, dafs eine Vertauschung von $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ mit 1 rechnerisch zulässig bleibt. Werden die Werte y, $\frac{dy}{dx}$, durch Einsetzung eines Wertes Q oder bei irgend sonstiger Annahme, sehr grofs, unbestimmt oder gar unendlich grofs, so ist eine hieraus gezogene Folgerung, dafs der Stab brechen müsse, an und für sich nicht berechtigt, sondern es ist vielmehr lediglich der Schlufs zu

ziehen, dafs die Darstellung der elastischen Durchbiegungen auf Grund der Navierschen Annäherungsformeln unzureichend wird. —

Für lim $\alpha = 0$, $\eta\alpha = l\sqrt{\frac{Q}{EJ}}$

$$\frac{1}{z} - \frac{\eta}{1+\alpha} = \left(\frac{\eta}{1+\alpha\frac{x}{l}} - \frac{\eta}{1+\alpha}\right) \equiv \eta\alpha\left(1-\frac{x}{l}\right)$$

gehen die Formeln in die bekannten Formeln für den geraden Cylinder über. —

Einige Fälle, in welchen das Trägheitsmoment des Säulenquerschnittes sich nach einfachen Gesetzen ändert.

Ändert sich die Wandstärke w der Säule der Abb. 12 nach dem Gesetze $w = b\sqrt{\frac{x}{l}}$, so ändert sich auch bei genügend grofsem Säulendurchmesser das Trägheitsmoment mit hinreichender Genauigkeit nach dem gleichen Gesetze $J_x = J\sqrt{\frac{x}{l}}$, wenn J das Trägheitsmoment für $x = l$ darstellt, und aus:

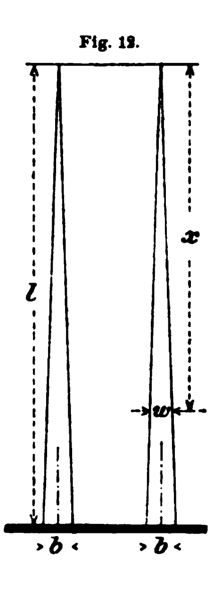


Fig. 12.

$$\frac{EJ}{Q}\sqrt{\frac{x}{l}}\,\frac{d^2_y}{dx^2} = -y,$$

oder wenn

$$n\frac{x}{l} = \xi \text{ und } \frac{EJ}{Ql^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\gamma} \text{ gesetzt wird:}$$

$$\sqrt{\xi}\cdot\frac{d^2_y}{d\xi^2} + y = 0$$

folgt:

$$\frac{y}{c} \doteq \xi - \frac{2^2}{3\cdot 5}\xi^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3^2\cdot 5}\xi^4 - \frac{2^2\xi^{\frac{11}{2}}}{3^2\cdot 5\cdot 9\cdot 11} + \frac{2\xi^7}{3^3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11} - \cdots + \cdots$$

während der Knickwert Q bestimmt ist aus:

$$0 = 1 - \tfrac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3^2\cdot 5}n^3 - \frac{2n^{\frac{9}{2}}}{3^2\cdot 5\cdot 9} + \cdot\cdot$$

oder

$$0 = 1 - \tfrac{2}{3}\gamma + \frac{4}{45}\gamma^2 - \frac{2\cdot\gamma^3}{9\cdot 45} + \frac{2\gamma^4}{3^3\cdot 5\cdot 9\cdot 11} - \cdots + \cdots$$

woraus ein Zahlenwert γ etwas kleiner als 2 folgt und für Q der Wert $Q = 1{,}95\,\frac{EJ}{l^2}$ sich ergiebt.

Weil das Gewicht einer solchen Säule rund $\frac{2}{3}$ des Gewichtes der Säule von gleichmäfsiger Wandstärke b beträgt, so hat, bei Vergleich

zweier Säulen von gleichem Gewicht, die Säule des veränderlichen Querschnittes etwa 1, 2 fache Knickkraft bei anderthalbfachem Widerstandsmoment im Mittel-, bezw. Fufspunkte, $x = l$.

Wäre aber etwa $J_x = J \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$, so folgt aus:

$$\frac{EJ}{Q} \sqrt[3]{\frac{x^1}{l}} \frac{d_y^2}{dx^2} + y = 0, \text{ für } \frac{EJ}{Ql^2} = \frac{1}{n^{5/3}} = \frac{1}{\gamma}, \; n \frac{x}{l} = \xi,$$

$$\sqrt[3]{\xi} \frac{d_y^2}{d\xi^2} + y = 0; \; y = \xi - \frac{3^2}{5 \cdot 8} \xi^{\frac{8}{5}} + \frac{3^4 \xi^{\frac{13}{8}}}{5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 13} - \frac{3^4 \xi^6}{5^2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 13} + \cdots$$

$$0 = 1 - \frac{3}{5}\gamma + \frac{3^3 \gamma^2}{5 \cdot 8 \cdot 10} - \frac{3^4 \cdot \gamma^3}{5^2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 13} + \cdots.$$

$$Q = \text{rund } 2, 1 \frac{EJ}{l^2}, \text{ während für } J_x = J \sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^2},$$

durch genau entsprechende Darstellung, der Wert

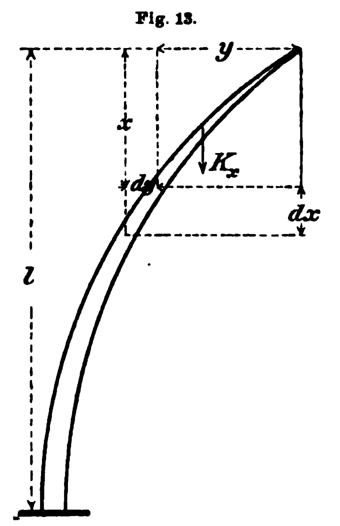
$$0 = 1 - \frac{3}{4}\gamma + \frac{3^3 \gamma^2}{4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{3^4 \gamma^3}{4^2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11} + \cdots.$$

$$Q = \text{rund nahezu } 1, 8 \frac{EJ}{l^2} \text{ gefunden wird. —}$$

Das Knicken des Kegels durch das Eigengewicht.

Verbleibt ein, durch irgend welche äufsere zeitweilig wirkende Ursache z. B. den Winddruck gebogener, vorher und an und für sich gerader, am Fufse undrehbar eingemauerter Stab, Abb. 13, nach Verschwinden der äufseren Ursache, also z. B. nach Aufhören des Windes dauernd in einer Verbiegung, so gilt für das Gleichgewicht dieser die Differentialgleichung: $d\left\{EJ_x \frac{d_y^2}{dx^2}\right\} = -K_x dy$, wenn K_x das Gewicht des Stabteiles der Strecke x bedeutet.

Fig. 13.



Für einen Vollkegel des Gesamtgewichtes K erhalten wir, wenn J das Trägheitsmoment der Grundfläche bedeutet:

$$d\left[EJ \frac{x^4}{l^4} \frac{d_y^2}{dx^2}\right] + K \frac{x^3}{l^3} dy = 0,$$

woraus folgt:

$$x \frac{d_y^3}{dx^3} + 4 \frac{d_y^2}{dx^2} + \frac{Kl}{EJ} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Wird $\frac{Kl}{EJ} = \frac{1}{\lambda}$ gesetzt, so kann das allgemeine Integral geschrieben werden für $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \left\{1 - \frac{x}{4\lambda} + \frac{x^2}{4 \cdot 10\,\lambda^2} - \frac{x^3}{4 \cdot 10 \cdot 18\,\lambda^3} + \cdots\right\}$$

$$\left\{A + B\left(\frac{1}{x^3} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_0\,\mathrm{l}.\,x + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \cdots\right)\right\},$$

worin A und B die beiden willkürlichen Integrationsfestwerte bedeuten, a_2, a_1 u. s. w. bestimmte Zahlen bedeuten, welche hier nicht näher dargestellt zu werden brauchen, weil für unseren Sonderfall der Wert $B = 0$ gilt, indem für $x = 0$ die Bedingung gilt weder $\frac{dy}{dx}$ noch $y = \infty$, oder unbestimmt. Wir erhalten mithin, für $B = 0$, aus der Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ die Gleichung:

$$0 = 1 - \frac{1}{4}\left(\frac{l}{\lambda}\right) + \frac{1}{4 \cdot 10}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 - \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 18}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^3 + \frac{1}{20160}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^4$$

$$- \frac{1}{20160 \cdot 40}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^5 + \frac{1}{20160 \cdot 40 \cdot 56}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^6 - \frac{1}{20160 \cdot 40 \cdot 56 \cdot 70}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^7 + \cdot - \cdot \cdot$$

mit dem Zahlenwert $\frac{l}{\lambda}$ = rund 11,8.

Damit also ein solcher Kegel, nach Aufhören des Windes nicht schief verbogen steht, ist die Bedingung zu erfüllen:

$$K < 11{,}8\,\frac{EJ}{l^2} \cdot -$$

Für den in Abb. 14 dargestellten Hohlkegel ist das nämliche Veränderungsgesetz gültig. Es ist für genügend kleine Verhältnisse $\frac{b}{a} = \frac{w}{r}$:

$$J_x = \frac{2r\pi \cdot w \cdot r^2}{2} = \frac{x^4}{l^4}\,J, \text{ wenn } J = \frac{2a\pi \cdot b \cdot a^2}{2}$$

das Trägheitsmoment der Grundfläche darstellt;

$$K_x = 2\pi r \cdot w \cdot \frac{x}{3} \cdot q = K\,\frac{x^3}{l^3} \equiv Q\,\frac{x^3}{l^3},$$

wenn Q die Gesamtbelastung, Eigengewicht der tragenden Teile und im Raume gleichmäfsig verteilte Belastung, darstellt, und es folgt aus:

$$\frac{Ql^2}{EJ} < 11{,}8 \text{ für } J = \pi a^3 b$$

$$\frac{a}{l} > \frac{1}{6}\sqrt{\frac{Q}{Eab}},$$

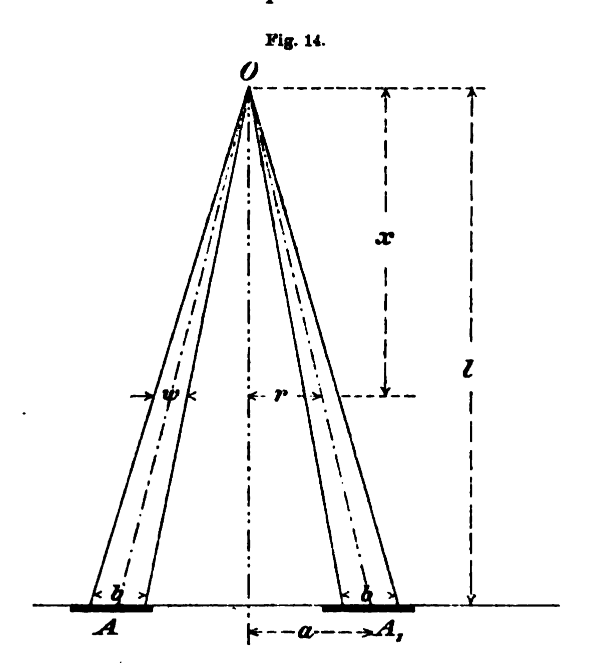
oder, allgemeiner geschrieben und auch für den Fall gültig, dafs der

Kreisringmantel OAA_1 nicht massiv, sondern beliebig ausgebildet ist, da $ab = \frac{J}{F}$, gemäfs der vorigen Entwickelung, eingesetzt werden darf:

$$\text{Neigung } \frac{a}{l} > \frac{1}{6}\sqrt{\frac{QF}{EJ}},$$

wenn also Q das Gesamtgewicht, F die kreisförmige Grundfläche, J das Trägheitsmoment des Grundquerschnitts bedeutet.

Fig. 14.



Die Formel aber $\frac{Ql^2}{EJ} < 11{,}8$ bleibt allgemein für jede beliebige Querschnittsausbildung und Auflösung des Kegels oder der Pyramide OAA_1 in beliebige, gesonderte Stabanordnungen anwendbar, so lange hierbei der Punkt O als Ähnlichkeitspunkt des ganzen Gebildes betrachtet werden kann, da für beliebige, aber einander ähnliche, Querschnittsausbildungen stets stattfindet $J_x = \frac{x^4}{l^4} J$ und eine räumliche gleichmäfsige Verteilung des Gesamtgewichtes Q dem Gesetze $K_x = Q\frac{x^3}{l^3}$ entspricht.

Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen.

Von Dr. WILHELM KUTTA,
Assistent an der Technischen Hochschule in München.

I.

Angeregt durch den Aufsatz von Herrn Runge in Bd. 46 der mathematischen Annalen, beschäftigte sich der Verfasser im Jahre 1899 mit Versuchen einer Verallgemeinerung der dort aufgestellten Formeln, die eine angenäherte Berechnung der Lösung von Differentialgleichungen durch Berechnung der direkt gegebenen Differentialquotienten an einer Reihe von Punkten ermöglichen. Seitdem ist im ersten Heft von Bd. 45 dieser Zeitschrift eine Abhandlung von Herrn Heun über denselben Gegenstand veröffentlicht worden, im Anschlufs an die der Verfasser sich erlaubt, seine Resultate vorzulegen, die ihm aus einem etwas allgemeineren Ansatz hervorzugehen und teilweise einfachere Endformeln zu liefern scheinen.

Die von Herrn Runge gegebene Methode, eine Verallgemeinerung bekannter Methoden für Quadraturen, lehrt, von einem Punkte einer Integralkurve der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ausgehend einen zweiten Punkt dieser Integralkurve mit Annäherung durch gesetzmäfsige polygonale Linienzüge zu erreichen. Die Längen der Geradenstücke werden möglichst günstig gewählt, ebenso die Richtungen, und zwar diese aus den Richtungen, welche die Differentialgleichung in der Nähe der Integralkurve zwischen Anfangspunkt und Endpunkt des Integrales bestimmt. Als Mafsstab für die Ordnung der Näherung wird die Übereinstimmung benützt, die der Taylorsche Satz für die wahre Entwickelung des Integrales mit der Entwickelung der angesetzten Näherung ergiebt.

Das Bestreben des Verfassers ging in erster Linie dahin, die Zahl der zu berechnenden Richtungen, d. h. Funktionswerte f, möglichst

gering zu halten, was für die rechnerische Benutzung der Formeln wichtig ist; sodann in zweiter Linie aus demselben Grunde dahin, die auftretenden Zahlenkoeffizienten rational zu erhalten (man vergleiche in dieser Hinsicht die Gaufssche Quadratur etwa mit der Simpsonschen Regel), endlich in dritter Linie dahin, die Zahl der in die Endformel eintretenden Richtungen oder Funktionswerte möglichst zu verringern, da man leicht erkennen wird, dafs die nicht in das Endresultat direkt eintretenden Funktionswerte nicht mit der gleichen Genauigkeit gerechnet zu werden brauchen.

Es möge noch vorausgeschickt werden, dafs die Punkte, in denen die Hilfsrichtungen aufgestellt werden, bis auf Gröfsen zweiter Ordnung auf der durch die Differentialgleichung im Ausgangspunkte bestimmten Richtung der Tangente der Integralkurve gelegen sind. Dadurch werden bei Entwickelung der Näherung nach dem Taylorschen Satze die von Herrn Heun symbolisch mit Df bezeichneten Ausdrücke zusammengehalten und die Rechnung sehr vereinfacht und gekürzt.

Der allgemeine Ansatz von Herrn Heun fordert die Berechnung von n Serien von Funktionswerten, die sich innerhalb einer Serie in der folgenden Art aus einander entwickeln (die Bezeichnung ist wegen des Folgenden etwas geändert):

$$\begin{aligned}
\Delta_1' &= f(x, y)\Delta x,\\
\Delta_1'' &= f(x + \varepsilon_1'\Delta x; \; y + \varepsilon_1'\Delta_1')\Delta x,\\
\Delta_1''' &= f(x + \varepsilon_1''\Delta x, \; y + \varepsilon_1''\Delta_1'')\Delta x,\\
&\;\vdots \qquad\qquad \vdots\\
\Delta_1^{(m)} &= f(x + \varepsilon_1^{(m-1)}\Delta x, \;\; y + \varepsilon_1^{(m-1)}\Delta_1^{(m-1)})\Delta x,
\end{aligned}$$

so dafs stets der Punkt, in dem eine Richtung $\frac{\Delta^{(\nu)}}{\Delta x}$ berechnet wird, auf der vorher berechneten Richtung $\frac{\Delta^{(\nu-1)}}{\Delta x}$ durch den Ausgangspunkt gezogen in dem möglichst günstig zu wählenden Abscissenabstand $\varepsilon^{(\nu-1)}\Delta x$ liegt. Alsdann setzt man als gesuchten Näherungswert Δy, d. h. den Ordinatenunterschied der Integralkurve für einen Abscissenunterschied Δx eine aus den Werten $\Delta_1^m, \Delta_2^m \cdots \Delta_\mu^m$ mit konstanten Koeffizienten gebildete Summe an:

$$\Delta y = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \alpha_\mu \Delta_\mu^m .$$

Nun wird die Entwickelung des so aufgestellten Näherungsausdruckes Δy nach dem Taylorschen Satze mit der direkten Entwickelung des

Integrales $\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(x, y)\,dx$ durch die Taylorsche Reihe verglichen. Man erhält dann, wenn beide Entwickelungen bis zu einer bestimmten Ordnung übereinstimmen sollen, also eine Näherung bis zu dieser Ordnung einschließlich erreicht werden soll, eine gewisse Anzahl von Bedingungsgleichungen, denen entsprechend die Zahlenkoeffizienten ε und α bestimmt werden müssen. Wir werden sehen, daſs schon bei Näherungen fünfter Ordnung diese Methode versagt. In dem Schluſsansatz derselben liegt übrigens natürlich auch die Benutzung der Richtungen $\frac{\Delta'}{\Delta x} \cdots \frac{\Delta^{(m-1)}}{\Delta x}$ zur Summierung als möglich eingeschlossen.

Der Unterschied des hier vorzulegenden Ansatzes gegen den vorigen liegt darin, daſs nach Berechnung einer Anzahl von Richtungen der Punkt, in dem die nächste Richtung gerechnet wird, nicht auf einer der früheren vom Ausgangspunkte aus gezogenen liegend angenommen wird, sondern selbst erst durch einen polygonalen Linienzug in schon berechneten Richtungen vom Ausgangspunkt aus erreicht wird. Die analytische Formulierung ist die folgende: Ist $\Delta', \Delta'' \cdots \Delta^{(\nu-1)}$ gerechnet, so rechnen wir als den nächsten Funktionswert:

$$\Delta^{(\nu)} = f(x + \varkappa\Delta x,\ y + \varkappa_1\Delta' + \varkappa_2\Delta'' + \cdots \varkappa_{\nu-1}\Delta^{(\nu-1)})\Delta x,$$

wo die $\varkappa$ beliebige Zahlenkoeffizienten sind, die nur durch die Forderung, daſs unser Punkt bis auf die zweite Ordnung auf der Tangente der Integralkurve im Ausgangspunkte liegen soll, beschränkt sind, also durch

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_{\nu-1}.$$

Bei einfachen Zahlenwerten $\varkappa$, wie wir sie nachher finden werden, ist die Erschwerung der Rechnung wegen der notwendigen Summierung der $\Delta' \cdots \Delta^{(\nu-1)}$ sehr gering. Dagegen gewinnen wir eine gröſsere Auswahl von Zahlenkoeffizienten, die uns erlauben, Näherungen von bestimmter Ordnung in gröſserer Auswahl bei Rechnung von möglichst wenig Funktionswerten und rationalen Koeffizienten aufzustellen.

Der Ansatz ist demnach der folgende: Man stellt auf:

$$\begin{aligned}
\Delta' &= f(x, y)\Delta x,\\
\Delta'' &= f(x + \varkappa\Delta x,\ y + \varkappa\Delta')\Delta x,\\
\Delta''' &= f(x + \lambda\Delta x;\ y + \varrho\Delta'' + (\lambda - \varrho)\Delta')\Delta x,\\
\Delta'''' &= f(x + \mu\Delta x;\ y + \sigma\Delta''' + \tau\Delta'' + (\mu - \sigma - \tau)\Delta')\Delta x,\\
\Delta^{V} &= f(x + \nu\,\Delta x,\ y + \varphi\Delta'''' + \chi\Delta''' + \psi\Delta'' + (\nu - \varphi - \chi - \psi)\Delta')\Delta x,\\
&\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

und setzt als gewünschte Näherung an:

$$\varDelta y \doteq a\varDelta' + b\varDelta'' + c\varDelta''' + d\varDelta'''' + e\varDelta^{\mathrm{V}} + \cdots.$$

Dabei sind die Gröfsen $\varkappa, \lambda, \mu, \nu \cdots; \varrho, \sigma, \tau, \varphi, \chi, \psi \cdots; a, b, c, d, e \cdots\cdots$ beliebig verfügbare Zahlenkoeffizienten. Diese haben wir so zu bestimmen, dafs bei Entwickelung von $\varDelta y$ nach dem Taylorschen Satze eine Übereinstimmung mit der wahren, aus dem Integralansatz folgenden Entwickelung bis zu der gewünschten Ordnung erzielt wird.

II.

Für die Näherung erster Ordnung genügt die Berechnung eines Funktionswertes f und man erhält durch $a = 1$ die triviale Näherung

$$\varDelta y = f(x, y)\varDelta x.$$

Für die zweite Ordnung sind zwei Funktionswerte zu rechnen und man erhält die schon bekannten Bedingungsgleichungen (vergl. bei Herrn Heun S. 28)

$$a + b = 1, \quad b\varkappa = \tfrac{1}{2},$$

wozu eine weitere Erörterung nicht mehr nötig ist.

Für die dritte Ordnung sind drei Funktionswerte zu rechnen, und der Taylorsche Satz liefert für die gewünschte Näherung:

$$\varDelta y = a\varDelta' + b\varDelta'' + c\varDelta''', \text{ wo}$$

$$\begin{aligned} \varDelta' &= f(x, y)\varDelta x, \\ \varDelta'' &= f(x + \varkappa\varDelta x, y + \varkappa\varDelta')\varDelta x, \\ \varDelta''' &= f(x + \lambda\varDelta x, y + \varrho\varDelta'' + (\lambda - \varrho)\varDelta')\varDelta x, \end{aligned}$$

ist, die folgenden vier Bedingungen:

$$a + b + c = 1, \quad b\varkappa + c\lambda = \tfrac{1}{2}, \quad b\varkappa^2 + c\lambda^2 = \tfrac{1}{3}, \quad c\varrho\varkappa = \tfrac{1}{6},$$

woraus das Lösungssystem sich ergiebt:

$$\varrho = \frac{\lambda(\lambda - \varkappa)}{\varkappa(2 - 3\varkappa)}; \quad a = \frac{6\varkappa\lambda - 3(\varkappa + \lambda) + 2}{6\varkappa\lambda}; \quad b = \frac{2 - 3\lambda}{6\varkappa(\varkappa - \lambda)}; \quad c = \frac{2 - 3\varkappa}{6\lambda(\lambda - \varkappa)}$$

Dies System giebt zweifach unendlich viele Lösungen, von denen die einfach unendlich vielen für $\varrho = \lambda$

$$\text{(I)} \qquad \lambda = 3\varkappa(1 - \varkappa); \quad a = \frac{2 - 12\varkappa + 27\varkappa^2 - 18\varkappa^3}{18\varkappa^2(1 - \varkappa)}; \quad b = \frac{3\varkappa -}{6\varkappa^2}$$

$$c = \frac{1}{18\varkappa^2(1 - \varkappa)}$$

aus den auch von Herrn Heun gegebenen Ansätzen hervorgehen können.

Als besondere Fälle, die durch Grenzübergang aus den obigen allgemeinen Formeln, oder direkt aus dem Gleichungssystem hergeleitet werden können, seien erwähnt:

(II) $\varkappa = \frac{2}{3};\quad \lambda = 0;\quad b = \frac{3}{4};\quad c = \frac{1}{4\varrho};\quad a = \frac{1}{4} - \frac{1}{4\varrho}.$

(III) $\varkappa = \frac{2}{3};\quad \lambda = \frac{2}{3};\quad a = \frac{1}{4};\quad c = \frac{1}{4\varrho};\quad b = \frac{3}{4} - \frac{1}{4\varrho}.$

Weiter die Fälle:

(IV) $\lambda = \frac{2}{3};\quad a = \frac{1}{4};\quad b = 0;\quad c = \frac{3}{4};\quad \varrho = \frac{2}{9\varkappa}.$

(V) $\lambda = \frac{3\varkappa - 2}{3(2\varkappa - 1)};\quad a = 0.$

Die letzten beiden Fälle lassen nur zwei Funktionswerte in das Schlufsresultat eintreten, was, wie oben erwähnt, die Genauigkeit, mit der der dritte berechnet werden mufs, um eine Ordnung verringert. Die Gröfse c kann augenscheinlich nicht zum Verschwinden gebracht werden, ebenso wenig a und b gleichzeitig. Auch bei Berechnung von mehr als drei Funktionswerten kann die Zahl der in die Endformel eintretenden nicht unter zwei verringert werden.

Jeder der Fälle (I) bis (V) giebt noch eine einfache Unendlichkeit von Lösungen. Als Beispiele wählen wir etwa:

$\varkappa = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $\varrho = \frac{2}{3}$, was gleichzeitig unter die Fälle (I) und (III) gehört. Dafür ist

$$a = \tfrac{1}{4};\quad b = \tfrac{3}{8};\quad c = \tfrac{3}{8}$$

und die entsprechende Näherung:

$$\begin{aligned}
\varDelta y &= \frac{2\varDelta' + 3\varDelta'' + 3\varDelta'''}{8},\\
\varDelta' &= f(x, y)\varDelta x,\\
\varDelta'' &= f(x + \tfrac{2}{3}\varDelta x,\ y + \tfrac{2}{3}\varDelta')\varDelta x,\\
\varDelta''' &= f(x + \tfrac{2}{3}\varDelta x,\ y + \tfrac{2}{3}\varDelta'')\varDelta x.
\end{aligned}$$

Das System $\varkappa = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $\varrho = \frac{2}{3}$ giebt aus (I) oder (IV) die schon von Herrn Heun aufgestellte Formel:

$$\begin{aligned}
\varDelta y &= \frac{\varDelta' + 3\varDelta'''}{4},\\
\varDelta' &= f(x, y)\varDelta x,\\
\varDelta'' &= f(x + \tfrac{1}{3}\varDelta x,\ y + \tfrac{1}{3}\varDelta')\varDelta x,\\
\varDelta''' &= f(x + \tfrac{2}{3}\varDelta x,\ y + \tfrac{2}{3}\varDelta'')\varDelta x.
\end{aligned}$$

Das System $\varkappa = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$, $\varrho = \frac{1}{3}$ giebt

$$\varDelta y = \frac{\varDelta' + 3\varDelta'''}{4},$$

$$\Delta' \;= f(x, y)\,\Delta x,$$
$$\Delta'' = f(x + \tfrac{2}{3}\Delta x,\; y + \tfrac{2}{3}\Delta')\,\Delta x,$$
$$\Delta''' = f\left(x + \tfrac{2}{3}\Delta x,\; y + \frac{\Delta' + \Delta''}{3}\right)\Delta x$$

Das System $\varkappa = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$:

$$\Delta y \;= \frac{\Delta' + 4\Delta'' + \Delta'''}{6},$$
$$\Delta' \;= f(x, y)\,\Delta x,$$
$$\Delta'' = f(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\; y + \tfrac{1}{2}\Delta')\,\Delta x,$$
$$\Delta''' = f(x + \Delta x,\; y + 2\Delta'' - \Delta')\,\Delta x.$$

Die letzte Endformel hat eine gewisse Analogie mit der Simpsonschen Regel, ist aber um eine Ordnung weniger genau.

III.

Zu den Näherungen vierter Ordnung übergehend finden wir die Berechnung von vier Funktionswerten nötig, und die Vergleichung des Taylorschen Satzes ergiebt die folgenden acht Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten:

$$a + b + c + d = 1,$$
$$b\varkappa + c\lambda + d\mu = \tfrac{1}{2},$$
$$b\varkappa^2 + c\lambda^2 + d\mu^2 = \tfrac{1}{3},$$
$$c\varrho\varkappa + d(\sigma\lambda + \tau\varkappa) = \tfrac{1}{6},$$
$$b\varkappa^3 + c\lambda^3 + d\mu^3 = \tfrac{1}{4},$$
$$c\varrho\varkappa\lambda + d(\sigma\lambda + \tau\varkappa)\mu = \tfrac{1}{8},$$
$$c\varrho\varkappa^2 + d(\sigma\lambda^2 + \tau\varkappa^2) = \tfrac{1}{12},$$
$$d\varrho\sigma\varkappa = \tfrac{1}{24},$$

wenn als gewünschte Näherung angesetzt ist:

$$\Delta y \;= a\Delta' + b\Delta'' + c\Delta''' + d\Delta'''',$$
$$\Delta' \;= f(x, y)\,\Delta x,$$
$$\Delta'' \;= f(x + \varkappa\Delta x,\; y + \varkappa\Delta')\,\Delta x,$$
$$\Delta''' = f(x + \lambda\Delta x,\; y + \varrho\Delta'' + (\lambda - \varrho)\Delta')\,\Delta x,$$
$$\Delta'''' = f(x + \mu\Delta x,\; y + \sigma\Delta''' + \tau\Delta'' + (\mu - \sigma - \tau)\Delta')\,\Delta x.$$

Hier läfst sich das Lösungssystem auch noch niederschreiben. Wenn man $\varkappa$ und λ willkürlich läfst, erhält man nach einiger Rechnung:

$$c = \frac{1 - 2\varkappa}{12\lambda(\lambda - \varkappa)(1 - \lambda)},\; b = \frac{1 - 2\lambda}{12\varkappa(\varkappa - \lambda)(1 - \varkappa)},\; d = \frac{6\varkappa\lambda - 4(\varkappa + \lambda) + 3}{12(1 - \lambda)(1 - \varkappa)};$$

$$a = 1 - b - c - d;$$

$$\mu = 1,\ \varrho = \frac{\lambda(\lambda - \varkappa)}{2\varkappa(1 - 2\varkappa)},\ \varrho = \frac{1}{24\varkappa\varrho d},\ \tau = \frac{1}{6\varkappa d} - \frac{\lambda\sigma}{\varkappa} - \frac{c\varrho}{d}.$$

Von der wiederum zweifach unendlichen Zahl von Näherungsformeln, die wir so erhalten, sei als besonders einfach eine Reihe spezialisiert; zunächst diejenigen, in denen $a = d$, $b = c$ ist, für die also eine gewisse Symmetrie wenigstens in der Endformel vorhanden ist. Sie sind in dem System enthalten:

$$\text{(I)}\ \lambda = 1 - \varkappa,\ \mu = 1,\ \varrho = \frac{1 - \varkappa}{2\varkappa},\ \sigma = \frac{\varkappa}{6\varkappa(1 - \varkappa) - 1},\ \tau = \frac{(1 - \varkappa)(2\varkappa - 1)}{2\varkappa[6\varkappa(1 - \varkappa) - 1]}$$

$$a = d = \frac{6\varkappa(1 - \varkappa) - 1}{12\varkappa(1 - \varkappa)};\ b = c = \frac{1}{12\varkappa(1 - \varkappa)}.$$

Als Beispiel sei etwa $\varkappa = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ gewählt, wodurch man die Näherungsformel erhält:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{\Delta' + 3\Delta'' + 3\Delta''' + \Delta''''}{8},\\
\Delta' &= f(x, y)\Delta x,\\
\Delta'' &= f(x + \frac{\Delta x}{3},\ y + \tfrac{1}{3}\Delta')\Delta x,\\
\Delta''' &= f\left(x + \tfrac{2}{3}\Delta x,\ y + \frac{3\Delta'' - \Delta'}{3}\right)\Delta x,\\
\Delta'''' &= f(x + \Delta x,\ y + \Delta''' - \Delta'' + \Delta')\Delta x.
\end{aligned}$$

Sodann aber suchen wir aus unseren Lösungen diejenigen heraus, die beim Übergange zu Quadraturen die Simpsonsche Regel ergeben, und im allgemeinen Falle, wie diese im besonderen, bis zur vierten Ordnung einschliefslich im Intervalle genau sind, demnach als Verallgemeinerungen der Simpsonschen Regel betrachtet werden können. Wir werden vier einfach unendliche Systeme von solchen Verallgemeinerungen erhalten.

(II) Es sei $\lambda = \frac{1}{2}$.

Dann ergiebt sich als ein solches System:

$$\mu = 1;\ a = \tfrac{1}{6},\ b = 0,\ c = \tfrac{2}{3},\ d = \tfrac{1}{6};$$

$$\sigma = 2,\ \varrho = \frac{1}{8\varkappa},\ \tau = -\frac{1}{2\varkappa}.$$

Ein Zahlenbeispiel, $\varkappa = \frac{1}{4}$, giebt die Näherung:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{\Delta' + 4\Delta''' + \Delta''''}{6},\\
\Delta' &= f(x, y)\Delta x,\\
\Delta'' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{4},\ y + \frac{\Delta'}{4}\right)\Delta x,
\end{aligned}$$

$$\varDelta''' = f\left(x + \frac{\varDelta x}{2},\ y + \frac{\varDelta''}{2}\right)\varDelta x,$$
$$\varDelta'''' = f(x + \varDelta x,\ y + 2\varDelta''' - 2\varDelta'' + \varDelta')\varDelta x.$$

Die Grösse $\varDelta''$ kann bei den Formeln dieser Gruppe stets um eine Ordnung weniger genau gerechnet werden.

Die Fälle (III), (IV), (V) werden durch Grenzübergang aus den allgemeinen Formeln oder direkt aus den acht Bedingungsgleichungen gewonnen.

(III) $$\lambda = 0.$$

$$\varkappa = \tfrac{1}{2},\ \mu = 1,\ \tau = \tfrac{3}{2};\ b = \tfrac{2}{3},\ d = \tfrac{1}{6};$$
$$\sigma = \frac{1}{2\varrho};\ a = \tfrac{1}{6} - \frac{1}{12\varrho};\ c = \frac{1}{12\varrho}.$$

Das Zahlenbeispiel $\varrho = \frac{1}{2}$ liefert die Näherungsformel:

$$\varDelta y = \frac{4\varDelta'' + \varDelta''' + \varDelta''''}{6};$$
$$\varDelta' = f(x, y)\varDelta x,$$
$$\varDelta'' = f\left(x + \frac{\varDelta x}{2};\ y + \frac{\varDelta'}{2}\right)\varDelta x,$$
$$\varDelta''' = f\left(x,\ y + \frac{\varDelta'' - \varDelta'}{2}\right)\varDelta x,$$
$$\varDelta'''' = f\left(x + \varDelta x,\ y + \varDelta''' + \frac{3(\varDelta'' - \varDelta')}{2}\right)\varDelta x.$$

In diesem Beispiel kann $\varDelta'$ um eine Ordnung weniger genau gerechnet werden.

(IV) $$\varkappa = 1,$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2},\ \mu = 1;\ \varrho = \tfrac{1}{8},\ a = \tfrac{1}{6},\ c = \tfrac{2}{3};$$
$$\tau = -\frac{\sigma}{4};\ b = \tfrac{1}{6} - \frac{1}{3\sigma};\ d = \frac{1}{3\sigma}$$

Beispiel $\sigma = 1$:

$$\varDelta y = \frac{\varDelta' - \varDelta'' + 4\varDelta''' + 2\varDelta''''}{6},$$
$$\varDelta' = f(x, y)\varDelta x,$$
$$\varDelta'' = f(x + \varDelta x,\ y + \varDelta')\varDelta x,$$
$$\varDelta''' = f\left(x + \frac{\varDelta x}{2},\ y + \frac{\varDelta'' + 3\varDelta'}{8}\right)\varDelta x,$$
$$\varDelta'''' = f\left(x + \varDelta x,\ y + \varDelta''' - \frac{\varDelta'' - \varDelta'}{4}\right)\varDelta x.$$

(V) $$\varkappa = \lambda.$$

$$\varkappa = \tfrac{1}{2},\ \lambda = \tfrac{1}{2},\ \mu = 1;\ a = \tfrac{1}{6},\ d = \tfrac{1}{6};$$
$$\varrho = \frac{1}{2\sigma},\ \tau = 1 - \sigma;\ b = \frac{2 - \sigma}{3},\ c = \frac{\sigma}{3}.$$

Beispiel $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{\Delta' + 2\Delta'' + 2\Delta''' + \Delta''''}{6},\\
\Delta' &= f(x, y)\Delta x,\\
\Delta'' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta'}{2}\right)\Delta x,\\
\Delta''' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta''}{2}\right)\Delta x,\\
\Delta'''' &= f(x + \Delta x, y + \Delta''')\Delta x.
\end{aligned}$$

Diese letzte gut zu merkende Näherungsformel liefse sich auch aus den Ansätzen von Herrn Heun (S. 33) gewinnen, in denen für diesen Fall die acht Bedingungsgleichungen nicht als von einander unabhängig, sondern als nur sieben verschiedene Bedingungen darstellend erscheinen würden. Sie ist übrigens die einzige daraus zu erhaltende Formel, die nur 4 Funktionswerte als berechnet voraussetzt.

Wünscht man in der Endformel nur möglichst wenige Funktionswerte auftreten zu lassen, so kann man, da d augenscheinlich nicht Null sein kann, und c, wie leicht beweisbar, auch nicht, entweder b gleich Null anzunehmen, was auf die Formelgruppe (II) führt, oder a gleich Null, was den Ansatz

(VI) $$\lambda = \frac{2\varkappa - 1}{2(3\varkappa - 1)}$$

in die allgemeinen Formeln einführt. Gleichzeitig können a und b nicht verschwinden, da dies auf den unzulässigen Wert $\varkappa = 0$ führen würde.

Bei Berechnung von fünf Funktionswerten wäre es thatsächlich möglich, die Zahl der in die Endformel eintretenden Werte auf zwei zu reduzieren, doch würde man den Nachteil irrationaler Koeffizienten in den Kauf nehmen müssen.

IV.

Gehen wir endlich zu Näherungen von der fünften Ordnung über, so werden die Verhältnisse etwas andere. Rechnen wir hier wiederum fünf Funktionswerte, so giebt die Vergleichung der Taylorschen Entwickelung die folgenden 16 Bedingungsgleichungen.

$$\begin{aligned}
a + b + c + d + e &= 1,\\
b\varkappa + c\lambda + d\mu + e\nu &= \tfrac{1}{2},\\
b\varkappa^2 + c\lambda^2 + d\mu^2 + e\nu^2 &= \tfrac{1}{3},\\
c\varrho\varkappa + d(\sigma\lambda + \tau\varkappa) + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\varkappa) &= \tfrac{1}{6},\\
b\varkappa^3 + c\lambda^3 + d\mu^3 + e\nu^3 &= \tfrac{1}{4},\\
c\varrho\varkappa\lambda + d(\sigma\lambda + \tau\varkappa)\mu + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\varkappa)\nu &= \tfrac{1}{8},
\end{aligned}$$

$$c\varrho\varkappa^2 + d(\sigma\lambda^2 + \tau\varkappa^2) + e(\varphi\mu^2 + \chi\lambda^2 + \psi\varkappa^2) = \tfrac{1}{12},$$
$$d\varrho\varkappa\sigma + e[(\sigma\lambda + \tau\varkappa)\varphi + \varrho\varkappa\chi] = \tfrac{1}{24},$$
$$b\varkappa^4 + c\lambda^4 + d\mu^4 + e\nu^4 = \tfrac{1}{5},$$
$$c\varrho\varkappa\lambda^2 + d(\sigma\lambda + \tau\varkappa)\mu^2 + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\varkappa)\nu^2 = \tfrac{1}{10},$$
$$c\varrho\varkappa^2\lambda + d(\sigma\lambda^2 + \tau\varkappa^2)\mu + e(\varphi\mu^2 + \chi\lambda^2 + \psi\varkappa^2)\nu = \tfrac{1}{15},$$
$$c\varrho^2\varkappa^2 + d(\sigma\lambda + \tau\varkappa)^2 + e(\varphi\mu + \chi\lambda + \psi\varkappa)^2 = \tfrac{1}{20},$$
$$c\varrho\varkappa^3 + d(\sigma\lambda^3 + \tau\varkappa^3) + e(\varphi\mu^3 + \chi\lambda^3 + \psi\varkappa^3) = \tfrac{1}{20},$$
$$d\varrho\varkappa\sigma(\lambda + \mu) + e[(\sigma\lambda + \tau\varkappa)\varphi(\mu + \nu) + \varrho\varkappa(\lambda + \nu)\chi] = \tfrac{7}{120},$$
$$d\varrho\varkappa^2\sigma + e[(\sigma\lambda^2 + \tau\varkappa^2)\varphi + \varrho\varkappa^2\chi] = \tfrac{1}{60},$$
$$e\varrho\varkappa\sigma\varphi = \tfrac{1}{120}.$$

Dazu gehört die Näherungsformel:

$$\begin{aligned}
\Delta y &= a\Delta' + b\Delta'' + c\Delta''' + d\Delta'''' + e\Delta^{\mathrm{V}},\\
\Delta' &= f(x, y)\Delta x,\\
\Delta'' &= f(x + \varkappa\Delta x,\ y + \varkappa\Delta')\Delta x,\\
\Delta''' &= f(x + \lambda\Delta x,\ y + \varrho\Delta'' + (\lambda - \varrho)\Delta')\Delta x,\\
\Delta'''' &= f(x + \mu\Delta x,\ y + \sigma\Delta''' + \tau\Delta'' + (\mu - \sigma - \tau)\Delta')\Delta x,\\
\Delta^{\mathrm{V}} &= f(x + \nu\Delta x,\ y + \varphi\Delta'''' + \chi\Delta''' + \psi\Delta'' + (\nu - \varphi - \chi - \psi)\Delta')\Delta x.
\end{aligned}$$

Zur Verfügung stehen uns aber hier nur 15 Zahlenkoeffizienten für die 16 Gleichungen. Nun wäre zwar möglich, dafs die Bedingungsgleichungen nicht von einander unabhängig wären, was allerdings nach Analogie mit den vorigen Näherungen nicht wahrscheinlich ist. Dem Verfasser ist es bisher nicht möglich gewesen, darüber zu entscheiden, da der theoretisch sehr einfache Nachweis trotz mancher möglichen Vereinfachungen einen sehr beträchtlichen Rechenaufwand zu erfordern scheint. Nur das eine läfst sich unmittelbar erkennen, dafs eine Lösung mit fünf Funktionsberechnungen nach dem speziellen von Herrn Heun angenommenen Ansatz nicht möglich ist. Denn nach ihm ist zu setzen:

$$\varrho = \lambda;\quad \sigma = \mu,\ \tau = 0;\quad \varphi = \nu,\ \chi = 0,\ \psi = 0,$$

und es widersprechen sich alsdann die elfte und die zwölfte unserer Gleichungen. Schreibt man die Entwickelungen der Taylorschen Reihe explicit nieder, was hier der allzugrofsen Breite wegen nicht geschieht, so erkennt man, dafs sich dieser Umstand nicht ändert, auch wenn bei der Anwendung dieser speziellen Methode statt fünf eine beliebige Anzahl von Funktionswerten oder Serien davon benutzt werden; es ergiebt sich daraus die auffallende oben erwähnte Thatsache, dafs die Heunsche Methode vom fünften Grade der Näherung an versagt. Dafs

etwa die im Folgenden vorgelegten allgemeineren Ansätze bei noch höheren Graden auch versagen, ist nicht gerade wahrscheinlich, da die Koeffizienten hier in ganz anderer Weise rückwirkend eintreten; beim fünften und sechsten Grade ist es sicher nicht der Fall.

Zu der oben erwähnten Schwierigkeit, daſs 16 Bedingungsgleichungen mit 15 Koeffizienten zu befriedigen wären, zurückkehrend, entschlieſsen wir uns, sie durch Berechnung eines sechsten Funktionswertes zu beseitigen. Die Berechnung von n Funktionswerten stellt uns augenscheinlich $\frac{n(n+1)}{2}$ Zahlenkoeffizienten zur Verfügung, während die Zahl der zu befriedigenden Gleichungen für Näherungen $m$ter Ordnung wenigstens bis zur sechsten Ordnung einschlieſslich 2^{m-1} beträgt. Wir würden also hier durch Berechnung der sechs Funktionswerte eine fünffach unendliche Zahl von Lösungen unserer Gleichungen, also von Näherungsformeln fünfter Ordnung finden. Aber die Lösung der 16 Gleichungen, von denen allein 8 vom fünften Grade sind, machte, besonders, da rationale Lösungen gefunden werden sollten, solche Schwierigkeiten, daſs ich mich begnügte, die Lösung nur für den Fall zu rechnen, daſs die sechste Richtung in einem Punkte gerechnet wird, der durch einen polygonalen Zug in den ersten vier (statt fünf, wie möglich) gefundenen Richtungen vom Ausgangspunkt erreicht wird, — und daſs zweitens der Koeffizient b gleich Null ist. Die erste Beschränkung soll analytisch aussagen, daſs

$$\Delta^{\mathrm{VI}} = f(x + \nu_1 \Delta x, y + \varphi_1 \Delta'''' + \chi_1 \Delta''' + \psi_1 \Delta'' + (\nu_1 - \varphi_1 - \chi_1 - \psi_1)\Delta')\Delta x$$

gesetzt, also analog wie Δ^{V}, ohne daſs man unter dem Funktionszeichen Δ^{V} verwendet, gebildet wird. Die so erhaltenen speziellen Näherungen sind ganz sicher durchaus nicht die besten, d. h. nicht mit den einfachsten Zahlenkoeffizienten gebildet, wie sie die allgemeine Lösung liefern würde. Aber da noch gar keine Näherungen dieser Ordnung aufgestellt zu sein scheinen und es mir bisher nicht möglich war, die besseren aus den sehr breiten Rechnungen zu entwirren, so lege ich das unter den obigen Beschränkungen gefundene, immer noch dreifach unendlich viele Näherungen der gewünschten Art enthaltende System vor. Es ist alsdann:

$$\lambda = \tfrac{2}{5}; \quad \mu = 1; \quad \sigma = \tfrac{15}{4};$$
$$\varrho = \frac{2}{25\varkappa}; \quad \tau = -\frac{1}{\varkappa}.$$

$b = 0$; a, c, d, e, e_1 berechnen sich linear aus Nr. 1, 2, 3, 5, 9 der sechzehn oben angeschriebenen Gleichungen:

$$c = \frac{625}{6} \frac{\frac{\nu\nu_1}{6} - \frac{\nu + \nu_1}{12} - \frac{1}{20}}{(2 - 5\nu)(2 - 5\nu_1)}, \quad d = \frac{\frac{2\nu\nu_1}{3} - \frac{7(\nu + \nu_1)}{12} + \frac{1}{2}}{3(1 - \nu)(1 - \nu_1)};$$

$$e = \frac{1 - \nu_1}{12\nu(1 - \nu)(5\nu - 2)(\nu - \nu_1)}, \quad l_1 = \frac{1 - \nu}{12\nu_1(1 - \nu_1)(5\nu_1 - 2)(\nu_1 - \nu)};$$

$$a = 1 - c - d - e - e_1.$$

Weiter findet sich

$$\varphi = \frac{1 - \nu_1}{36e(\nu - \nu_1)}, \quad \varphi_1 = \frac{1 - \nu}{36e_1(\nu_1 - \nu)};$$

$$\chi = \frac{5[7 - 10\nu_1 - 108d(1 - \nu_1)]}{144e(\nu - \nu_1)}, \quad \chi_1 = \frac{5[7 - 10\nu - 108d(1 - \nu)]}{144e_1(\nu_1 - \nu)};$$

$$\psi = \frac{2c(5\nu_1 - 2) - 125d(\nu_1 - 1)}{125e\varkappa(\nu - \nu_1)}; \quad \psi_1 = \frac{2c(5\nu - 2) - 125d(\nu - 1)}{125e_1\varkappa(\nu_1 - \nu)}.$$

Die Gröfsen $\varkappa$, ν und ν_1 sind noch willkürlich zu wählen.

Als ein Zahlenbeispiel, das freilich durchaus nicht die einfachste in dem angeschriebenen System enthaltene Näherung zu geben braucht, wählen wir $\varkappa = \frac{1}{5}$; $\nu = \frac{3}{5}$; $\nu_1 = \frac{4}{5}$ und erhalten das Wertesystem: $\varrho = \frac{2}{5}$; $\tau = -5$; $c = \frac{25}{36}$; $d = \frac{1}{72}$; $e = \frac{-25}{72}$; $e_1 = \frac{25}{48}$; $a = \frac{17}{144}$; $\varphi = \frac{2}{25}$; $\chi = -\frac{13}{20}$; $\psi = \frac{9}{5}$; $\varphi_1 = \frac{8}{75}$; $\chi_1 = \frac{2}{15}$; $\psi_1 = \frac{4}{5}$.

Also erhalten wir als eine Näherungsformel für eine Genauigkeit bis zur fünften Ordnung einschliefslich:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{17\Delta' + 100\Delta''' + 2\Delta'''' - 50\Delta^{V} + 75\Delta^{VI}}{144} \\ &= \Delta''' + \frac{(\Delta' - \Delta'') + 3(\Delta^{VI} - \Delta^{V}) + 2(\Delta^{VI} - \Delta'')}{9} \\ &\quad + \frac{(\Delta' - \Delta'') + 5(\Delta''' - \Delta^{VI}) + 2(\Delta'''' - \Delta^{V})}{144}, \end{aligned}$$

welche letztere Form wegen der Kleinheit der Differenzen der Δ und der Einfachheit der Koeffizienten vielleicht für rechnerische Benützung einfacher ist.

Dabei ist

$$\begin{aligned} \Delta' &= f(x, y)\Delta y, \\ \Delta'' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{5}, y + \frac{\Delta'}{5}\right)\Delta x, \\ \Delta''' &= f\left(x + \frac{2\Delta x}{5}, y + \frac{2\Delta''}{5}\right)\Delta x, \\ \Delta'''' &= f\left(x + \Delta x, x + \frac{15\Delta''' - 20\Delta'' + 9\Delta'}{4}\right)\Delta x, \\ \Delta^{V} &= f\left(x + \frac{3\Delta x}{5}, y + \frac{8\Delta'''' - 52\Delta''' + 180\Delta'' - 76\Delta'}{100}\right)\Delta x, \\ \Delta^{VI} &= f\left(x + \frac{4\Delta x}{5}, y + \frac{8\Delta'''' + 10\Delta''' + 60\Delta'' - 18\Delta'}{75}\right)\Delta x, \end{aligned}$$

welche Formeln vielleicht noch in einer für die Rechnung bequemeren Form geschrieben werden können.

Ein anderes Zahlenbeispiel, das auch d zum Verschwinden bringt, also nur vier Funktionswerte in die Endformel eintreten läſst, ist:

$$\nu = \tfrac{2}{3},\ \nu_1 = \tfrac{4}{5},$$

$\varkappa$ vorläufig beliebig. Es ergiebt sich:

$$c = \tfrac{125}{192};\quad e = \tfrac{-81}{192};\quad e_1 = \tfrac{100}{192};\quad a = \tfrac{48}{192};\quad \varrho = \frac{2}{25\varkappa};\quad \tau = -\frac{1}{\varkappa};$$

$$\varphi = \tfrac{8}{81};\quad \chi = -\tfrac{50}{81};\quad \psi = \frac{10}{27\varkappa};$$

$$\varphi_1 = \tfrac{2}{15};\quad \chi_1 = -\tfrac{1}{6};\quad \psi_1 = \frac{1}{5\varkappa},$$

wo z. B. noch $\varkappa$ gleich $\frac{1}{8}$ gesetzt werden kann, was zu der Formel führt:

$$\begin{aligned}\varDelta y &= \frac{48\varDelta' + 125\varDelta''' - 81\varDelta^{\mathrm{V}} + 100\varDelta^{\mathrm{VI}}}{192}\\ &= \varDelta^{\mathrm{VI}} + \frac{3(\varDelta' - \varDelta^{\mathrm{VI}}) + 3(\varDelta''' - \varDelta^{\mathrm{VI}}) + 5(\varDelta''' - \varDelta^{\mathrm{V}})}{12}\\ &\qquad + \frac{3(\varDelta^{\mathrm{VI}} - \varDelta''') + (\varDelta^{\mathrm{VI}} - \varDelta^{\mathrm{V}})}{192}.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}\varDelta' &= f(x, y)\varDelta x;\\ \varDelta'' &= f\left(x + \frac{\varDelta x}{3},\ y + \frac{\varDelta'}{3}\right)\varDelta x,\\ \varDelta''' &= f\left(x + \frac{2\varDelta x}{5},\ y + \frac{6\varDelta'' + 4\varDelta'}{25}\right)\varDelta x,\\ \varDelta'''' &= f\left(x + \varDelta x,\ y + \frac{15\varDelta''' - 12\varDelta'' + \varDelta'}{4}\right)\varDelta x,\\ \varDelta^{\mathrm{V}} &= f\left(x + \frac{2\varDelta x}{3},\ y + \frac{8\varDelta'''' - 50\varDelta''' + 90\varDelta'' + 6\varDelta'}{81}\right)\varDelta x,\\ \varDelta^{\mathrm{VI}} &= f\left(x + \frac{4\varDelta x}{5},\ y + \frac{4\varDelta'''' - 5\varDelta''' + 18\varDelta'' + 7\varDelta'}{80}\right)\varDelta x.\end{aligned}$$

Es ist natürlich ein für die Benützung hinderlicher Umstand, daſs so unbequem groſse Zahlenkoeffizienten auftreten. Doch kann bei den Summenbildungen unter dem Funktionszeichen f die Genauigkeit der Rechnung um eine Ordnung vermindert werden, und durch möglichst einfache Anordnung der Summierung überall die Differenz je zweier Gröſsen $\varDelta$, die im allgemeinen nicht mehr groſs sein wird, hergestellt werden, was die Rechenarbeit verringert.

V.

Es sei noch erlaubt, folgende allgemeine Bemerkung in Bezug auf die Simpsonsche Regel zu machen. Bekanntlich stimmt die durch sie gegebene Näherung

$$\varDelta y = \frac{f(x) + 4f\left(x + \frac{\varDelta x}{2}\right) + f(x + \varDelta x)}{6}\varDelta x$$

für ein Intervall Δx gerechnet bis zur vierten Ordnung einschließlich mit der Taylorschen Entwickelung in der Mitte des Intervalles überein, zeigt aber im Gliede fünfter Ordnung einen Fehler von $\frac{2}{3}$ dieses Gliedes. Darnach wird bei Ersetzung der Summe der in den Mitten der Einzelintervalle entwickelten und nach der vierten Ordnung abgebrochenen Taylorschen Reihe durch die Simpsonsche Regel der Fehler auf etwa $\frac{2}{3}$ vermindert. Verglichen dagegen mit der Taylorschen Entwicklung im Anfangspunkte des Intervalles nimmt die Simpsonsche Regel nicht nur die vierte Ordnung vollständig mit, sondern begeht auch im fünften Gliede einen Fehler von nur $\frac{1}{24}$ desselben, im sechsten einen solchen von $\frac{1}{8}$, im siebenten einen solchen von nicht ganz $\frac{1}{4}$ u. s. w. Sie wird also die nach der vierten Ordnung abgebrochene Taylorsche Entwickelung am Ausgangspunkte beträchtlich an Genauigkeit übertreffen. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei Anwendung der Rungeschen Methode für Differentialgleichungen. Hier kann man den Taylorschen Satz nur vom Anfang des Intervalles ausgehend anwenden, und es werden demgemäß z. B. in unseren Näherungsformeln, die bis zur vierten Ordnung einschließlich genau sind, auch die Glieder fünfter Ordnung der Taylorschen Entwickelung mit der wahren Entwickelung wenigstens teilweise, oder zum überwiegenden Teile übereinstimmen. So ergiebt sich als Glied fünfter Ordnung z. B. in der oben aufgestellten Näherung

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \frac{\Delta' + 2\Delta'' + 2\Delta''' + \Delta''''}{6}, \\
\Delta' &= f(x, y)\Delta x; \\
\Delta'' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2},\, y + \frac{\Delta'}{2}\right)\Delta x, \\
\Delta''' &= f\left(x + \frac{\Delta x}{2},\, y + \frac{\Delta''}{2}\right)\Delta x, \\
\Delta'''' &= f(x + \Delta x,\, y + \Delta''')\Delta x,
\end{aligned}$$

statt des von der richtigen Integralentwicklung geforderten:

$$\begin{aligned}
&\frac{(\Delta x)^5}{120}\big[(f_{1111} + 4ff_{1112} + 6f_{1122}f^2 + 4f^3f_{1222} + f^4f_{2222}) \\
&+ 6(f_1 + ff_2)(f_{112} + 2ff_{122} + f^2f_{222}) + 4(f_{12} + ff_{22})(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22}) \\
&+ f_2(f_{111} + 3ff_{112} + 3f^2f_{122} + f^3f_{222}) + 3f_{22}(f_1 + ff_2)^2 \\
&+ f_2^2(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22}) + 7f_2(f_1 + ff_2)(f_{12} + ff_{22}) + f_2^3(f_1 + ff_2)\big]
\end{aligned}$$

der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\frac{(\Delta x)^5}{120}\big[\tfrac{25}{24}(f_{1111} + 4ff_{1112} + 6f^2f_{1122} + 4f^3f_{1222} + f^4f_{2222}) \\
&+ \tfrac{25}{4}(f_1 + ff_2)(f_{112} + 2ff_{122} + f^2f_{222}) + \tfrac{15}{4}(f_{12} + ff_{22})(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22}) \\
&+ \tfrac{5}{6}f_2(f_{111} + 3ff_{112} + 3f^2f_{122} + f^3f_{222}) + \tfrac{15}{4}f_{22}(f_1 + ff_2)^2 \\
&+ \tfrac{5}{4}f_2^2(f_{11} + 2ff_{12} + f^2f_{22}) + \tfrac{15}{2}f_2(f_1 + ff_2)(f_{12} + ff_{22})\big].
\end{aligned}$$

Betrachten wir demnach die acht Terme, aus denen sich das Glied fünfter Ordnung zusammensetzt, einzeln, so sehen wir, dafs unsere Näherung nur $\frac{1}{24}$ des ersten Termes, $\frac{1}{24}$ des zweiten, $-\frac{1}{16}$ des dritten, $-\frac{1}{6}$ des vierten, $\frac{1}{4}$ des fünften, $\frac{1}{4}$ des sechsten, $\frac{1}{14}$ des siebenten Termes verfehlt, während freilich der achte Term ganz ausbleibt. So wenig dies nun mit der mathematischen Genauigkeit der Näherung zu thun hat, so klar ist es, dafs es im Allgemeinen praktisch eine der nach der vierten Ordnung abgebrochenen Taylorschen Reihe überlegene Genauigkeit des Resultates zur Folge haben wird, obwohl sich natürlich Fälle konstruieren lassen, wo das Gegenteil der Fall sein kann, wie z. B., wenn $\frac{d^5 y}{dx^5}$ am Ausgangspunkt gerade Null ist.

Als besser noch erweist sich die Übereinstimmung der Glieder fünfter Ordnung bei Benutzung der durch $\varkappa = \frac{1}{3}$, $\lambda = \frac{2}{3}$ aus dem allgemeinen Ansatz folgenden Näherung vierter Ordnung. Hier stimmen die einzelnen Terme der fünften Ordnung bis auf bez. $\frac{1}{54}$, $-\frac{1}{36}$, $\frac{1}{24}$, $-\frac{2}{27}$, $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{6}$, $\frac{4}{21}$ ihres Wertes, also mit Ausnahme des siebenten Termes durchweg besser als im vorigen Ansatz, während der achte Term notwendiger Weise wieder fehlt. Wir werden diese Näherung als im allgemeinen beste betrachten, und es liegt auch in der That nahe, dafs die symmetrische und gleichmäfsige Verteilung der vier berechneten Richtungen im Intervalle Δx, nämlich an den Stellen 0, $\frac{\Delta x}{3}$, $\frac{2\Delta x}{3}$, Δx eine besonders günstige Näherung ergeben kann. Setzt man $\varkappa = \frac{2}{3}$, $\lambda = \frac{1}{3}$, so erhält man die zweite mögliche derartig symmetrische Verteilung, die jedoch von vornherein, weil wir mit $\varkappa = \frac{2}{3}$ die Tangente der Kurve im Nullpunkt doppelt soweit verfolgen, als mit $\varkappa = \frac{1}{3}$, also die Abweichung vervierfachen, nicht so besonders gute Übereinstimmung erwarten läfst. Wirklich ist sie für die Glieder fünfter Ordnung nicht so gut wie im vorigen Falle und etwa von der Art wie in der erst betrachteten Formel. Weitere derartig symmetrische Verteilungen giebt es nach unserem Ansatz nicht.

Entsprechend werden wir erwarten, dafs für die Näherungen dritter Ordnung die symmetrische Lösung $\varkappa = \frac{1}{2}$, $\lambda = 1$ in den Gliedern vierter und höherer Ordnung eine im allgemeinen bessere Übereinstimmung mit der wahren Taylorschen Entwickelung zeigen wird, als andere der aus unserem Formelsystem folgenden Näherungen. Thatsächlich beträgt für die drei zuerst auftretenden Terme vierter Ordnung (der vierte Term fehlt wieder notwendiger Weise) der relative Fehler bez. 0; $+\frac{1}{8}$; 0. Bei der von Herrn Heun aufgestellten Näherung dieser Art beträgt der relative Fehler dieser einzelnen Terme bez. $-\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{9}$; $-\frac{1}{3}$, im zweiten Terme allerdings weniger. Die zweite

mögliche Lösung dieser Art $\varkappa = 1$; $\lambda = \frac{1}{2}$ giebt, wie verständlich, wiederum eine schlechtere Übereinstimmung.

Endlich sei noch bemerkt, daſs an Stelle der Taylorschen Entwickelung im Ausgangspunkt des Intervalles natürlich auch die im Mittelpunkt des Intervalles als Maſsstab der Genauigkeit benützt werden könnte, ohne daſs die Resultate sich änderten. Darauf beruht es dann, daſs die gegebenen Näherungen auch für ein Intervall, das die Konvergenzgrenze der Entwickelung im Ausgangspunkt überschreitet, ziemlich genau richtige Zahlenwerte ergeben können.

VI.

Es bleibt noch übrig, an einem Zahlenbeispiel die Annäherung, die bei dem Ansatz verschiedener Näherungsmethoden erzielt wird, zu vergleichen. Der Wert eines solchen Beispiels darf natürlich nicht überschätzt werden, da die zufällige Wahl desselben schon eine Methode gegenüber den anderen in ungebührlichen Vorteil setzen kann. Immerhin wird bei mehrfach fortgesetzter Anwendung der verschiedenen Methoden auf eine Reihe von Intervallen dieser Miſsstand nicht mehr ganz so stark hervortreten; und vollständig aufheben lieſse er sich nur durch zeitraubende Berechnung einer gröſseren Anzahl von Beispielen: Hier wurde das von Runge gewählte Beispiel (Bd. 46 der Math. Annalen) angenommen, und dasselbe einerseits für auf einander folgende Intervalle von der Gröſse $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta x = 0{,}3$; $\Delta x = 0{,}5$ wie bei Runge, sodann aber mit Annahme nur eines Gesamtintervalles $\Delta x = 1{,}0$ berechnet. Das Beispiel verlangt die Berechnung des Integrales der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}, \quad \text{ausgehend von} \quad x = 0,\ y = 1.$$

Bekanntlich ist die entsprechende Integralkurve hier geschlossen durch

$$\lg \operatorname{nat} (x^2 + y^2) - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} = 0$$

darstellbar.

Als Methoden der Näherung benutzen wir 1. die Entwickelung nach dem Taylorschen Satz unter dem Integralzeichen bis zur vierten Ordnung einschlieſslich. Erforderlich ist die Berechnung von:

$$f = \frac{y - x}{y + x}; \quad f' = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(y + x)^3}; \quad f'' = \frac{4(x^2 + y^2)(2y - x)}{(y + x)^5}.$$

$$f''' = -\frac{20(x^2 + y^2)(8y^2 - 2xy + x^2)}{(y + x)^7}$$

am Ausgangspunkt. Die zu verwendende Formel ist

$$\Delta y = f\Delta x + f'\frac{(\Delta x)^2}{2!} + f''\frac{(\Delta x)^3}{3!} + f'''\frac{(\Delta x)^4}{4!}.$$

2. Die Eulersche Methode, indem wir das Intervall Δx in vier gleiche Teile teilen und innerhalb jedes Intervalles die Tangente im Ausgangspunkt verfolgen. Zu berechnen ist

$$\Delta' = f(x, y) \cdot \frac{\Delta x}{4};$$
$$\Delta'' = f\left(x + \frac{\Delta x}{4}, y + \Delta'\right) \cdot \frac{\Delta x}{4};$$
$$\Delta''' = f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta'' + \Delta'\right) \cdot \frac{\Delta x}{4};$$
$$\Delta'''' = f\left(x + \frac{3\Delta x}{4}, y + \Delta''' + \Delta'' + \Delta'\right) \cdot \frac{\Delta x}{4}.$$

Das Resultat ist

$$\Delta y = \Delta' + \Delta'' + \Delta''' + \Delta''''.$$

3. Die von Herrn Runge angegebene Näherung (bis zur dritten Ordnung genau). Zu berechnen sind für jedes Intervall die 4 Funktionswerte:

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x;$$
$$\Delta'' = f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \frac{\Delta'}{2}\right)\Delta x;$$
$$\Delta''' = f(x + \Delta x, y + \Delta')\Delta x;$$
$$\Delta'''' = f(x + \Delta x, y + \Delta''')\Delta x.$$

Das Resultat ist

$$\Delta y = \frac{\Delta' + 4\Delta'' + \Delta''''}{6}$$

4. Die von Herrn Heun angegebene Näherung, bei der nur drei Funktionswerte zu berechnen sind (genau bis zur dritten Ordnung). Etwas genauere Resultate liefert übrigens die hier aufgestellte symmetrische Formel. Zu berechnen:

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x;$$
$$\Delta'' = f\left(x + \frac{\Delta x}{3}, y + \frac{\Delta'}{3}\right)\Delta x;$$
$$\Delta''' = f\left(x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \frac{2\Delta''}{3}\right)\Delta x.$$

Ansatz:

$$\Delta y = \frac{\Delta' + 3\Delta'''}{4}.$$

5. Die hier aufgestellte bis zur vierten Ordnung genaue symmetrische Formel. Zu berechnen in jedem Intervalle 4 Funktionswerte:

$$\Delta' = f(x, y)\Delta x;$$
$$\Delta'' = f\left(x + \frac{\Delta x}{3}, y + \frac{\Delta'}{3}\right)\Delta x;$$
$$\Delta''' = f\left(x + \frac{2\Delta x}{3}, y + \Delta'' - \frac{\Delta'}{3}\right)\Delta x;$$
$$\Delta'''' = f(x + \Delta x, y + \Delta''' - \Delta'' + \Delta')\Delta x.$$

Ansatz:

$$\Delta y = \frac{\Delta' + 3\Delta'' + 3\Delta''' + \Delta''''}{8}.$$

6. Die wahren Werte, aus dem bekannten Integrale unter Benutzung der letzten Näherungen durch die Newtonsche Näherungsmethode für Gleichungen gefunden.

Unter I finden sich die Resultate von $x = 0$, $y = 1$ ausgehend bis $x = 0{,}2$ gerechnet, unter II die von den so gefundenen Punkten als neuen Ausgangspunkten aus gewonnenen Resultate für $x = 0{,}5$; unter III die von diesen (fehlerhaften) neuen Ausgangspunkten erhaltenen Resultate für $x = 1{,}0$. Die Taylorsche Reihe konvergiert, da für komplexes x und y innerhalb der um den Ausgangspunkt $x = 0$ und $y = 1$ mit den Radien 0,2 (sogar z. B. 0,5) beschriebenen Kreise $f(x, y)$ holomorph ist.

Δy	I	II	III
Taylor	0,1666667	0,3368533	0,4936913
Euler	0,1754353	0,3573505	0,5367900
Runge	0,1678487	0,3393690	0,4991167
Heun	0,1680250	0,3395806	0,4990390
Kutta	0,1678449	0,3392158	0,4982940
Wahrer Wert	0,1678417	0,3392094	0,4982784.

Fehler

	I	II	III
Taylor	− 11750	− 23561	− 45871
Euler	+ 75936	+ 181411	+ 385116
Runge	+ 70	+ 1596	+ 8383
Heun	+ 1833	+ 3712	+ 7606
Kutta	+ 32	+ 64	+ 156.

Man erkennt, daſs das unerwartet genaue Resultat der Rungeschen Methode unter I Zufälligkeit ist, da es unter II und III sich durchaus nicht so genau fortsetzt. Ob bezw. wie weit das günstige Resultat bei dem hier gegebenen Ansatz auf Zufälligkeit beruht, kann nicht leicht entschieden werden; wir konnten bei der hier benutzten Intervallgröſse freilich schon mindestens eine Dezimale mehr Genauigkeit als bei den anderen Ansätzen erwarten. Zu groſses Gewicht darf man natürlich solchen Beispielen nicht beilegen.

Die sämtlichen Näherungsverfahren, wie oben, aber auf das Gesamtintervall $\Delta x = 1$ angewendet ergeben das folgende Resultat: Die Taylorsche Reihe konvergiert nicht mehr.

		Fehler:
Euler:	0,62242	+ 12414
Runge:	0,52381	+ 2553
Heun:	0,51613	+ 1785
Kutta:	0,49914	+ 86
Wahrer Wert:	0,49828	

Die Rechenarbeit ist bei Anwendung der verschiedenen Methoden in der hier durchgeführten Art nicht eben sehr verschieden; einzig die Heunsche Methode erfordert, da nur 3 statt 4 Funktionswerten zu berechnen sind, nur etwa $^3/_4$ der Rechnung (wie jeder der hier gegebenen Ansätze für Genauigkeit bis zur dritten Ordnung).

Zur geometrischen Theorie des Parabelträgers.

Von STANISLAUS JOLLES in Berlin.

Mit einer Tafel (V).

1. Besteht ein einfacher Fachwerkbalken AB aus einem in einer lotrechten Ebene gelegenen Dreiecksnetze, so werden die von einer gleichförmigen Verkehrslast in einem Wandstab w hervorgerufenen größten Spannungen min $[w]$ und max $[w]$ im Allgemeinen nur annähernd ermittelt. Diese annähernde Berechnung gestaltet sich besonders einfach, wenn jeder Wandstab w zwei Dreiecken angehört, von denen das eine eine Seite an die obere, das andere eine Seite an die untere Gurtung abgiebt. Man teilt in diesem Falle zunächst das Dreiecksnetz in zwei Teile, indem man einen Schnitt σ durch w und einen Stab der oberen und unteren Gurtung führt, und zieht dann durch die σ benachbarten zur Aufnahme der Verkehrslast bestimmten Knotenpunkte K_λ, K_ϱ zwei Lotrechte s_λ, s_ϱ. Während nun die Verkehrslast sich in vorgeschriebener Richtung über den Balken bewegt, bis ihr Anfangspunkt eines dieser Lote erreicht, nimmt der in ihm gelegene Knotenpunkt noch eine Einzellast auf, welche halbsoviel wiegt, wie die Verkehrslast, die über den Balken zwischen den Loten s_λ, s_ϱ ausgebreitet werden kann. Obgleich beide Belastungen zusammen in w eine größere Spannung hervorrufen, als die bis zur Belastungsscheide von w vorgeschobene Verkehrslast, so begnügt man sich doch mit dem für sie gefundenen Werte, statt den genauen Wert der zu ermittelnden Spannung mit Hülfe der w entsprechenden Belastungsscheide zu finden. Die größten

Spannungen in den Diagonalen d eines Parabelträgers unter Einfluſs einer gleichförmigen Verkehrslast sind nach diesem Näherungsverfahren den Längen von d proportional. Auf geometrischem Wege hat dieses wohl zuerst W. Stahl dargethan[1]), sein sinnreicher Beweis bleibt jedoch abhängig von dem gewählten Polabstande. Unabhängig hiervon ist die in (2) und (3) gegebene Ableitung des genannten Satzes, zu der ebenfalls nur Hülfsmittel der graphischen Statik verwendet werden. Sie bezieht sich zunächst auf einen parabolischen Träger einfachster Form, bei dem eine Gurtung — etwa die obere — parabolisch, die andere geradlinig ist, und die Verkehrslast in den Knotenpunkten einer der Gurtungen — etwa der unteren angreift, und dann auf den allgemeinen Parabelträger.

2. Ein zwischen zwei Nachbarvertikalen eines solch einfachen parabolischen Trägers verlaufender Schnitt σ (Fig. 1) trifft auſser einer Diagonale d noch einen Stab o der oberen und u der unteren Gurtung. Nehmen nun die links von σ gelegenen Knotenpunkte der unteren Gurtung A, K_1, ... K_λ die ihnen zukommenden Teile $-P_0$, $-P_1$, ..., $-P_\lambda$ der gleichförmigen Verkehrslast auf, so muss die Mittelkraft der links von σ wirkenden äuſseren Kräfte in B angreifen und entgegengesetzt gleich dem in ihm hervorgerufenen Auflagerdrucke P_B sein. Von den drei Seitenkräften $[o]$, $[d]$, $[u]$ längs o, d, u, in welche die in B angreifende Mittelkraft $-P_B$ zerlegt werden kann, ist $[d]$ nach (1) die gröſste in d auftretende Zugspannung. $-P_B$ ist in Fig. 1ᵃ mit Hülfe eines zu den Lasten links von σ gehörigen Kräfte- und Seilpolygones ermittelt. Seine Zerlegung in $[o]$, $[d]$, $[u]$ geschieht nach dem Culmannschen Satze, indem man erst $[o]$ und die Mittelkraft $[u, d]$ von $[u]$ und $[d]$ aufsucht, und dann aus ihr $[u]$ und $[d]$ selbst bestimmt. Die Reihenfolge dieser Kräfte regelt die Cremonasche Vorschrift. Die Knotenpunkte A, B, K'_λ, K'_ϱ und der in lotrechter Richtung gelegene Berührungspunkt der Parabel π mit der unendlich fernen Geraden sind nun die Eckpunkte eines π eingeschriebenen Sechseckes $(\infty\infty K'_\lambda ABK'_\varrho)$, dessen Gegenseiten $\infty K'_\lambda$, BK'_ϱ und $K'_\lambda A$, $K'_\varrho\infty$ sich in den Punkten C und D einer zu AB parallelen Pascalschen Geraden $\mathfrak{p}$ schneiden. $\mathfrak{p}$ und jene vier Seiten des Sechseckes gehören aber auch dem vollständigen Vierecke $K'_\lambda K'_\varrho DC$ an, folglich können die vollständigen Vierecke $K'_\lambda K'_\varrho DC$ und $K'_\lambda A'AK_\lambda$ derart auf einander bezogen werden, daſs fünf und demnach alle Seiten des einen zu dem des anderen parallel laufen. In gleicher Weise lassen sich auch die Seiten der vollständigen Vierecke $K'_\lambda K'_\varrho DC$ und $B'K'_\varrho K_\varrho B$, also auch

1) Zeitschrift d. Vereins deutscher Ingenieure Bd. XX (1876) S. 9.

endlich die der vollständigen Vierecke $K_\lambda' A' A K_\lambda$ und $B' K_\varrho' K_\varrho B$ einander zuordnen, so daſs sich AK_λ' parallel $K_\varrho B'$[1]), und da letzteres parallel $[u, d]$ ist, auch parallel $[u, d]$ ergiebt. Die beiden Vierecke $AA'K_\lambda' K_\varrho$ und $EFGH$ sind hiernach ähnlich, und es verhält sich:

$$(\alpha) \qquad d : [d] = A'A : - P_B.$$

Die der oberen Gurtung umschriebene Parabel π und die Seilparabel π_p der über den Fachwerkbalken AB ausgebreiteten gleichförmigen Verkehrslast bestimmen zwei kollokale affin perspektive Felder, wenn Punkte beider Kurven als entsprechende einander zugewiesen werden, die auf der nämlichen Lotrechten liegen. Entsprechende Strecken solcher Lotrechten haben zu einander gleiches Verhältnis, somit besteht zwischen den Pfeilhöhen f und $\mathfrak{f}$ beider Parabeln und den Strecken $A'A$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ die Beziehung:

$$(\beta) \qquad f : \mathfrak{f} = A'A : \mathfrak{A}'\mathfrak{A}.$$

Endlich folgt aus den ähnlichen Dreicken OEF und $\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$:

$$(\gamma) \qquad FE : \mathfrak{A}'\mathfrak{A} \text{ oder } - P_B : \mathfrak{A}'\mathfrak{A} = h : l.$$

Da nach (β) und (γ):

$$AA' = \frac{f}{\mathfrak{f}} \cdot \frac{l}{h} \cdot - P_B$$

wird, geht (α) in:

$$d : [d] = \frac{f}{\mathfrak{f}} \cdot \frac{l}{h} : 1$$

über. Dieser Ausdruck ist nur scheinbar von h abhängig; denn wiegt die gleichförmige Verkehrslast p kg. f. d. l. M., ist folglich:

$$\mathfrak{f} = \frac{pl^2}{8h},$$

so schreibt er sich in der Form:

$$d : [d] = 8f : pl.$$

Die von einer gleichförmigen Verkehrslast in einer Diagonale dieses Parabelträgers hervorgerufene gröſste Zugspannung ist also ihrer Länge proportional, das Gleiche gilt folglich auch von der gröſsten in ihr durch jene Verkehrslast hervorgerufenen Druckspannung.

3. Enthalten alle Dreiecke des in (1) besprochenen einfachen Fachwerkbalkens Vertikalen, so ist eine beliebige Diagonale d bei ständiger Belastung spannungslos, wenn das durch sie bestimmte Viereck $K_\lambda' K_\lambda K_\varrho K_\varrho'$ (Fig. 2) des Dreiecksnetzes perspektiv affin liegt zum

1) a. a. O. S. 10.

Viereck $\mathfrak{K}_\lambda'\mathfrak{K}_\lambda\mathfrak{K}_\varrho\mathfrak{K}_\varrho'$ der zugehörigen Momentenfläche. Die bekannte Bedingung:

$$K_1'K_1 : K_2'K_2 : \ldots : K_\lambda'K_\lambda : \ldots = \mathfrak{K}_1'\mathfrak{K}_1 : \mathfrak{K}_2'\mathfrak{K}_2 : \ldots : \mathfrak{K}_\lambda'\mathfrak{K}_\lambda : \ldots,$$

unter der bei ständiger gleichmäfsiger Belastung alle Diagonalen spannungslos werden, der Fachwerkbalken also in den allgemeinen Parabelträger übergeht, ist eine unmittelbare Folge dieser Beziehung. Um für einen solchen Parabelträger die gröfste Zugspannung $[d]$ einer beliebigen Diagonale d bei gleichförmiger Verkehrslast zu ermitteln, mögen die unteren oder oberen Knotenpunkte links vom Schnitte σ (Fig. 2) ihre Verkehrslasten aufnehmen. Wird dann $[d]$ in Fig. 2ª in gleicher Weise, wie in Fig. 1ª gefunden, und berücksichtigt, dafs die Vierecke $K_\lambda'K_\lambda K_\varrho K_\varrho'$ und $\mathfrak{K}_\lambda'\mathfrak{K}_\lambda\mathfrak{K}_\varrho\mathfrak{K}_\varrho'$ zwei affine Felder Σ_K und $\Sigma_{\mathfrak{K}}$ bestimmen, so entsprechen den nach (2) parallelen Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{K}_\lambda'$, $\mathfrak{K}_\varrho\mathfrak{B}'$ von $\Sigma_{\mathfrak{K}}$ die Parallelen AK_λ', $K_\varrho B'$ von Σ_K. Nun ist n. d. K. $K_\varrho B'$ parallel zu $[u, d]$, folglich nunmehr auch parallel zu AK_λ'. Die beiden Vierecke $AA'K_\lambda'K_\varrho$ und $EFGH$ sind also ähnlich und es verhält sich:

$$(\alpha) \qquad d : [d] = A'A : -P_B.$$

Analog wie in (2) ergiebt sich, wenn der Pfeilhöhe $\mathfrak{f}$ der Seilparabel in Σ_K die Strecke f entspricht, die Beziehung:

$$(\beta) \qquad f : \mathfrak{f} = A'A : \mathfrak{A}'\mathfrak{A},$$

und endlich:

$$(\gamma) \qquad -P_B : \mathfrak{A}'\mathfrak{A} = h : l.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$d : [d] = \frac{f}{\mathfrak{f}} \cdot \frac{l}{h} : 1,$$

oder nach Einsetzen von $\frac{pl^2}{8h}$ für $\mathfrak{f}$:

$$d : [d] = 8f : pl,$$

womit auf geometrischem Wege für den allgemeinen Parabelträger bei gleichförmiger Verkehrslast die gröfsten in d auftretenden Spannungen als seiner Länge proportional erwiesen sind.

Theorie der Kapillarität und Hydrostatik.

Von A. P. Grusinzew in Charkow.

I.

Das Problem vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten findet sich in der Mechanik und Physik. In der ersteren bildet es den Inhalt der Hydrostatik, in der letzteren wird es sowohl vom Standpunkte der Hydrostatik, als auch von dem der sogenannten Kapillaritätstheorie betrachtet.

Infolgedessen wird das Problem vom Gleichgewichte der Flüssigkeiten in seiner gewöhnlichen Darstellung in zwei voneinander unabhängige Teile zerlegt. In der Hydrostatik wird die Theorie auf dem Begriffe vom hydrostatischen Drucke aufgebaut, oder mit anderen Worten, auf der Theorie der Flüssigkeit als eines sich deformierenden Körpers, der durch die Eigenschaft, den Druck gleichmäfsig nach allen Richtungen normal zum Flächenelemente zu verbreiten, charakterisiert wird. Dagegen werden in der Kapillaritätslehre innere molekulare Kräfte und molekularer Druck eingeführt, auf deren Definition die ganze Theorie beruht.

Diese inneren molekularen Kräfte werden als solche selbst betrachtet, das ist dann die molekulare Kapillaritätstheorie (von Laplace, Poisson und Gaufs), oder vom Standpunkte jener Flächenspannung, die sie hervorrufen.

Daher sind die Resultate der Hydrostatik und die der Kapillaritätstheorie ganz verschieden. Indem die erste, auf dem Begriffe des hydrostatischen Druckes gegründet, nur eine Reihe von Folgen über diesen Druck in gewissen einfachsten Fällen giebt, liefert die zweite eine vollständige Theorie der Erscheinungen von Flüssigkeiten im Gleichgewichtszustande. Man kann sogar mehr sagen. Die Hydrostatik giebt die Gleichgewichtsbedingungen für Flüssigkeiten nur in einem besonderen einzelnen Falle, während man aus ihr in allen anderen Fällen unrichtige Folgerungen zieht. Dagegen giebt die Theorie der Kapillaritäts-

erscheinungen, die Resultate der Hydrostatik ergänzend, die Bedingungen des Gleichgewichtes für den allgemeinen Fall an.

Mir scheint, dafs eine solche allgemeine Theorie des Gleichgewichtszustandes der Flüssigkeiten existieren mufs, die alle Fälle umfafst, d. h. die auf der allgemeinsten Definition jenes Aggregatzustandes aufgebaut sein wird, welchen wir flüssig nennen.

In dieser Abhandlung werden wir uns bemühen, eine solche Theorie der Flüssigkeiten aufzustellen.

Welche Definition der Flüssigkeiten sollen wir folglich zur Grundlage dieser neuen Theorie nehmen? Die in der Hydrostatik angenommene Definition stellt eigentlich das Pascalsche Gesetz dar. Aber selbstverständlich mufs nach einer rationellen Theorie dieses Gesetz zusammen mit anderen Gesetzen, die den Gleichgewichtszustand der Flüssigkeiten bedingen, als eine Folge der Theorie abgeleitet werden, und daher darf man nicht dieses Gesetz als das Grundgesetz der Theorie benutzen, umsoweniger, als seine Wirkung sich nur auf das Innere der freien Flüssigkeitsmasse erstreckt.

Als Grundlage der neuen Theorie werden wir folgende aus den einfachsten Erscheinungen abgeleitete Definition der Flüssigkeiten setzen.

Jede Flüssigkeit werden wir als ein System von materiellen Punkten betrachten, die auf eine stetige Weise einen gegebenen Raum ausfüllen, zwischen welchen innere Kräfte wirken, deren Arbeit von der Dichtigkeit der Flüssigkeit und vom Radius der Sphäre der Molekularwirkung abhängt.

Der erste Teil dieser Abhängigkeit ist die Folge der Beobachtungs-Thatsache, dafs der Druck in der Flüssigkeit unabhängig ist von der Form des Gefäfses, in welchem sie sich befindet, sondern nur von ihrer Dichtigkeit abhängt, der zweite eine Folge der Existenz von Flächenspannungen in den Flüssigkeiten. Was die inneren Kräfte im allgemeinen anbetrifft, so nehmen wir an, dafs sie, obwohl nicht an und für sich, sondern nur infolge der Verbindungen, die zwischen den Körperteilchen in jedem Aggregatzustande existieren, Kräfte sind, die ein Potential besitzen. Für einen festen, elastischen Körper z. B. sind diese Kräfte, oder besser gesagt, ist dieses Potential eine Funktion von sechs Deformationen, d. h. von drei Koeffizienten der Längenänderungen und drei Koeffizienten der Winkeländerungen. Für die Flüssigkeiten ist es aber eine Funktion der Dichtigkeit und des Radius der Sphäre der Molekularwirkung.

II.

Jetzt werden wir das Gesagte in mathematische Form bringen und allgemeine Folgerungen ziehen. Gesetzt, in einem Gefäfse haben wir

eine Flüssigkeit und in dieser Flüssigkeit sei ein System von festen Körpern eingesenkt. Zur Abkürzung werden wir im folgenden einfach „fester Körper“ statt „Wände des Gefäſses“ und „System von festen Körpern“ sagen. Wir werden uns zur Vereinfachung des Denkens vorstellen, daſs das Gefäſs und die festen Körper durch ein selbständiges System von Kräften im Gleichgewichte erhalten werden. Auſserdem nehmen wir an, daſs die betrachtete Flüssigkeit auf der freien Oberfläche mit einer anderen — sagen wir Luft — in Berührung steht.

Betrachten wir irgend einen Punkt der Flüssigkeit M mit den Koordinaten x, y, z. Es seien

$$X_e, \quad Y_e, \quad Z_e$$

die Komponenten der äuſseren und

$$X_i, \quad Y_i, \quad Z_i$$

die der inneren Kräfte, welche auf diesen Punkt der Flüssigkeit wirken.

Dabei werden wir unter ersteren solche Kräfte verstehen, deren Ursprung auſser unserem System liegt (z. B. die Schwerkraft) und werden sie als voraus gegeben betrachten. Unter den letzteren Kräften werden wir solche verstehen, die von der gegenseitigen Wirkung der Punkte des Systems herrühren; folglich sind das Kräfte, deren Ursprung im Innern des Systems liegt. Der Aggregatzustand des Systems ist durch die Art der letzteren bedingt.

Jetzt giebt uns die Grundgleichung der Statik folgende Bedingungen für das Gleichgewicht des Punktes M:

$$\text{(a)} \qquad X_e + X_i = Y_e + Y_i = Z_e + Z_i = 0.$$

Von den inneren Kräften im besonderen wissen wir nichts, aber wir können einige Schlüsse über ihre Arbeit ziehen, da wir in der Praxis nicht die Kräfte selbst, sondern nur ihre Wirkungen, d. h. Arbeit, beobachten. Folglich stellen wir uns vor, daſs der Punkt M eine unendlich kleine mögliche Verrückung bekommen hat, deren Komponenten

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z$$

sind.

Wir schreiben weiter die Gleichungen (a) I. für jeden Punkt im Innern der Masse der Flüssigkeit, II. für alle Punkte der freien Oberfläche, d. h. für die Punkte, mit denen die Flüssigkeit eine andere Flüssigkeit berührt (gewöhnlich Luft) und III. für die Punkte, die auf jener Fläche liegen, auf welcher sich die Flüssigkeit mit dem festen Körper berührt (d. h. mit den Wänden des Gefäſses und mit den in

die Flüssigkeit eingetauchten Körpern); multiplizieren wir dann die Gleichungen mit den respektiven Gröfsen der Verrückungen

$$\delta x, \quad \delta y, \quad \delta z$$

eines jeden Punktes dieser drei Gebiete und addieren wir die Resultate. Wir erhalten:

$$(1) \quad \begin{cases} \Sigma(X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z) + \Sigma_M(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) + \\ + \Sigma_S(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) + \Sigma_{S'}(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = 0, \end{cases}$$

wobei für die äufseren Kräfte alle drei Summen zunächst mit einem Symbol bezeichnet sind; das sind die gegebenen Kräfte und wir brauchen sie nicht in Betracht zu ziehen. Was aber die inneren Kräfte anbetrifft, so können wir schreiben, indem wir sowohl das Prinzip der Erhaltung der Energie, das auch im Falle möglicher Verrückungen des Systems giltig ist, zur Richtschnur nehmen, als auch die Definition der Flüssigkeit als eines solchen Aggregatzustandes, bei welchem die Arbeit der inneren Kräfte durch die Veränderung einer bestimmten Funktion ausgedrückt wird, welche inneres thermodynamisches Potential genannt wird:

$$\Sigma_M(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = -\delta U_M$$
$$\Sigma_S(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = -\delta U_S$$
$$\Sigma_{S'}(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = -\delta U_{S'}.$$

Die Quanta U_S, $U_{S'}$ können ausgedrückt werden vermittelst der Dichtigkeit und der Dicke jener Schicht, die sich auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit und der Berührungsfläche mit dem festen Körper befindet und in welcher die Flächenspannung sich zeigt. Selbstverständlich hängt diese Dicke vom Radius der Sphäre der Molekularanziehung ab.

Was das Quantum U_M betrifft, so müssen wir dasselbe als eine nur von der Dichtigkeit der Flüssigkeit im Innern ihrer Masse abhängende Funktion betrachten.

Gesetzt:

$$U, \quad U_n, \quad U_{n'}$$

seien die spezifischen Bedeutungen der Funktionen U_M, U_S, $U_{S'}$, d. h. die Bedeutungen der Funktionen pro Einheit des Umfanges der Flüssigkeit, sowie ihrer freien Oberfläche und der Berührungsfläche mit dem „festen Körper". Als Folge der Stetigkeit der Flüssigkeit bekommen wir:

$$(2) \qquad U_M = \int U d\tau, \quad U_S = \int U_n dS, \quad U_{S'} = \int U_{n'} dS',$$

wobei $d\tau$ ein Element des Umfanges im Innern der Flüssigkeit, dS

ein Element ihrer freien und dS' ein Element ihrer Berührungsfläche mit dem „festen Körper“ ist. Aufserdem, wenn die Dichtigkeit der Flüssigkeit im Innern ihrer Masse ϱ ist, die Dichtigkeiten in den Oberflächenschichten ϱ_1 und ϱ' und ihre Dicken ε_1 und ε' sind, so bekommen wir:

$$(3) \qquad U = F(\varrho), \quad U_n = G(\varrho_1, \varepsilon_1), \quad U_{n'} = H(\varrho', \varepsilon').$$

Es werde noch zur Abkürzung gesetzt:

$$(4) \qquad \Sigma(X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z) = R_e.$$

Indem wir alles das in Gleichung (1) einsetzen, bekommen wir die Grundgleichung unserer Theorie wie folgt:

$$(5) \qquad R_e - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0.$$

Hier mufs das zweite Integral auf alle Punkte der begrenzenden Fläche der Flüssigkeit erstreckt werden.

Man mufs bemerken, dafs die Schichten der veränderlichen Dicken ε_1 und ε' bei allen Verschiebungen aus ein und denselben Punkten bestehen müssen. Diese Bemerkung wird uns weiter bei der Definition von $\delta \varepsilon_1$ und $\delta \varepsilon'$ nützlich sein.

Formen wir jetzt R_e um. Wir haben angenommen, dafs an die freie Oberfläche der zu untersuchenden Flüssigkeit sich eine andere, z. B. Luft, anschliefst; aber wir können uns von dieser anderen frei machen; man mufs nur dazu ein passendes System von Kräften sich vorstellen, die auf alle Punkte der freien Oberfläche der Flüssigkeit wirken; dieses System mufs jedoch so gewählt sein, dafs das Gleichgewicht der Flüssigkeit nicht gestört wird, wenn wir die über ihr befindliche Luft entfernen. Infolgedessen können wir setzen:

$$(6) \quad R_e = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z)\, dS,$$

wobei das erste Integral auf alle Punkte des Umfanges der Flüssigkeit, das zweite auf alle Punkte der freien Oberfläche ausgedehnt ist und die Kräfte X_n, Y_n, Z_n jenes System von Oberflächenkräften darstellen, welche die Wirkung der berührenden Flüssigkeit ersetzen. Indem wir alles Gesagte zusammenfassen, werden wir die Grundgleichung unserer Theorie der Flüssigkeiten folgendermafsen schreiben:

$$(\mathrm{A}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\, d\tau + \int (X_n \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z)\, dS - \\ &\qquad - \delta \int U d\tau - \delta \int (U_n dS + U_{n'} dS') = 0. \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung mufs eine vollständige Theorie des Gleichgewichtes von Flüssigkeiten geben, d. h. sie mufs, wie die hydrostatischen, im

gewöhnlichen Sinne des Wortes, so auch die Grundgleichungen der Kapillaritätstheorie geben.

Und sie liefert das alles.

Wenn die in Betracht gezogene Flüssigkeit inkompressibel ist, so mufs man zur Gleichung (A) die Inkompressibilitätsbedingung hinzufügen, eine Bedingung, die den Unterschied zwischen dem tropfbarflüssigen und dem gasförmigen Zustande von Körpern charakterisiert. Diese Bedingung kann man bekanntlich in Form folgender Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial x}\delta x+\frac{\partial}{\partial y}\delta y+\frac{\partial}{\partial z}\delta z=0 \tag{7}$$

oder besser in Form eines auf alle Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit erstreckten Integrals:

$$\int P\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)d\tau=0, \tag{8}$$

wobei P eine bis jetzt noch unbekannte Funktion der Koordinaten ist.

Die Bedingung (8) kann mit Hilfe eines bekannten Satzes von Green über die teilweise Integration durch folgende ersetzt werden:

$$\text{(B)}\quad\left\{\begin{aligned}&\int P[\cos(nx)\,\delta x+\cos(ny)\,\delta y+\cos(nz)\,\delta z]\,dS+\\&+\int P[\cos(n'x)\,\delta x+\cos(n'y)\,\delta y+\cos(n'z)\,\delta z]\,dS'+\\&+\int\left(\frac{\partial P}{\partial x}\delta x+\frac{\partial P}{\partial y}\delta y+\frac{\partial P}{\partial z}\delta z\right)d\tau=0,\end{aligned}\right.$$

wo n und n' die Normalrichtungen zu dS und dS' nach dem Innern der Flüssigkeit genommen sind.

III.

Jetzt müssen wir die Gleichung (A) umformen, d. h. die Variationen der in ihr befindlichen Integrale bilden. Wir werden genauer die Bestimmung der Variation des Integrales

$$\int U_n dS=\int G(\varrho_1,\varepsilon_1)\,dS$$

durchführen und nach ihr leicht die Variation des Integrales

$$\int U_{n'}dS'=\int H(\varrho',\varepsilon')\,dS'$$

bilden. Wir haben:

$$\delta\int U_n dS=\int\left(\frac{\partial G}{\partial\varrho_1}\delta\varrho_1+\frac{\partial G}{\partial\varepsilon_1}\delta\varepsilon_1\right)dS+\int G(\varrho_1,\varepsilon_1)\,\delta\cdot dS. \tag{9}$$

Bilden wir erst die Variation des Elementes (dS) der freien Oberfläche S der Flüssigkeit. Diese Fläche S ist von einer Kontur be-

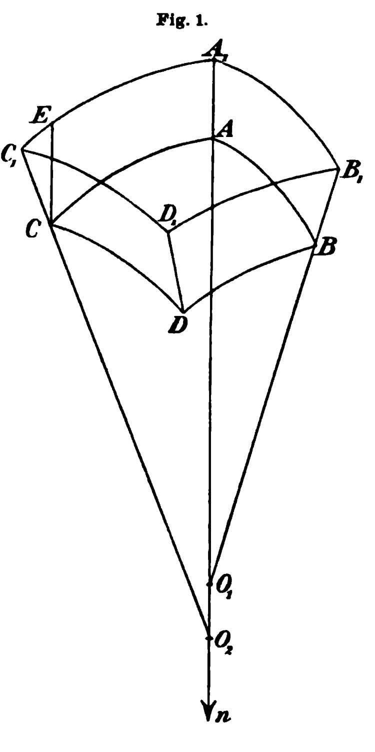
grenzt und zwar von der Durchschnittslinie der freien Oberfläche der Flüssigkeit mit den Wänden des Gefäſses und der Oberflächen, welche die eingetauchten Körper begrenzen; deshalb muſs $\delta \cdot dS$ aus zwei Teilen bestehen, deren einer von den möglichen Verschiebungen der Punkte der freien Oberfläche der Flüssigkeit herrührt, während der andere in den Verschiebungen von Punkten auf der die freie Oberfläche begrenzenden Kontur seinen Ursprung hat. Bezeichnen wir diese Variationen mit den Zeichen (1) und (2), so haben wir:

$$\delta \cdot dS = \delta_1 \cdot dS + \delta_2 dS.$$

Die erste dieser Variationen ermitteln wir geometrisch, wie es Bertrand im Jahre 1832 gezeigt hat.[1])

Gesetzt $ABCD = dS$ sei ein Element der freien Oberfläche der Flüssigkeit vor der Verschiebung (d. h. vor der Deformation der Flüssigkeit), durch Krümmungslinien begrenzt; $A_1B_1C_1D_1 = dS_1$ dasselbe Element nach der Deformation, und sei $AA_1 = \delta n$ die Normalverschiebung des Punktes A. Dann ist:

Fig. 1.



$$\delta_1 \cdot dS = dS_1 - dS,$$

da hier AB und AC Elemente zweier orthogonalen Krümmungslinien vorstellen, die auf der Fläche durch den Fuſspunkt der nach dem Innern der Flüssigkeit gerichteten Flächennormale An gezogen sind.

Es ist aber selbstverständlich

$$A_1B_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_1}\right) AB; \quad A_1C_1 = \left(1 + \frac{\delta n}{AO_2}\right) AC,$$

wobei AO_1 und AO_2 die Krümmungsradien der Normalschnitte AB und AC sind.

Indem wir dieses in den Ausdruck für $\delta_1 dS$ eintragen, bekommen wir:

$$\delta_1 \cdot dS = \left(\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2}\right) dS \cdot \delta n.$$

---

1) Journal de Liouville, t. XIII, p. 117; man kann diese Variationen auch analytisch finden.

Wenn wir durch R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkte $A(x, y, z)$ bezeichnen, haben wir nach dem Eulerschen Satze:

$$\frac{1}{AO_1} + \frac{1}{AO_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

und daher:

$$(10) \qquad \delta_1 \cdot dS = \pm \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS \delta n.$$

Wir haben rechts das Doppelzeichen $\pm$ geschrieben, weil in der Zeichnung der Fall einer konvexen Fläche (Zeichen $+$) genommen ist, d. h. einer solchen, für welche die Richtungen der Krümmungsradien und der Flächennormalen zusammenfallen; für eine konkave Fläche sind diese Richtungen entgegengesetzt und mufs man das Zeichen $-$ nehmen.

Berechnen wir jetzt $\delta_2 dS$.

Sei l die Durchschnittslinie der freien Flüssigkeitsoberfläche mit dem festen Körper oder der Wand des Gefäfses vor der Verschiebung, l_1 nach der Verschiebung, und sei l' eine unendlich nahe Lage von l auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit auch nach der Deformation, die aber aus l nur durch normale Verschiebungen ihrer Punkte hervorgeht.

In diesem Falle haben wir:

$$aa' = dl, \quad ab = \delta\lambda,$$

wobei $\delta\lambda$ die mögliche Verschiebung des Punktes a auf der Berührungsfläche der Flüssigkeit und des festen Körpers oder der Gefäfswand ist. Seien weiter bn und bn' die Richtungen der Normalen zu den freien Oberflächen der Flüssigkeit und des festen Körpers und i der Winkel zwischen ihnen, der sogenannte Randwinkel oder Akkomodationswinkel. Wir bekommen:

$$aa'bb' = \delta\lambda dl, \quad bcc'b' = \delta\lambda dl \cos i$$

und folglich:

$$(11) \qquad \delta_2 dS = \cos i \cdot dl \delta\lambda.$$

Wir müssen bemerken, dafs zwischen δn und $\delta\lambda$ eine einfache Beziehung besteht. Das bei c rechtwinklige Dreieck abc giebt:

$$ac = ab \sin i,$$

d. h.:

$$\delta\lambda = \frac{\delta n}{\sin i},$$

weil:

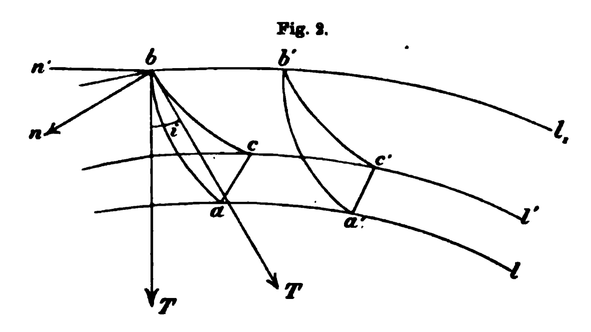
$$ac = \delta n, \quad ab = \delta\lambda.$$

Also bekommen wir für die vollständige Variation eines Flächenelementes folgenden Ausdruck:

$$(12) \qquad \delta \cdot dS = \pm \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) dS \delta n + \cos i \, dl \delta\lambda.$$

Hieraus ergiebt sich die Variation des Flächenelementes der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit dem festen Körper oder mit den Wänden des Gefäſses. Das wird in Fig. 2 die Fläche $aa'bb'$ sein. Folglich:

(13) $\delta \cdot dS' = \delta\lambda \cdot dl.$



Wenden wir uns jetzt zur Bestimmung der Variationen $\delta\varrho$, $\delta\varrho_1$ und $\delta\varrho'$. Als Folge der Stetigkeit der Masse haben wir die Bedingung:

$$\delta(\varrho d\tau) = 0,$$

wo $d\tau$ ein Element der Flüssigkeitsoberfläche ist.

Aus dieser Bedingung finden wir:

(14) $$\delta\varrho = -\varrho\Theta = 0,$$

weil:

$$\Theta = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0$$

infolge der Inkompressibilität der Flüssigkeit.

Weiter haben wir für die Schicht an der Oberfläche eine ähnliche Gleichung:

$$\delta \cdot (\varrho_1 dn \cdot dS) = 0,$$

woraus wir mit Hilfe von (12) finden:

(15) $$\delta\varrho_1 \cdot dS = \mp \varrho_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta n dS - \varrho_1 \cos i \, \delta\lambda dl,$$

und ebenso für die Berührungsfläche mit dem festen Körper:

(16) $$\delta\varrho' \cdot dS' = -\varrho' \delta\lambda dl.$$

Da die Teilchen der Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers oder der Wände des Gefäſses nur in Tangentialebenen sich verschieben können, so ist:

$$\delta n = 0, \quad i = 0.$$

Jetzt muſs man δn und $\delta\lambda$ in Funktion von δx, δy, δz ausdrücken. Es ist klar, daſs

(17) $$\delta n = \cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z.$$

Die Gröſse $\delta\lambda$ finden wir aus der Gleichung:

(18) $$\delta\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z.$$

Ebenso ist ersichtlich, daſs

(19) $$\delta\varepsilon_1 = \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\delta z,$$

(20) $$\delta\varepsilon' = \frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}\delta z.$$

IV.

Jetzt, nachdem alles vorbereitet, können wir zu unserer Grundgleichung (A) zurückkehren.

Indem wir sie entwickeln, bekommen wir:

$$\int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau + \int(X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\,dS -$$
$$-\int\left[\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\delta\varrho_1 dS + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\delta\varepsilon_1 dS + U_n\delta\cdot dS\right] -$$
$$-\int\left[\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}\delta\varrho' dS' + \frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}\delta\varepsilon' dS' + U_{n'}\delta\cdot dS'\right] = 0,$$

wobei wir die Gleichung (14) und die Bedingung der Inkompressibilität der Flüssigkeit benutzt haben. Indem wir weiter die Gleichungen (12), (13), (15), (16), (17), (18), (19) und (20) benutzen, bekommen wir nach einfachen Reduktionen folgende Gleichung:

$$(\mathrm{A}')\quad \left\{\begin{aligned}
&\int(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,d\tau + \int(X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z)\,dS -\\
&-\int\Big\{\Big[\pm\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\Big)\cos(nx) + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial x}\Big]\delta x +\\
&+\Big[\pm\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\Big)\cos(ny) + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial y}\Big]\delta y +\\
&+\Big[\pm\Big(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\Big)\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\Big)\cos(nz) + \frac{\partial U_n}{\partial\varepsilon_1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\Big]\delta z\Big\}dS -\\
&-\int\Big(\frac{\partial\varepsilon'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon'}{\partial z}\delta z\Big)\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varepsilon'}dS' -\\
&-\int\Big\{\Big[\Big(U_n - \varrho_1\frac{\partial U_n}{\partial\varrho_1}\Big)\cos i + \Big(U_{n'} - \varrho'\frac{\partial U_{n'}}{\partial\varrho'}\Big)\Big]\Big[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta y +\\
&+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta z\Big]\Big\}\,dl.
\end{aligned}\right.$$

Die hier vorkommenden Variationen müssen noch die Bedingung (B) befriedigen.

Indem wir die Gleichung (B) von (A′) subtrahieren, bekommen wir eine Gleichung, in welcher die Variationen δx, δy, δz, wie im Umfangsintegrale, so auch in den Flächen- und Konturintegralen absolut willkürlich sind, und deswegen sind ihre Koeffizienten alle gleich Null.

Hieraus bekommen wir: I. im Innern der Masse der Flüssigkeit müssen die Gleichungen bestehen:

$$\text{(C)} \qquad X - \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad Y - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad Z - \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

II. auf der freien Oberfläche müssen befriedigt werden die Gleichungen:

$$\text{(D)} \quad P\cos(nx) \pm \left(U_n - \varrho_1 \frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\cos(nx) + \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\cdot\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} - X_n = 0$$

und ähnliche für die Achsen y, z.

III. auf der Oberfläche des festen Körpers und der Gefäſswände:

$$\text{(E)} \qquad P\cos(n'x) + \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\,\frac{\partial \varepsilon'}{\partial x} = 0$$

und ähnliche Gleichungen für die Achsen y, z.

IV. auf der Kontur der freien Oberfläche der Flüssigkeit müssen die Bedingungen erfüllt werden:

$$\text{(F)} \qquad \left[\left(U_n - \varrho_1 \frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1}\right)\cos i + \left(U_{n'} - \varrho' \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'}\right)\right]\frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0$$

und ähnliche für die Achsen y, z.

Jetzt setzen wir:

$$\text{(21)} \qquad U_n - \varrho_1 \frac{\partial U_n}{\partial \varrho_1} = P_1, \quad U_{n'} - \varrho' \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varrho'} = P'.$$

Bemerken wir noch, daſs ε und ε_1' als Dicken von Flüssigkeitsschichten auf den Normalen zu den Oberflächen gemessen werden, und daſs man schlieſslich zwei solche Vektoren K, K' bestimmen kann, daſs

$$\text{(22)} \quad \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = K\cos(nx), \quad \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial y} = K\cos(ny), \quad \frac{\partial U_n}{\partial \varepsilon_1}\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial z} = K\cos(nz)$$

und

$$\text{(23)} \quad \begin{gathered} \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial x} = K'\cos(n'x), \quad \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial y} = K'\cos(n'y), \\ \frac{\partial U_{n'}}{\partial \varepsilon'}\frac{\partial \varepsilon'}{\partial z} = K'\cos(n'z). \end{gathered}$$

Bei diesen Voraussetzungen formen sich die Gleichungen (D), (E), (F) in folgende um:

$$\text{(D')} \qquad \left\{ \begin{aligned} X_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nx) \\ Y_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(ny) \\ Z_n &= \left[P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]\cos(nz) \end{aligned} \right.$$

auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit,

(E') $$P + K' = 0$$

auf der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit dem festen Körper.

Auf der Kontur:

(F') $$\cos i = -\frac{P'}{P_1}.$$

V.

Die Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeit sind also: im Innern der Masse:

(I) $$\frac{\partial P}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = Z.$$

Die Funktion P ist der sogenannte hydrostatische Druck. Aus diesen Gleichungen geht das Pascalsche Gesetz hervor.

Auf der freien Oberfläche der Flüssigkeit finden wir aus (D') für den Druck

$$P_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}$$

(II) $$P_n = P + K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Dieser Druck besteht aus zwei Hauptteilen:

$$P,$$

der nicht abhängt von der Form der freien Oberfläche und dem Drucke

$$K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

der von der Form der freien Oberfläche der Flüssigkeit abhängt; das ist der sogenannte kapilläre Druck in der Flüssigkeit.

Der Druck K ist die sogenannte Flächenspannung der Flüssigkeit. Nach Gleichung (II) ist der volle kapilläre Druck:

$$P_k = K \pm P_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

K ist auf der ebenen, freien Oberfläche Druck, d. h. wenn $R_1 = R_2 = \infty$. Der Druck K rührt von der Flächenspannung der obersten Schichten der Flüssigkeit her.

Auf der Flächenkontur hat man die Bedingung für den Randwinkel:

(III) $$\cos i = -\frac{P'}{P_1}.$$

Dieser Winkel i hängt von der Dichtigkeit der oberen Schichten der

Flüssigkeit ϱ_1 und ϱ' und den Dicken der oberen Schichten ε_1 und ε_1' ab, d. h.:

$$\cos i = \Phi(\varrho_1, \varrho'; \varepsilon_1, \varepsilon'). \tag{III'}$$

Folglich ist der Winkel i konstant, insofern ϱ_1, ϱ'; ε_1 und ε' Konstanten sind. Hier liegt, wie wir vermuten, die Erklärung der Thatsache, dafs der Randwinkel der Flüssigkeit, z. B. Quecksilber, mit der Zeit variiert; selbstverständlich ist, dafs die Oxydation des Quecksilbers, die Bestäubung u. s. w. auch die oberflächliche Dichtigkeit und die Kohäsion der Partikelchen der oberflächlichen Schicht, d. h. auch ihre Dicke, ändern.

Indem wir bemerken, dafs die Dichtigkeiten ϱ und die Dicken ε Funktionen der Temperatur sind, können wir immer eine solche Bedeutung der Temperatur zulassen, bei welcher die Funktion Φ sich in 0 verwandelt, und dann bekommen wir:

$$i = \frac{\pi}{2},$$

oder, mit anderen Worten, es wird die Flüssigkeit den festen Körper nicht berühren.

Wir haben noch die Gleichung (E'), deren Sinn selbstverständlich ist. Sie giebt uns den Druck der Flüssigkeit auf die Oberfläche des festen Körpers.

VI.

Im Vorausgehenden haben wir immer angenommen, dafs unsere Flüssigkeit inkompressibel sei. Aber unsere allgemeinen Folgerungen werden wir auch für den Fall einer kompressiblen Flüssigkeit aufrecht erhalten können; der Unterschied der Untersuchung wird nur darin bestehen, dafs wir I. Gleichung (B) wegfallen lassen, und II., dafs das Glied

$$\delta \int U d\tau$$

nicht verschwindet, und man folglich zur linken Seite der Gleichung (A')

$$-\delta \cdot \int U d\tau$$

hinzufügen mufs. Aber es ist:

$$\delta \cdot \int U d\tau = \int \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} d\varrho + U\Theta\right) d\tau = \int \Theta \left(U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho}\right) d\tau,$$

weil

$$\delta \cdot d\tau = \Theta d\tau, \quad \delta\varrho = -\varrho\Theta.$$

Setzen wir:

$$U - \varrho \frac{\partial U}{\partial \varrho} = -P. \tag{24}$$

Indem wir dies einsetzen und die Greensche Transformation anwenden, finden wir:

$$-\delta \cdot \int U d\tau = -\int P \{ [\cos(nx)\,\delta x + \cos(ny)\,\delta y + \cos(nz)\,\delta z]\, dS -$$
$$- [\cos(n'x)\,\delta x + \cos(n'y)\,\delta y + \cos(n'z)\,\delta z]\, dS' \} -$$
$$- \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} \delta x + \frac{\partial P}{\partial y} \delta y + \frac{\partial P}{\partial z} \delta z \right) d\tau.$$

Indem wir diesen Ausdruck in die linke Seite der Gleichung (A') hineintragen und die Koeffizienten bei δx, δy, δz in allen Integralen gleich Null setzen, bekommen wir dieselben Gleichungen (C), (D), (E) und (F), mit dem Unterschiede nur, daſs die Funktion (P) durch Gleichung (24) bestimmt wird. Diese Gleichung kann man schreiben:

$$P = f(\varrho). \tag{25}$$

Dies ist die Gase charakterisierende Gleichung.

VII.

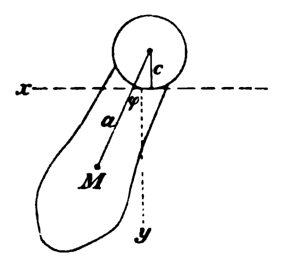
Auſser daſs die dargestellte Theorie die Theorien der Hydrostatik und Kapillarität auf denselben Ursprung zurückführt, besitzt sie noch im Vergleich mit den alten Theorien von Laplace und Gauſs den Vorzug, daſs sie gleich die Flächenspannung einführt, was die Gauſssche Theorie nicht thut, und eine sehr einfache Bedingung (III) für den Randwinkel giebt, was die Laplacesche Theorie nicht unvermittelt liefert. Unsere Theorie hat einen Berührungspunkt mit der Poissonschen in dem Umstande, daſs bei uns die oberflächliche Dichtigkeit nicht der Dichtigkeit der Flüssigkeit im Innern (ihrer Masse) gleich ist.

Über ein Pendelproblem von Euler.

Von Dr. Alfred Denizot in Charlottenburg.

In „*Nova Acta Academiae Petropolitanae*“ (tomus VI, 1788 pag. 145) behandelt L. Euler das Problem: „*De motu oscillatorio penduli circa axem cylindricum plano horizontali incumbentem.*“ Dieses soll gewissermaßen eine Verallgemeinerung des gewöhnlichen Pendelproblems sein; der Unterschied zwischen beiden Problemen besteht darin, daß während beim gewöhnlichen Pendel die Masse um eine Gerade als Achse schwingt, im obigen Problem die Masse mit einem Kreiscylinder fest verbunden ist, der an seinen beiden Enden durch horizontale, in derselben Höhe sich befindende Ebenen gestützt, sich längs dieser Ebenen reibungslos hin- und herbewegen kann. Die Differentialgleichung ergiebt ein Integral, das zum Teil auf elliptische Funktionen führt und das von Euler unter der Annahme kleiner Schwingungen näherungsweise berechnet wird. Dieses Problem von Euler ist auch in das vortreffliche Übungsbuch von *Jullien*: „*Problèmes de mécanique rationnelle*“ (II, pag. 63) aufgenommen, allein auch dort heißt es: „cette intégrale ne peut s'obtenir sous forme finie“.

Im folgenden wird gezeigt, daß das Integral, welches die Zeit liefert, durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden kann; freilich sind damit die Koordinaten als Funktionen der Zeit explicite noch nicht gegeben. Wir betrachten (cf. Jullien etc. l. c.) den vertikalen, durch den Schwerpunkt des ganzen Körpers gelegten Schnitt (s. Figur). Es seien x, y die Koordinaten des Schwerpunktes, c der Radius des Cylinders, a die Entfernung der Achse des Cylinders vom Schwerpunkt M des ganzen Systems, m die Masse des Systems, φ der Winkel, den a mit der y-Achse bildet, k der Trägheitsradius des Körpers in Bezug auf eine, durch dessen Schwerpunkt gehende Parallele zur Achse des Cylinders.



Alsdann erhält man unmittelbar aus dem Prinzip der lebendigen Kräfte die Differentialgleichung des Problems:

$$\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}+\frac{m}{2}k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2=mgy+\text{const.}$$

Hierin entspricht $\frac{m}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}$ der lebendigen Kraft der fortschreitenden, $\frac{m}{2}k^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ der lebendigen Kraft der schwingenden Bewegung und $mgy+\text{const}$ der potentiellen Energie des Systems.[1])

Führt man (da wir eine Abwickelung des Cylinders an den Ebenen haben) in obige Gleichung ein:

$$x=a\sin\varphi-c\varphi,\quad y=a\cos\varphi-c,$$

so erhält man

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\{a^2-2ac\cos\varphi+c^2+k^2\}=2g(a\cos\varphi-c)+C$$

Zur Bestimmung der Konstanten C dient folgendes: Zu einer Zeit, in der die Winkelgeschwindigkeit $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=0$ ist, soll $\varphi_0=\alpha$ sein, woraus folgt $C=2g(c-a\cos\alpha)$, und daher lautet die Differentialgleichung des Problems:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\{k^2+a^2+c^2-2ac\cos\varphi\}=2ga(\cos\varphi-\cos\alpha),$$

woraus folgt:

$$t=\int\frac{(k^2+a^2+c^2-2ac\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2ga}(\cos\varphi-\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}d\varphi.$$

Um dieses Integral ganz allgemein zu lösen, setzen wir zunächst

$$\cos\varphi=1-2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\text{ und }\cos\alpha=1-2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

und wir erhalten:

$$t=\frac{1}{\sqrt{ga}}\int\frac{\left\{k^2+(a-c)^2+4ac\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\left\{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}\frac{d\varphi}{2}.$$

Wenn wir nun $\sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\psi$, ferner der Kürze wegen $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\varkappa$ und $\frac{k^2+(a-c)^2}{4ac}=p^2$ einführen, so wird

1) Es sei bemerkt, daſs Euler unter g, was hier die Erdbeschleunigung bedeutet, den Wert $2g$ versteht (. . . . ubi g est altitudo lapsus gravium uno minuto secundo), l. c. pag. 147.

$$(1)\qquad t = 2\sqrt{\frac{c}{g}}\int\frac{(p^2+\varkappa^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}}{(1-\varkappa^2\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}}d\psi$$

oder

$$t = 2p\sqrt{\frac{c}{g}}\int\frac{\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}\sin^2\psi\right)d\psi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\psi)\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}\sin^2\psi\right)}}.$$

Wird hierin $c = 0$ gesetzt, so erhalten wir

$$t = \sqrt{\frac{k^2+a^2}{ag}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

also den Ausdruck für das zusammengesetzte Pendel, wo $\frac{k^2+a^2}{a}$ die reduzierte Pendellänge ist.

Wollte man nun, wie es beim gewöhnlichen Pendelproblem der Fall ist, zur Lösung des Integrals (1) ψ durch $\operatorname{am} u$, also $\sin\psi$ durch $\sin\operatorname{am} u = \operatorname{sn} u$ ausdrücken, so würde man unter dem Integralzeichen $\sqrt{1+\frac{\varkappa^2}{p^2}\operatorname{sn}^2 u}$ erhalten; der Integrand würde also als eine nicht eindeutige Funktion erscheinen.

Vermieden wird dieses, wenn

$$\sin^2\psi = z$$

gesetzt wird; dann ist

$$\sin^2\psi\, d\psi = \frac{\sqrt{z}\, dz}{2\sqrt{1-z}} = \frac{z\, dz}{2\sqrt{z(1-z)}},$$

und wir erhalten

$$t = p\sqrt{\frac{c}{g}}\int\frac{\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}z\right)z\, dz}{\sqrt{R(z)}},$$

wo

$$R(z) = (1-\varkappa^2 z)(1-z)z\left(1+\frac{\varkappa^2}{p^2}z\right)$$

ist, und $R(z) = 0$ gesetzt, liefert die vier aufeinanderfolgenden Wurzeln

$$\frac{1}{\varkappa^2} > 1 > 0 > -\frac{p^2}{\varkappa^2}.$$

Zur weiteren Lösung des Integrals führen wir die bekannte Transformation des Integrals aus, indem wir setzen

$$z = \frac{r+su}{1+u},$$

wo u die neue Variable ist. Es wird dabei

$$\sqrt{R(z)} = \frac{1}{(1+u)^2}\sqrt{R(u)}.$$

$R(u)$ besteht aus vier Faktoren, von denen wir die beiden ersteren und die beiden letzteren zusammenfassen, und nach erfolgter Ausmultiplizierung der zusammengehörigen Faktoren bestimmen wir r und s so, dafs die mit u verbundenen Glieder fortfallen. Wir erhalten dann für r und s die Bedingungsgleichungen:

$$r + s + 2\frac{\varkappa^2}{p^2} rs = 0$$

$$2 - (1 + \varkappa^2)(r + s) + 2\varkappa^2 rs = 0,$$

aus welchen folgt

$$r + s = \frac{2}{1 + \varkappa^2 + p^2}$$

$$rs = \frac{-p^2}{\varkappa^2(1 + \varkappa^2 + p^2)};$$

ferner ist

$$r - s = \frac{2\sqrt{(1 + p^2)(\varkappa^2 + p^2)}}{\varkappa(1 + \varkappa^2 + p^2)},$$

wobei wir uns für das positive Zeichen der Quadratwurzel entscheiden. Für r und s erhalten wir

$$r = \frac{\varkappa + \sqrt{(1 + p^2)(\varkappa^2 + p^2)}}{\varkappa(1 + \varkappa^2 + p^2)}$$

$$s = \frac{\varkappa - \sqrt{(1 + p^2)(\varkappa^2 + p^2)}}{\varkappa(1 + \varkappa^2 + p^2)}$$

und wir sehen, dafs diese Gröfsen reell sind, was auch die Art und Weise der Transformation erfordert.

Alsdann erhält man nach einiger Reduktion

$$(2) \qquad t = M\int \frac{(Au^2 + Bu + C)\,du}{(1 + u)^2\sqrt{1 - \lambda^2 u^2)(1 - \mu^2 u^2)}}.$$

Hierin ist

$$A = s\left(1 + \frac{\varkappa^2}{p^2} s\right), \quad B = r + s + 2\frac{\varkappa^2}{p^2} rs, \quad C = r\left(1 + \frac{\varkappa^2}{p^2} r\right),$$

$$M = p\sqrt{\frac{c}{g}} \frac{(r - s)}{\sqrt{r(1 - r)(1 - r\varkappa^2)\left(1 + \frac{r\varkappa^2}{p^2}\right)}}.$$

Da $R(z) = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, so sind, wie bekannt, λ^2 und μ^2 reell und positiv, was auch aus den Ausdrücken für diese Gröfsen selbst zu

ersehen ist. Es ist, wenn r und s und der Kürze wegen $\sqrt{(1+p^2)(\varkappa^2+p^2)}=P$ eingeführt werden:

$$\lambda^2 = \frac{(1-s)\left(\frac{1}{\varkappa^2}-s\right)}{(r-1)\left(\frac{1}{\varkappa^2}-r\right)} = \frac{[P+\varkappa(\varkappa^2+p^2)][1+p^2+\varkappa P]}{[P-\varkappa(\varkappa^2+p^2)][1+p^2-\varkappa P]} (>1\cdot)$$

$$\mu^2 = \frac{s\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}+s\right)}{r\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}+r\right)} = \frac{(P-\varkappa)^2}{(P+\varkappa)^2} (<1\cdot)$$

Macht man die Annahme, daſs in $R(z)=0$ die Wurzeln $\frac{1}{\varkappa^2}$ und $-\frac{p^2}{\varkappa^2}$ konjugiert komplex sind, so fällt damit auch die Voraussetzung, daſs $\sin\frac{\alpha}{2}=\varkappa$ reell ist. Wir haben dann nicht mehr eine einfache hin- und hergehende Bewegung. Wir wollen diesen Fall aus unserer Betrachtung ausschlieſsen und uns nur auf die oscillierende Bewegung beschränken.

Zur Lösung des Integrals (2) führen wir elliptische Funktionen ein, und zwar setzen wir $u=\frac{1}{\lambda}\operatorname{sn} v$ mit dem Modul $\frac{\mu}{\lambda}=\nu$, der nach dem obigen reell und kleiner als 1 ist. Alsdann ist

$$du = \frac{1}{\lambda}\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v\cdot dv,\quad R(u)=\operatorname{cn} v\cdot\operatorname{dn} v$$

und es ist, wenn wir gleichzeitig festsetzen, daſs für $v=0$ $t=t_0$ sein soll:

$$t-t_0 = M\lambda\int\frac{\frac{A}{\lambda^2}\operatorname{sn}^2 v+\frac{B}{\lambda}\operatorname{sn} v+C}{(\lambda+\operatorname{sn} v)^2}dv$$

oder

$$t-t_0 = M\lambda\int\limits_0^v\frac{\frac{A}{\lambda^2}(\lambda+\operatorname{sn} v)^2+\left(\frac{B}{\lambda}-\frac{2A}{\lambda}\right)\operatorname{sn} v+(C-A)}{(\lambda+\operatorname{sn} v)^2}dv.$$

Wir haben demnach folgende Kategorien von Integralen:

$$\int\limits_0^v dv = v;\quad \text{(elliptisches Integral erster Gattung).}$$

Ferner ist

$$\int\limits_0^v\frac{\operatorname{sn} v\,dv}{(\lambda+\operatorname{sn} v)^2} = \int\limits_0^v\frac{dv}{(\lambda+\operatorname{sn} v)} - \lambda\int\limits_0^v\frac{dv}{(\lambda+\operatorname{sn} v)^2}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite in der letzten Gleichung ist ein elliptisches Integral dritter Gattung. Um es auf die Normalform $\int\limits_0^v \frac{dv}{(\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 \alpha)} = J\binom{v}{3}$ zu bringen, setzen wir $\lambda = \mathrm{sn}\,\alpha$, und, wenn wir Zähler und Nenner des Integranden mit $\mathrm{sn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,v$ multiplizieren, ist

$$\int\limits_0^v \frac{dv}{\lambda + \mathrm{sn}\,v} = -\lambda \int\limits_0^v \frac{dv}{\mathrm{sn}^2 v - \mathrm{sn}^2 \alpha} - \int\limits_0^v \frac{\mathrm{sn}\,v\,dv}{\mathrm{sn}^2 \alpha - \mathrm{sn}^2 v} = -\lambda J\binom{v}{3} - S,$$

wenn

$$\int\limits_0^v \frac{\mathrm{sn}\,v\,dv}{\mathrm{sn}^2 \alpha - \mathrm{sn}^2 v} = S$$

gesetzt wird. Setzen wir $\mathrm{sn}^2 v = y$ (wobei der Modul ν bleibt), so ist

$$(3) \int \frac{\mathrm{sn}\,v\,dv}{\mathrm{sn}^2 \alpha - \mathrm{sn}^2 v} = m \int \frac{dx}{(x-k)\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{m}{\sqrt{a^2 - k^2}} \operatorname{arctg} \frac{x - k + \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 - k^2}},$$

wo gesetzt ist

$$x = \frac{2\mu^2 y - (\lambda^2 + \mu^2)}{2\mu^2}, \quad m = -\frac{\lambda}{2\mu}, \quad k = \frac{2\mu^2\lambda^2 - (\lambda^2 + \mu^2)}{2\mu^2}, \quad a = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2\mu^2}.$$

Dabei mufs (weil $a^2 - k^2 = (a+k)(a-k)$) die Bedingung $|k| < |a|$ erfüllt sein, was auch der Fall ist; denn werden die beiden Ausdrücke für k und a mit einander verglichen, so geht diese Bedingung über in $\mu^2 < 1$. — Setzen wir die Ausdrücke für x, m, k und a in (3) ein, so erhalten wir

$$S = \int\limits_0^v \frac{\mathrm{sn}\,v\,dv}{\mathrm{sn}^2 \alpha - \mathrm{sn}^2 v} = -\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu} \left| \operatorname{arctg} \frac{\mu(y - \lambda^2) + \sqrt{(\mu^2 y - \lambda^2)(y-1)}}{\lambda\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}} \right|_0^y$$

Endlich haben wir (abgesehen von den Grenzen) das Integral

$$\int \frac{dv}{(\lambda + \mathrm{sn}\,v)^2}$$

zu betrachten; dieses geht vermöge der Substitution $\mathrm{sn}\,v = u\lambda = w$ über in:

$$\int \frac{dw}{(\lambda + w)^2 \sqrt{R(w)}}, \quad \text{wo } R(w) = (1 - w^2)(1 - \nu^2 w^2).$$

Ein solches Integral läfst sich, wie aus der Theorie bekannt ist, auf elliptische Integrale der drei Gattungen und eine algebraische Funk-

tion zurückführen. Wenn $w = b$ kein Verzweigungspunkt der Funktion $\sqrt{R(w)}$ ist, so gilt die Entwickelung:

$$\frac{2\sqrt{R(w)}}{(w-b)^k} = -2kR(b)H_{k+1} - \frac{1-2k}{1!}R'(b)H_k + \frac{2-2k}{2!}R''(b)H_{k-1} + \cdots + \frac{n-2k}{n!}R^{(n)}(b)H_{k-n},$$

wenn

$$H_k = \int \frac{dw}{(w-b)^k\sqrt{R(w)}}.$$

ist.

In unserem Falle ist $k = 1$ und $R(w)$ vom vierten Grade; wir erhalten also

$$\int \frac{dw}{(w+\lambda)^2\sqrt{R(w)}} = -\frac{R'}{2R}\int \frac{dw}{(w+\lambda)\sqrt{R(w)}} + \frac{R^{(3)}}{12R}\int \frac{(w+\lambda)\,dw}{\sqrt{R(w)}} + \frac{R^{(4)}}{24R}\int \frac{(w+\lambda)^2\,dw}{\sqrt{R(w)}} - \frac{\sqrt{R(w)}}{(w+\lambda)R}$$

oder

$$(4)\quad \int \frac{dw}{(w+\lambda)^2\sqrt{R(w)}} = -\frac{R'}{2R}\int \frac{dw}{(w+\lambda)\sqrt{R(w)}} + \left\{\frac{R^{(3)}\lambda}{12R} + \frac{R^{(4)}\lambda^2}{24R}\right\}\int \frac{dw}{\sqrt{R(w)}} + \left\{\frac{R^{(3)}}{12R} + \frac{2R^{(4)}\lambda}{24R}\right\}\int \frac{w\,dw}{\sqrt{R(w)}} + \frac{R^{(4)}}{24R}\int \frac{w^2\,dw}{\sqrt{R(w)}} - \frac{\sqrt{R(w)}}{(w+\lambda)R}.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} R &= (1-\lambda^2)(1-\mu^2) \\ R' &= \frac{2}{\lambda}(\lambda^2+\mu^2-2\mu^2\lambda^2) \\ R^{(3)} &= -24\frac{\mu^2}{\lambda} \\ R^{(4)} &= 24\frac{\mu^2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Ferner ist, wenn $w = \operatorname{sn} v (\text{mod. } \nu)$ gesetzt wird:

$$\int_0^w \frac{dw}{(w+\lambda)\sqrt{R(w)}} = \int_0^v \frac{dv}{\lambda + \operatorname{sn} v} = -\lambda J_3 - S$$

$$\int_0^w \frac{w^2\,dw}{\sqrt{R(w)}} = \int_0^v \operatorname{sn}^2 v\,dv = \frac{1}{\nu^2}J_2(v),$$

wenn mit

$$J_2(v) = \int_0^v \nu^2 \operatorname{sn}^2 v\,dv$$

das elliptische Integral zweiter Gattung bezeichnet wird.

Das Integral $\int \frac{w\,dw}{\sqrt{R(w)}}$ fällt heraus, da der Koeffizient $\frac{R^{(3)}}{12R} + \frac{R^{(4)}1}{12R} = 0$ ist. Das letzte Glied auf der rechten Seite in (4), wenn $w = u\lambda$ und die Grenzen 0 und $u\lambda$ eingeführt werden, geht über in:

$$\frac{\sqrt{R(w)}}{(w+\lambda)R} = \frac{1}{\lambda R}\left(\frac{\sqrt{R(u)}}{u+1} - 1\right), \text{ wo } R(u) = (1-\lambda^2u^2)(1-\mu^2u^2) \text{ ist.}$$

Für die elliptischen Integrale $J_2(v)$ und $J_3(v)$ haben wir die Ausdrücke:

$$J_2(v) = \frac{J}{K}v - \frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)}$$

und

$$J_3(v) = -\left(\nu^2 \operatorname{sn}^2\beta + \frac{\nu^2 \operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta \operatorname{dn}\beta}\right)v - \frac{1}{2}\frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\log\frac{\Theta(v-\beta)}{\Theta(v+\beta)},\text{[1]}$$

wobei $\beta = \alpha - K'i$ ist und α der Bedingung $\operatorname{sn}\alpha = \lambda$ genügt.

Nunmehr ist das Integral (1) vollständig bestimmt. Wir erhalten als Resultat:

$$t - t_0 = M_1\left\{\alpha_1\lambda \left|\frac{\sqrt{R(w)}}{w+\lambda}\right|_0^w + \beta_1 S + \gamma_1 v + \delta_1 J_2(v) + \varepsilon_1 J_3(v)\right\}$$

oder mit Berücksichtigung der Ausdrücke für S, $J_2(v)$ und $J_3(v)$:

$$\begin{aligned} t - t_0 = M_1\Bigg\{&\alpha_1\left(\frac{\sqrt{R(u)}}{u+1} - 1\right) - \frac{\beta_1}{2}\frac{\lambda}{\mu}\left|\operatorname{arctg}\frac{\mu(y-\lambda^2) + \sqrt{(\mu^2y-\lambda^2)(y-1)}}{\lambda\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}}\right|_0^y \\ &+ \left[\gamma_1 + \delta_1\cdot\frac{J}{K} - \varepsilon_1\left(\nu^2\operatorname{sn}^2\beta + \frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\frac{\Theta'(\beta)}{\Theta(\beta)}\right)\right]v \\ &- \delta_1\cdot\frac{\Theta'(v)}{\Theta(v)} - \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{\nu^2\operatorname{sn}^2\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\operatorname{lognat}\frac{\Theta(v-\beta)}{\Theta(v+\beta)}\Bigg\}. \end{aligned}$$

Hierin ist

$$M_1 = \sqrt{\frac{c}{g}}\,\frac{r-s}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\sqrt{r(1-r)(1-r\varkappa^2)(p^2+r\varkappa^2)}}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varkappa^2(r-s)^2 \\ \beta_1 &= +(r-s)\{p^2 + 2\varkappa^2 s - [p^2 + \varkappa^2(r+s)](\mu^2+\lambda^2) + (p^2+2\varkappa^2 r)\mu^2\lambda^2\} \\ \gamma_1 &= -\frac{1}{\lambda}\{s(p^2+\varkappa^2 s) - s(p^2+\varkappa^2 s)(\mu^2+\lambda^2) + [sp^2 + \varkappa^2 r(2s-r)]\mu^2\lambda^2\} \\ \delta_1 &= -\varkappa^2(r-s)^2 \\ \varepsilon_1 &= \lambda(r-s)\{p^2 + 2\varkappa^2 s - [p^2+\varkappa^2(r+s)](\mu^2+\lambda^2) + (p^2+2\varkappa^2 r)\mu^2\lambda^2\}. \end{aligned}$$

Hiermit ist gezeigt, daſs die Zeit in dem behandelten Problem sich als ein geschlossenes Integral ausdrücken läſst, und zwar unter Zuhilfenahme elliptischer Funktionen, deren Theorie zu Eulers Zeit allerdings erst in der Entwickelung begriffen war. In obiger Lösung ist zugleich der Einfluſs der cylindrischen Form der Schneide eines

1) Den Vorlesungen des Herrn Prof. Fuchs entnommen.

Pendels auf die Schwingungszeit enthalten, welches Problem bekanntlich von Bessel in den „Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels“ und Herrn Helmert in den „Beiträgen zur Theorie des Reversionspendels“ unter Vernachlässigung gewisser kleiner Gröfsen und mittelst Reihenentwickelung behandelt wird. Inwieweit die hier gegebene Lösung für praktische Fälle brauchbar ist, soll einstweilen dahingestellt sein.

Zur Berechnung der Wurzeln quadratischer und kubischer Gleichungen mittelst der gewöhnlichen Rechenmaschinen.

Von R. Mehmke in Stuttgart.

In den ausführlicheren Anleitungen zum Gebrauch der Thomasschen Rechenmaschine werden zwei verschiedene Verfahren angegeben, mittelst einer solchen Maschine Quadratwurzeln auszuziehen. Dem einen, das F. Reuleaux als von Töpler herrührend bezeichnet und in den Verh. des Ver. für Gewerbfleifs, Bd. 4 (1865) S. 112—116 mitgeteilt hat, liegt zu Grunde, dafs die Summe der n ersten ungeraden Zahlen gleich n^2 ist; das andere kann, was zwar nicht erwähnt wird, auf Horners Auflösung beliebiger Zahlengleichungen zurückgeführt werden. Wie hier in möglichster Kürze gezeigt werden soll, läfst sich das letztere Verfahren auf die reellen Wurzeln beliebiger reeller quadratischer Gleichungen ausdehnen, und, wenn man zwei Rechenmaschinen gleichzeitig benützt, auch die Berechnung der Wurzeln kubischer Gleichungen, insbesondere das Ausziehen von Kubikwurzeln, auf ganz mechanische Weise bewirken. Es ist dies von Wert, wenn man eine gröfsere Zahl genauer Ziffern nötig hat, als mit Hilfe der üblichen Tafeln gefunden werden können. Natürlich kann man statt der Thomasschen irgend eine andere erweiterte Additionsmaschine oder auch eine eigentliche Multiplikationsmaschine (vergl. Encyklopädie der mathem. Wissenschaften, Bd. 1 S. 966—973) verwenden.

Sei zuerst

$$x^2 + bx - c = 0$$

die aufzulösende Gleichung.[1]) Die gesuchte Wurzel habe der Reihe nach die Ziffern $\alpha\alpha'\alpha''\ldots$, von welchen die erste schon bekannt sei.

---

1) Wir können b und c als positiv betrachten; die Anpassung an andere Fälle ist besonders leicht, wenn die betreffende Maschine, wie z. B. die Thomassche, mit negativen Zahlen zu rechnen gestattet.

Um Weiterungen zu vermeiden, nehmen wir noch an, das Dezimal-Komma stehe nach α und es liege zwischen den ganzen Zahlen α und $\alpha + 1$ nur jene eine Wurzel. Nach Horners Verfahren[1]) bestimmt man α', indem man die gegebene Gleichung in die neue

$$x^2 + b'x - c' = 0$$

verwandelt, deren Wurzeln um α kleiner sind, und von dem Näherungswert $c' : b'$ der in Frage kommenden Wurzel dieser Gleichung die erste geltende Ziffer nimmt; hierbei ist

$$c' = c - (b + \alpha)\alpha, \quad b' = b + 2\alpha.$$

Ebenso erhält man α'' als erste geltende Ziffer von $c'' : b''$, wo

$$c'' = c' - (b' + 0{,}\alpha') \cdot 0{,}\alpha', \quad b'' = b' + 2 \cdot 0{,}\alpha'$$

u. s. w.[2]) Die Ausführung mit der Rechenmaschine gestaltet sich wie folgt. Man stellt b im Schaltwerk, c im Zählwerk ein, bringt beide in solche gegenseitige Stellung, als ob man dividieren wollte, addiert mit der Hand im Schaltwerk α Einer, subtrahiert die jetzt im Schaltwerk stehende Zahl αmal von der im Zählwerk stehenden — bei der Thomasschen Maschine und ähnlichen durch αmaliges Drehen der Kurbel (nach Vorbereitung der Subtraktion) — und addiert im Schaltwerk nochmals α Einer. Im Schaltwerk steht jetzt b', im Zählwerk c'. Nachdem man α' bestimmt hat, wie oben angegeben wurde, verlegt man das Zählwerk um eine Stelle nach links (bezw. das Schaltwerk um eine Stelle nach rechts, je nach der Einrichtung der Maschine), addiert im Schaltwerk α' Zehntel, subtrahiert die jetzt eingestellte Zahl α'mal von der im Zählwerk stehenden und addiert hierauf im Schaltwerk nochmals α' Zehntel, bestimmt α'', verlegt das Zählwerk

1) S. etwa die Encyklopädie der mathem. Wissensch., Bd. 1 S. 436; wegen aller Einzelheiten und der Behandlung schwieriger Fälle kann immer noch auf H. Scheffler, Auflösung der Gleichungen, Braunschweig 1859, S. 14 ff. verwiesen werden.

2) Im Anfang der Rechnung kann es zwar vorkommen, dafs auf diese Weise für eines der α ein zu hoher Wert gefunden wird, was sich durch den Wechsel des Vorzeichens bei dem zugehörigen c offenbart, aber es sei wegen dieser ganz bekannten Dinge nochmals auf die Lehrbücher verwiesen. Je weiter die Rechnung fortgeschritten ist, um so weniger ist eine solche, übrigens leicht zu beseitigende Störung zu befürchten. Die Zahlen b', b'' ... nähern sich der Grenze $b + 2x$, wenn x die gesuchte Wurzel bezeichnet, und man findet $\alpha^{(\nu)}$ am schnellsten mit Hilfe des Rechenstabes, indem man den Schieber links herauszieht, bis die Stelle $b^{(\nu)}$ der oberen Schieberteilung unter die Eins der oberen Stabteilung kommt und dann über der Stelle $c^{(\nu)}$ der ersteren Teilung abliest, wobei nach dem Gesagten die Schieberstellung sehr bald nicht mehr geändert zu werden braucht.

wieder um eine Stelle nach links u. s. w. Bei dem ganzen Verfahren hat man nicht eine einzige Ziffer zu schreiben und das Ergebnis, die Reihenfolge der Ziffern $\alpha\alpha'\alpha''\alpha'''\ldots$, erscheint von selbst im „Quotienten" der Maschine. Nach Besetzung aller Stellen im Schaltwerk ist man keineswegs gezwungen aufzuhören, sondern, wenn dann von der gesuchten Wurzel n Stellen gefunden sind, ergeben sich ungefähr ebenso viele weitere genaue Stellen, wenn man den letzten Rest, $c^{(n)}$, im Zählwerk so weit wie möglich links neu einstellt und (nach dem Auslöschen der im Quotienten stehenden Zahl) auf die gewöhnliche Weise mit $b^{(n)}$ dividiert.

Beispiel.

$$x^2 + 4x - 7 = 0. \quad b = 4, \quad c = 7.$$

Eine Wurzel liegt zwischen 1 und 2, diese sei zu berechnen, also $\alpha = 1$.

Schaltwerk	7.000 ...	$= c$
Zählwerk	5.000 ...	$= b + \alpha$; αmal subtrahiert, giebt
Zählwerk	2.000 ...	$= c'$.
Schaltwerk	6.000 ...	$= b + 2\alpha = b'$

$$\frac{c'}{b'} = 0{,}3\ldots, \quad \alpha' = 3.$$

Zählwerk	2.000 ...	$= c'$
Schaltwerk	6.300 ...	$= b' + 0{,}\alpha'$; α'mal subtrahiert, giebt
Zählwerk	0.110 ...	$= c''$
Schaltwerk	6.600 ...	$= b' + 2.0{,}\alpha' = b''$

$$\frac{c''}{b''} = 0{,}01\ldots, \quad \alpha'' = 1.$$

Zählwerk	0.1100 ...	$= c''$
Schaltwerk	6.610 ...	$= b'' + 0{,}0\alpha''$; α''mal subtrahiert, giebt
Zählwerk	0.0439 ...	$= c'''$
Schaltwerk	6.620 ...	$= b'' + 2.0{,}0\alpha'' = b'''$

$$\frac{c'''}{b'''} = 0{,}006\ldots, \quad \alpha''' = 6.$$

Mit einer Rechenmaschine, die 6 Stellen im Schaltwerk hat, findet man weiter

$$\alpha'''' = 6, \quad \alpha^{\text{V}} = 2, \ c^{\text{V}} = 0{,}0000317756, \quad b^{\text{V}} = 6{,}63324,$$

$$\frac{c^{\text{V}}}{b^{\text{V}}} = 0{,}00000479035\ldots,$$

also

$$x = 1{,}31662479035\ldots$$

(Der genaue Wert, auf 13 Dezimalen abgerundet, ist

$$x = 1{,}3166247903554.)$$

Die ganze Arbeit erfordert 2—3 Minuten Zeit.

Sei jetzt nicht die obige Gleichung, sondern

$$x^3 + bx^2 + cx - d = 0$$

gegeben, während sonst dieselben Bezeichnungen und Voraussetzungen gelten mögen, wie oben. Als erste verwandelte Gleichung hat man

$$x^3 + b'x^2 + c'x - d' = 0$$

mit

$$d' = d - [c + (b + \alpha)\alpha]\alpha; \quad c' = c + (b + \alpha)\alpha + (b + 2\alpha)\alpha; \quad b' = b + 3\alpha.$$

Es ergiebt sich α' im allgemeinen als erste geltende Ziffer in dem Dezimalbruch für $d' : c'$, ferner wird

$$d'' = d' - [c + (b + 0{,}\alpha')0{,}\alpha']0{,}\alpha';$$

$$c'' = c' + (b + 0{,}\alpha')0{,}\alpha' + (b + 2.0{,}\alpha')0{,}\alpha'; \quad b'' = b' + 3.0{,}\alpha' \text{ u. s. w.}$$

Um nun b', c', d' aus b, c, d, α mechanisch finden zu können, ohne eine Zwischenzahl schreiben zu müssen, ebenso b'', c'', d'' aus b', c', d', α' u. s. w., benütze man zwei Rechenmaschinen. Auf der ersten sei im Schaltwerk b, im Zählwerk c eingestellt, auf der zweiten Maschine im Zählwerk d. Man bereite die erste Maschine für Addition, die zweite für Subtraktion vor und verlege bei beiden das Zählwerk so weit wie möglich nach rechts. Nun addiere man mit der Hand im Schaltwerk der ersten Maschine α Einheiten und multipliziere dann mit α (durch αmaliges Drehen der Kurbel), sodaſs im Zählwerk dieser Maschine der Wert $c + (b + \alpha)\alpha$ erscheint. Diesen Wert stelle man im Schaltwerk der zweiten Maschine ein und multipliziere mit α, dann wird im Zählwerk der letzteren Maschine der Wert $d - [c + (b + \alpha)\alpha]\alpha = d'$ zum Vorschein kommen. Hierauf addiere man im Schaltwerk der ersten Maschine nochmals mit der Hand α Einheiten und multipliziere mit α, dann bildet sich im Zählwerk dieser Maschine

$$c + (b + \alpha)\alpha + (b + 2\alpha)\alpha = c',$$

und wenn man zum dritten Mal im Schaltwerk α Einheiten hinzufügt, so steht im letzteren schliefslich der Wert b'. Ist α' als erste geltende Ziffer des Dezimalbruchs für $d':c'$ bestimmt und wiederholt man das ganze Verfahren, indem man statt der vorher benützten α Einer jetzt α' Zehntel setzt, auch nicht versäumt, in beiden Maschinen das Zählwerk um eine Stelle nach links zu verlegen, so wird am Schlusse im Schaltwerk der ersten Maschine b'', im Zählwerk derselben c'', im Zählwerk der zweiten Maschine d'' stehen u. s. w. Die Reihenfolge der Ziffern $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$, d. h. die gesuchte Wurzel bildet sich im „Quotienten“ der zweiten Maschine.

Beispiel.

$$x = \sqrt[3]{15}, \quad x^3 - 15 = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 15, \quad \alpha = 2.$$

	Erste Maschine.		Zweite Maschine.	
Zählw.	0.000 ...	$= c$	15.000 ...	$= d$
Schaltw.	2.000 ...	$= b + \alpha$	0.000 ...	
Zählw.	4.000 ...	$= c + (b + \alpha)\alpha$	15.000 ...	$= d$
Schaltw.	4.000 ...	$= b + 2\alpha$	4.000 ...	$= c(b + \alpha)\alpha$
Zählw.	12.000 ...	$= c'$	7.000 ...	$= d'$
Schaltw.	6.000 ...	$= b + 3\alpha = b'$	4.000 ...	

$$\frac{d'}{c'} = 0{,}5 \ldots, \quad \alpha' = 4$$

(die Wahl $\alpha' = 5$ würde zu einem Zeichenwechsel bei d' führen).

Zählw.	12.000 ...	$= c'$	7.000 ...	$= d'$
Schaltw.	6.400 ...	$= b' + 0{,}\alpha'$	.	
Zählw.	14.560 ...	$= c' + (b + 0{,}\alpha')0{,}\alpha'$	7.000 ...	$= d'$
Schaltw.	6.800 ...	$= b' + 2.0{,}\alpha'$	14.560 ...	$= c' + (b + 0{,}\alpha')0{,}\alpha'$
Zählw.	17.280 ...	$= c''$	1.176 ...	$= d''$
Schaltw.	7.200 ...	$= b' + 3.0{,}\alpha' = b''$		

$$\frac{d''}{c''} = \frac{1{,}176}{17{,}28} = 0{,}06, \quad \alpha'' = 6 \text{ u. s. w.}$$

$$x = 2{,}46 \ldots$$

Kleinere Mitteilungen.

Preisaufgabe der Société Scientifique de Bruxelles für 1902.

„Faire une étude approfondie des travaux de Simon Stevin sur la mécanique, en les comparant aux travaux antérieurs d'Archimède et aux travaux presque contemporains de Galilée, de Pascal et d'autres savants de la même époque.“ Die Bewerber haben ihre Arbeiten vor dem 1. Oktober 1902 an das Secrétariat de la Société Scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain, einzusenden.

Die neue Winkelteilung in Frankreich.

Durch Erlafs des französischen Kriegsministers vom 17. August d. J. ist den Kandidaten der École Polytechnique in Paris und der höheren Militärschule in Saint-Cyr gestattet worden, von 1902 an beim logarithmischen Rechnen die Zentesimalteilung des Quadranten anzuwenden. Von 1905 an ist diese Winkelteilung obligatorisch. Der französische Service Géographique de l'Armée giebt neue 5-stellige Logarithmentafeln für beide Winkelteilungen, die zentesimale Teilung des Quadranten und die alte sexagesimale, heraus.

Rechentafel „System Proell“.

Die in dieser Zeitschrift, S. 218—223 des laufenden Bandes, zuerst beschriebene neue graphisch-logarithmische Rechentafel von Reinhold Proell ist jetzt im Handel erschienen und durch Dr. R. Proells Ingenieurbureau in Dresden-A., Rabenerstrafse 13, aber auch durch jede Buchhandlung (Verlag von Julius Springer in Berlin) zu beziehen. Besprechung wird in einem der nächsten Hefte unter „Neue Bücher“ erfolgen.

Die XI. Versammlung russischer Naturforscher und Ärzte

wird vom 2.—12. Januar 1902 in St. Petersburg stattfinden. Sektionen: Mathematik und Mechanik, Astronomie und Geodäsie, Physik, physikalische Geographie, Chemie, Geologie und Mineralogie, Botanik, Zoologie, Anatomie und Physiologie, Geographie und Statistik, Agronomie, wissenschaftliche

Medizin und Hygiene. Allgemeine Sitzungen am 2., 8. und 12. Januar, Sektions-Sitzungen am 3., 4., 5., 6., 9., 10. und 11. Januar. Anmeldungen sind (unter Einsendung von 3 Rubel Mitgliedbeitrag und Angabe der Sektion, der man beizutreten wünscht) womöglich vor dem 15. Dezember 1901 an das Comité der Versammlung russischer Naturforscher und Ärzte (St. Petersburg, Universität) zu richten.

Auskünfte.

Mehrere Leser. — Mit dem von Herrn Gräfe in dieser Zeitschrift S. 351 des laufenden Bandes gebrauchten Verweise „Hütte 1898" ist gemeint: Des Ingenieurs Taschenbuch, herausgegeben vom akademischen Verein „Hütte", 17. Auflage, Berlin 1899. (1898 ist ein Druckfehler.) Das Erscheinen der 18. Auflage steht unseres Wissens nahe bevor. M.

H. H., S. — Über die im letzten Hefte S. 382 erwähnten günstigen Erfahrungen, die man mit der *dezimalen Teilung des rechten Winkels* in der französischen Marine gemacht hat, ist von dem Kommandanten Guyou in dem Compte rendu sommaire du Congrès international de Chronométrie de 1900 (von Gauthier-Villars in Paris zu beziehen) ein kurzer Bericht erstattet worden. Sehr lesenswerte Mitteilungen von Guyou über die den Versuchen zu Grunde liegenden Gedanken und Methoden sowie von Caspari über die verwendeten Sextanten und Chronometer finden sich in den Comptes rendus der Pariser Akademie t. 128, p. 1197 resp. 1442. Wir beabsichtigen auf den Gegenstand zurückzukommen. M.

M. L., F. — Die grofsen *Tafeln* der Jacobischen *Thetafunktionen*, welche auf Beschlufs des Table Committee der British Association unter Leitung von J. Glaisher und J. W. L. Glaisher in den Jahren 1872 bis 1874 berechnet wurden (vergl. den vorläufigen Bericht der „Tafelkommission", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 7, Heft 1, S. 125), sind nach unseren neuesten Erkundigungen allerdings gedruckt worden, aber die Veröffentlichung ist leider unterblieben, anscheinend weil die Einleitung zu denselben, die von einigen der bedeutendsten (zum Teil jetzt schon verstorbenen) englischen Mathematiker und Physiker geschrieben werden sollte, nicht zu stande gekommen ist. Möglicherweise wird jetzt von deutscher Seite dem immer fühlbarer werdenden Mangel an ausführlicheren Tafeln elliptischer Funktionen oder auch Integrale bald abgeholfen werden; genauere Mitteilungen behalten wir uns für später vor. M.

Bücherschau.

Herz, Dr. Norbert, Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung. Sammlung Schubert XIX. IV u. 381 S. Leipzig, J. G. Göschen, 1900.

Das Buch behandelt in drei Kapiteln den allgemeinen Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Einschlufs der Glücksspiele, in drei weiteren Kapiteln die Anwendungen auf das menschliche Leben, auf Zeugenaussagen, Urteilssprüche und Ahnungen, endlich die Ausgleichungsrechnung in einem zur Einführung ausreichenden Umfang und, wie gleich bemerkt werden mag, einer dem Verständnis entgegenkommenden ansprechenden Form. Im einzelnen jedoch giebt dasselbe zu mancherlei Bemerkungen Anlafs.

In dem grundlegenden Teil, der die zwei ersten Kapitel umfafst, hat der Verf. in Darstellung und Anordnung mehrfach eigene Wege zu gehen versucht, die jedoch Ref. nicht als einen Fortschritt zu erkennen vermag. Denn während das Streben der jüngsten Zeit dahin ging, die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus der Wahrscheinlichkeitsdefinition auf möglichst einfachem, an Konkretes anknüpfenden Wege abzuleiten, hat der Verf. sich eines Formalismus bedient, der nicht geeignet scheint, Klarheit der Begriffe herbeizuführen. Einige Andeutungen werden genügen, dieses Urteil zu rechtfertigen. Auf pag. 5 wird bereits von der Wahrscheinlichkeit als von einer Zahlgröfse gesprochen, pag. 9 wird unter der Überschrift: „Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung" der Satz über die vollständige (vom Verf. alternative genannte) Wahrscheinlichkeit abgeleitet, aber erst pag. 15 findet sich zum erstenmal die Definition für die mathematische Wahrscheinlichkeit. In einem Buche, das die vorliegende Materie zum Gegenstande hat, sollte man eine sorgfältige Auslegung und konsequente Handhabung des Begriffes der Wahrscheinlichkeit erwarten; gegen diese Forderung wird aber wiederholt verstofsen; so pag. 47, wenn die Frage erörtert wird, „ob nicht eine Funktion der Wahrscheinlichkeit w als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gewählt werden könnte"; man sieht, dem Verf. schweben hier wie an vielen anderen Stellen zwei verschiedene Wahrscheinlichkeitsbegriffe vor, die aber nirgends deutlich von einander geschieden werden. Dann auf pag. 9, wo die Wahrscheinlichkeit mit den Worten: „Das Maximum der Wahrscheinlichkeit ist selbstverständlich die Gewifsheit" in eine ganz unzutreffende Beziehung zur Gewifsheit gebracht wird; und pag. 265 ist gar die eigentümliche Wendung zu lesen: „In allen Fällen, wo dies nicht der Fall ist, kann sich das Resultat von der Wahrheit und selbst von der Wahrscheinlichkeit (!) noch sehr beträchtlich entfernen", die eine Gradation involviert, deren Sinn nicht zu erkennen ist. Als ein Rückschritt mufs die

Art und Weise bezeichnet werden, wie der Verf. die Wahrscheinlichkeit von Ursachen und die aus der Beobachtung gefolgerte Wahrscheinlichkeit künftiger Ereignisse begründet. Auch die vorläufige Darlegung des Gesetzes der großen Zahlen (pag. 19) und der Wahrscheinlichkeit a posteriori (pag. 42) wird mancherlei Bedenken erwecken. Unzutreffend ist es, den Ansatz $\varphi(l) = 2\sqrt{\frac{g}{\pi}}\,e^{-gl^2}$ J. Bernoulli zuzuschreiben, wie dies pag. 67 geschieht; zu dieser analytischen Fassung des nach ihm benannten Theorems war Bernoulli nicht vorgedrungen.

Von den drei den Anwendungen gewidmeten Kapiteln giebt das mittlere, von Zeugenaussagen etc. handelnde, zu Bemerkungen keinen Anlaſs; wohl aber die beiden andern.

Von dem Kapitel, das sich mit der Sterblichkeit und damit zusammenhängenden Fragen beschäftigt, kann wohl gesagt werden, daſs es in der gebotenen Form dem heutigen Stande der Wissenschaft nicht entspricht; der Verf. hielt sich bei Abfassung desselben ausschlieſslich an seine Vorlage, die vor 21 Jahren erschienen ist, und das geht bei einem Gegenstande, der seither so sehr gefördert wurde, nicht an. Es wäre vielleicht besser gewesen, dieses Thema dem in Aussicht stehenden Bande über „Versicherungsmathematik“ zu überlassen; das gilt auch bezüglich der Abschweifung auf das Gebiet des Versicherungswesens; denn manche Bemerkungen des Verf. über diesen Gegenstand sind ganz unzutreffend (z. B. pag. 221), und von den Aufklärungen, die man nach seinen einleitenden Worten erwarten sollte, ist nicht viel zu finden.

Die Ausgleichungsrechnung ist recht ausführlich vorgetragen, der betreffende Abschnitt wohl der beste des ganzen Buches. Aber dem Zwecke, den die Sammlung verfolgt, ist auch hier nicht in allem entsprochen. So findet es Ref. unzweckmäſsig, die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen an dem (einzigen!) Beispiel einer Planetenbahn-Bestimmung zu erläutern, und zwar aus verschiedenen Gründen; fürs erste läſst schon das Format des Buches die entsprechende typographische Darstellung einer solchen Aufgabe nicht zu; dann paſst zu einer ersten Einführung doch besser ein Beispiel, das sachlich möglichst allgemein zugänglich ist und in allen Details vom Leser verfolgt und nachgerechnet werden kann. Die weitgehende, bei dieser Gelegenheit gemachte Einschaltung über Determinantentheorie (pag. 334—343) paſst nicht in den Rahmen des Buches. Die Ausgleichung bedingter Beobachtungen hätte einer dem Zweck des Buches angemesseneren Bearbeitung bedurft; denn die einfach herübergenommene Darstellung, die ihr der Verf. in Valentiners „Handwörterbuch der Astronomie“ gegeben, ist für einen andern Leserkreis bestimmt. In der durch Interpolation erweiterten Tafel der Integralfunktion $\Phi(\gamma)$ — die, nebenbei bemerkt, für den Gebrauch nicht bequem angeordnet ist — fallen die Lücken von 1 · 750 bis 1 · 775 und von 1 · 800 bis 1 · 999 unangenehm auf.

Zum Schluſs giebt Ref. der Überzeugung Ausdruck, daſs bei einer eventuellen Neuauflage diesem Bande mancherlei Abänderungen zuteil werden sollten, um seine Brauchbarkeit zu erhöhen.

Wien. E. Czuber.

Heinrich Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. — Nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet. Erster Band. Braunschweig (Friedrich Vieweg und Sohn) 1900. XVIII + 506 S.

Unter dem Titel der vor nunmehr 42 Jahren zum ersten Mal von Hattendorf herausgegebenen Vorlesungen Bernhard Riemanns über die *partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen* liegt aus der Feder Heinrich Webers ein völlig neues, originales Werk dem mathematischen Leser im ersten Bande vor. Auf dem Grunde, den Riemann in seinen Vorlesungen gelegt hatte, und unter Beibehaltung der Riemannschen Anlage lediglich im grofsen und ganzen ist ein nicht nur umfangreiches, sondern auch dem jetzigen Stande dieses Zweiges der Mathematik mehr entsprechendes Gebäude entstanden. Die durchgreifenden Umgestaltungen, welche die theoretische Physik seit den Tagen Riemanns erfahren hat, und die sich nicht lediglich auf die Theorie des Elektromagnetismus und des Lichts beschränkt, ist in erster Linie der Anlafs gewesen, dafs die Neuausgabe der Riemannschen Vorlesungen mit einer vollständigen Neubearbeitung ihres Inhalts verbunden werden mufste. Dazu kommt aber ferner, dafs auch die analytischen Hilfsmittel in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen in den letzten Dezennien wesentlich erweitert worden, die physikalische Anwendung der Abbildungsprobleme, neue funktionentheoretische Methoden u. s. f. hinzugekommen sind.

Dafs das so umgestaltete Werk auch in den erweiterten Teilen den Riemannschen Sinn beibehalten hat, darf nicht erst besonders erwähnt werden. Die Vorzüge einer wahrhaft *mathematischen* Physik: Strenge der Beweisführung, genaue Formulierung der Definitionen und nicht in letzter Linie exakte Präzisierung der Voraussetzungen treten in der neuen Ausgabe vielleicht noch schärfer hervor als in den älteren.

Was den Inhalt betrifft, so zerfällt der vorliegende erste Band des ganzen Werkes in drei Bücher: *Analytische Hilfsmittel, geometrische und mechanische Grundsätze*, *Elektrizität und Magnetismus*. Das erste Buch entspricht den drei ersten Abschnitten der Hattendorfschen Ausgabe, ist aber aus Webers Händen vollständig verändert als ein kleines Kompendium der funktionentheoretischen Analysis für sich herausgekommen. *Bestimmte Integrale, der Fouriersche Lehrsatz, unendliche Reihen, Fouriersche Reihen, mehrfache Integrale, Funktionen eines komplexen Arguments, Differentialgleichungen, Besselsche Funktionen* sind die Überschriften der acht Abschnitte dieses Buches, durch welche das Material gegen die Hattendorfsche Ausgabe fast um das Doppelte angewachsen ist. Dafs trotzdem der Leser manches vermifst (wie, um nur einiges zu nennen, bei den unendlichen Reihen die für die Anwendungen so wichtigen Weierstrafsschen Sätze über Potenzreihen und über unendliche Produkte, welche letzteren beispielsweise bei der Untersuchung über die Influenz zweier cylindrischer Leiter gebraucht werden; ferner bei den partiellen Differentialgleichungen, die doch dem ganzen Werk den Titel geben, die Integration mit Grenzbedingungen, die Monge-Ampère'sche Methode, die Integration durch bestimmte Integrale, die Laplacesche Theorie der linearen Gleichungen), das findet seinen Grund wohl mehr in dem Wunsche des Lesers, auch diese Teile der Analysis im Lichte Weberscher Darstellung behandelt zu finden.

Im zweiten Buch werden die Prinzipien der Mechanik und der Potentialtheorie auseinandergesetzt. Hier findet der Leser auch die Hauptsätze der Vektoranalysis, gerade soviel, um sich ein Urteil über die Vorzüge des Prinzips und die Nachteile der Bezeichnungsweise zu bilden. Es ist hier nicht der Ort, auf diese Frage näher einzugehen. Wenn freilich ein so mäßsiger Gebrauch der immerhin noch angefochtenen, von der klassischen Bezeichnungsweise so abweichenden englischen Symbole dieser Theorie gemacht wird, stören sie auch den ihnen abgeneigten Leser nicht. Im Anschluſs an die Hauptsätze der Potentialtheorie werden hier die wichtigsten Sätze aus der Lehre von den Kugelfunktionen gegeben. Das zweite Buch umfaſst den 9. bis 14. Abschnitt des ganzen Werkes. *Lineare infinitesimale Deformation, Vektoren, Potentiale, Beispiele zum Potential, Kugelfunktionen, Überblick über die Grundsätze der Mechanik.*

Das dritte Buch ist betitelt: *Elektrizität und Magnetismus.* Von den Riemannschen Vorlesungen über diesen Gegenstand, die bekanntlich zusammen mit der Potentialtheorie von Hattendorf gesondert herausgegeben waren, unterscheidet sich die Webersche Darstellung wesentlich, weil sie die Faraday-Maxwellsche Anschauungsweise zu Grunde legt. Wir müssen uns auch hier begnügen, den Inhalt nur im wesentlichen anzugeben, der aus der umfangreichen Theorie gerade die mathematisch interessanten Probleme in sorgfältiger Auswahl enthält. Das Buch beginnt mit dem Abschnitt: *Elektrostatik;* der Erledigung des elektrostatischen Problems geht eine genaue Formulierung der in dieser Theorie zu machenden Voraussetzungen voran. Daran schlieſst sich ein Abschnitt: *Probleme der Elektrostatik*, in welchem ausgewählte Aufgaben über die Verteilung der Elektrizität auf speziellen Oberflächen behandelt werden. Nach einem weiteren Abschnitt: *Magnetismus* werden in der *Elektrokinetik* die Maxwellschen Grundgleichungen des Elektromagnetismus entwickelt und die Eindeutigkeit ihrer Lösung nachgewiesen. Es folgen die Abschnitte: *Elektrolytische Leitung, stationäre elektrische Ströme, Strömung der Elektrizität in Platten, Strömung der Elektrizität im Raume.* Manches, was aus Heinrich Webers eignen Forschungen auf diesem Gebiet schon bekannt war, findet der Leser im Zusammenhange mit neueren Untersuchungen wieder vor. Dies gilt auch für das folgende Kapitel: *Elektrolytische Verschiebungen*, mit dem das Buch beschlieſst.

Es sei verstattet, noch einige Bemerkungen über den Verwendungszweck des Werkes hinzuzufügen. Von der Feder eines Mathematikers geschrieben, ist das Buch auch in erster Linie für den Mathematiker bestimmt. In seiner Vorrede sagt der Verfasser: „Das vorliegende Buch soll kein physikalisches Lehrbuch sein. Die kurzen Entwickelungen der einzelnen physikalischen Theorien machen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Sie sollen nur die Theorien, aus denen die behandelten Probleme entnommen sind, verständlich machen. Der Schwerpunkt liegt in der mathematischen Behandlung der einzelnen Probleme .... Ebenso aber sind Fragen von nur mathematischem Interesse, die dem Physiker allzu abstrakt erscheinen möchten, ... nicht in den Kreis der Betrachtungen gezogen.“ Dem Physiker, welcher in der mathematischen Anwendung der funktionentheoretischen Analysis weniger geübt ist, wird die Lektüre des Buches noch besonders gleichzeitig mit dem Studium gröſserer Werke, etwa der Helmholtzschen oder der Poincaréschen Vorlesungen und dann zu empfehlen sein, wenn

ihm an der prinzipiellen Erkenntnis der mathematischen Methoden gelegen ist.

Charlottenburg. ——— Rudolf Rothe.

Friedrich Kohlrausch, Die Energie oder Arbeit und die Anwendungen des elektrischen Stromes. Leipzig (Duncker & Humblot) 1900. 77 S. Preis geb. 2,40 M.

Der vorliegende Aufsatz verfolgt den Zweck, den Energiebegriff wesentlich in Rücksicht auf die elektrischen Naturvorgänge und ihre technischen Anwendungen allgemein verständlich darzustellen. Veranlafst durch die Erörterungen, welche sich an die in unsrer Gesetzgebung vorhanden gewesenen und durch die Bestimmungen über die Strafbarkeit von Vergehen gegen elektrische Anlagen ausgefüllten Lücken anschlossen, erzählt die Schrift in ihrem ersten allgemeineren Teile von den verschiedenen in der Natur vorhandenen Formen der Energie, in ihrem zweiten Teile aber giebt sie eine in grofsen Zügen abgefafste Lehre von den elektrischen Erscheinungen und ihren Anwendungen, wobei einmal auf eine befriedigende Ableitung derselben aus dem Energiebegriff Gewicht gelegt wird, sodann aber auch einschlägige Fragen von einem mehr wirtschaftlich-juristischen Standpunkte aus beleuchtet werden. Hierher gehört u. a. auch die oft diskutierte Frage, inwiefern die Energie eine „Sache" genannt werden kann. In einem Schlufskapitel wird eine Zusammenstellung der wichtigsten Vorgänge im elektrotechnischen Betriebe gegeben.

Charlottenburg. ——— Rudolf Rothe.

Otto Wiener, Die Erweiterung unserer Sinne. Akademische Antrittsvorlesung. Leipzig (Johann Ambrosius Barth) 1900. 43 S. Preis 1,20 M.

Jedes neue Instrument oder jede Zusammenstellung bekannter Instrumente zu neuem Zweck stellt sich vom entwickelungsgeschichtlichen Standpunkt aus dar als eine naturgemäfse Fortentwickelung unserer Sinne. Dieser Gedanke ist von Herrn Wiener zum Gegenstande seiner Leipziger Antrittsvorlesung gemacht worden; von Herbert Spencer vor 45 Jahren wohl zuerst ausgesprochen, wird er hier besonders in Anwendung auf die neueren Errungenschaften der Apparatenkunde erörtert. Dabei werden auch Fragen nach den zur Zeit erreichbaren Grenzen physikalischer Messungen u. a. diskutiert; abgesehen von dem allgemeinen Interesse ist die sehr populär geschriebene Arbeit für den physikalischen Leser wesentlich in dieser Hinsicht von Wichtigkeit, und gleichzeitig in Rücksicht auf die zahlreichen, zum Teil kritisch besprochenen Litteraturangaben ein wertvoller Beitrag zur Geschichte der Instrumentenkunde.

Charlottenburg. ——— Rudolf Rothe.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1899 dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. II. Abtheilung: Physik des Aethers, redigirt von **Richard Börnstein** und **Karl Scheel.** LII + 935 S. III. Abtheilung: Kosmische Physik, redigirt von **Richard Afsmann,** XLIII + 544 S. Braunschweig (Friedr. Vieweg und Sohn). 1900. Preis: 34,00 und 20,00 M.

Die ganze Anlage des verdienstlichen, eine grofse Summe von Arbeit repräsentierenden und für den Physiker unentbehrlichen Werkes ist die

gleiche wie in den früheren Jahrgängen geblieben. Die zunehmende Gesamtzahl der Referate läfst wohl eine weitere Einschränkung des Umfangs der einzelnen wünschenswert erscheinen; ebenso könnte wohl von der Rubrik „Litteratur", in welcher die Arbeiten ohne Referat aufgeführt werden, noch mehr Gebrauch gemacht werden. Über einzelne Arbeiten sind in *beiden* Bänden Referate vorhanden, z. B. Grützmacher, Thermometrische Correctionen; Scheel, Temperatur und Druckmessungen, was wohl leicht zu vermeiden wäre.

Charlottenburg. RUDOLF ROTHE.

Grundsätze der Kinematik, dargestellt von **Heinrich Weiss**, Ingenieur. Erstes Heft (256 Seiten) mit einem Atlas von 10 Tafeln. Leipzig, Verlag von Arthur Felix. 1900.

Der Verfasser giebt zunächst unter „Vorbemerkungen" auf 63 Seiten eine Orientierung über das Wesen und den Entwickelungsgang der Kinematik. Einen grofsen Teil dieser breit angelegten Einleitung bilden umfangreiche Citate aus den Werken von Burmester und Reuleaux, sowie aus Aufsätzen von Grübler und Rittershaus. Der bekannte Gegensatz in den Auffassungen der zuerst genannten Autoren hinsichtlich des Umfanges der Kinematik gelangt hierdurch deutlich zum Ausdruck, dagegen vermissen wir jede selbständige Stellungnahme von seiten des Verfassers. — Der vorzutragende Lehrstoff wird schliefslich in zwei Hauptteile, in die abstrakte und die Maschinenkinematik gegliedert; davon soll der erste in wesentlich synthetischer Behandlung die Geometrie der Bewegung ohne Rücksicht aut die Zeit und daneben noch die Lehre von den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverhältnissen umfassen.

In dem vorliegenden Heft wird die Darstellung der abstrakten Kinematik in Angriff genommen. Sie beginnt mit der Bewegung des Punktes. (Grundbegriffe, Geschwindigkeits- und Wegdiagramme, Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen, S. 66—82.) Der folgende Abschnitt trägt zwar die Überschrift „Bewegung eines starren Körpers oder unveränderlichen Systems im Allgemeinen", giebt aber in der Hauptsache nur eine vorläufige Übersicht der speziellen Bewegungsformen, wie Drehung um eine feste Axe, Translation u. s. w., und wendet sich dann wieder zur Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen eines einzelnen Systempunktes (S. 83—95). Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit der Bewegung des starren ebenen Systems in seiner Ebene; er umfafst a) die Geometrie der ebenen Bewegung (S. 96—205), b) die Geschwindigkeitsverhältnisse (S. 205—250) und c) die Beschleunigungsverhältnisse (noch unvollendet).

Den Ausgangspunkt bildet wie üblich die Betrachtung zweier diskreten Systemlagen, die dann durch zwei unendlich benachbarte ersetzt werden. Hieran schliefsen sich die bekannten Sätze und Konstruktionen über die beiden Rollkurven, die Hüllbahnkurve einer gegebenen Systemkurve u. s. w., sowie das Prinzip der Umkehrung der Bewegung. Die betreffenden Darlegungen sind trotz ermüdender Breite keineswegs einwandfrei; so wird S. 101 und 102 der Satz, dafs Polkurve und Polbahn ohne Gleiten auf einander rollen, und dafs sie die beiden einzigen Kurven dieser Art sind,

ohne Beweis offenbar als etwas Selbstverständliches hingestellt. — Die Betrachtung dreier auf einander folgenden Systemlagen und der damit zusammenhängenden Krümmungseigenschaften und Aufgaben erfordert fünfundsechzig Seiten; dabei fehlt noch die in die Mechanismenlehre verwiesene Konstruktion der beiden Pole zu zwei Paaren entsprechender Krümmungsmittelpunkte in derselben Geraden. Auf S. 155 begegnen wir einem Mifsverständnis hinsichtlich des Ball'schen Punktes, der übrigens besser erst bei der Besprechung von vier unendlich benachbarten Systemlagen erwähnt würde. Sind nämlich S und S' zwei unendlich benachbarte Systemlagen und k und l' die zugehörigen Wendekreise, so ist der zu S gehörende Ball'sche Punkt nicht wie der Verfasser meint, der eine Schnittpunkt von k mit l', sondern mit der Lage l, welche der zweite Kreis einnimmt, wenn das System sich noch in S befindet. Hiernach giebt auch Fig. 49 nicht den Ort der Ball'schen Punkte in der bewegten Ebene. Von den singulären Fällen, die hinsichtlich der Momentanbewegung des Systems eintreten können, ist S. 159 nur der Fall angeführt, dafs die beiden Rollkurven einander im Pol oskulieren. Hier wäre ein kurzer Hinweis auf die wichtigen Untersuchungen von Mehmke im 35. Jahrgang dieser Zeitschrift wohl am Platze. — Was der Verfasser über vier und fünf auf einander folgende Systemlagen, zum Teil blos andeutend, darlegt, kann nur zu einer vorläufigen Orientierung dienen, es ist uns aber noch nicht klar, wie damit das für die Maschinenkinematik in Aussicht gestellte Problem der angenäherten Geradführung behandelt werden soll. Auf S. 193 bedarf der auf die Kreispunktkurve bezügliche Satz einer genaueren Fassung. Die Kreispunktkurve besitzt nämlich im Pol einen Doppelpunkt und hat in ihm mit der Polkurve nur insofern drei zusammenfallende Punkte gemein, als sie diese Kurve an der betrachteten Stelle zugleich berührt und rechtwinklig schneidet. — Den Abschlufs des mit a) bezeichneten Unterabschnitts bilden einige Bemerkungen über die gegenseitigen Bewegungen von drei und mehr ebenen Systemen. Die weitergehenden Untersuchungen von Burmester, Rodenberg und Wittenbauer sollen merkwürdigerweise erst in der Maschinenkinematik berücksichtigt werden.

Unter b) wird zunächst der momentane Geschwindigkeitszustand eines complan[1]) bewegten ebenen Systems behandelt; dann folgt die Betrachtung der Geschwindigkeitsverhältnisse bei mehreren complan bewegten Systemen und eine Reihe von Konstruktionsaufgaben, z. B. die Bestimmung der Geschwindigkeit des Schnittpunktes einer bewegten und einer festen Kurve oder zweier bewegten Kurven u. s. w. Hier finden wir endlich auch auf S. 236 den früher vermifsten Beweis für das Rollen der Polkurve auf der zugehörigen Polbahn.

Auf die unter c) sich anschliefsenden Darlegungen werden wir erst bei Besprechung des nächsten Heftes eingehen.

Um nun zur Bildung eines Gesamturteils über das bis jetzt erschienene Bruchstück des Werkes zu kommen, so wollen wir an erster Stelle gern anerkennen, dafs hier eine fleifsige, durch viele Litteraturangaben unterstützte Zusammenstellung von sehr verschiedenartigen Arbeiten zahlreicher Autoren

1) In der zweiten Hälfte des Buches ist die anfänglich gebrauchte Bezeichnung „complan“ regelmäfsig mit „conplan“ vertauscht.

vorliegt. Eine tiefere wissenschaftliche Bedeutung vermögen wir dem Buche vorläufig nicht beizumessen; dazu fehlt es vor allem an jeder selbständigen Gestaltung des behandelten Stoffes. Nicht angenehm berührt die bereits hervorgehobene Weitschweifigkeit der Darstellung mit ihren vielen unnötigen Wiederholungen und vorgreifenden Andeutungen über Dinge, die doch erst in späteren Abschnitten behandelt werden sollen. Dabei ist die Ausdrucksweise, wie wir leider gleichfalls nicht verschweigen dürfen, in mathematischer Beziehung zuweilen unklar oder geradezu unrichtig und auch in rein stilistischer Hinsicht keineswegs musterhaft. Einen weiteren Mangel erblicken wir vom pädagogischen Standpunkte aus darin, dafs alle Anwendungen der vorgetragenen Theorie auf durchgeführte Übungsbeispiele bis jetzt noch vollständig fehlen. — Für unvorteilhaft halten wir endlich die zwar konsequente, aber ungemein schwerfällige Buchstabenbezeichnung; so bedeutet $[C_{\underline{f}}]$ die Polbahn, $K^{C_{\underline{f}}}$ ihren Krümmungsmittelpunkt, und S. 158 wird sogar von einem Kreise $k_{\underline{f}}^{\kappa^{C_{\underline{f}}}}$ gesprochen! Hierdurch wird nicht nur im Text, sondern namentlich auch in den Figuren der Überblick sehr erschwert; man vergleiche z. B. Fig. 63.

Braunschweig. R. Müller.

Josef Adamczik. Compendium der Geodäsie. 8^0. VIII u. 516 S. Leipzig und Wien 1901, Franz Deuticke.

Der Titel dieses Buches verspricht insofern zu viel, als es nur einen Abrifs der *niederen* Geodäsie enthält, wie der Verfasser im Vorwort übrigens selbst im allgemeinen zugiebt. Indessen dürften auch die Kapitel, die nach des Verfassers Ansicht Gebiete der höheren Geodäsie behandeln — wie z. B. über das Heliotrop, die Komparatoren, den Spiegelsextanten, über Soldnersche und konforme Koordinaten u. s. w. —, zumal mit Rücksicht auf ihren knappen Inhalt, in einem Lehrbuch der niederen Geodäsie schon des allgemeinen Verständnisses wegen kaum ganz fehlen. Als Kompendium der niederen Geodäsie kann man das Buch aber wohl empfehlen. Seinem Charakter entsprechend bringt es keine vollständige Darstellung des Gegenstandes, aber doch überall die gebräuchlichsten und am meisten vorkommenden Beobachtungs- und Rechnungsmethoden. Die Kapitel über die Beschreibung und Anwendung der Instrumente sind klar und einfach abgefafst. Sehr erleichtert wird das Verständnis durch die grofse Anzahl (329) Figuren. Die typischen Darstellungen der Instrumente und ihrer Teile werden durch Abbildungen ausgeführter Instrumente, besonders aus den Werkstätten von L. Tesdorpf in Stuttgart und Starke & Kammerer in Wien, ergänzt. Obgleich bei der Betrachtung der praktischen Feldmefsarbeiten, wie es als selbstverständlich erscheint, besonders auf die in Österreich giltigen Vorschriften Rücksicht genommen wird, so wird doch auch in hinreichender Weise auf die Anweisung IX des preufsischen Grundsteuerkatasters eingegangen. Auf den theoretischen Inhalt brauche ich nicht näher einzugehen, da er Neues wohl kaum enthält. Die in verhältnismäfsig geringer Anzahl vorhandenen numerischen Beispiele sind passend gewählt. Jedoch möchte ich bemerken, dafs der Methode der kleinsten Quadrate, soweit sie hier in Frage kommt, ein selbständiges Kapitel von 50 Seiten Länge gewidmet ist.

Da fast alle Lehrbücher der Geodäsie ein solches Kapitel enthalten, so sieht es beinahe aus (wie man auch hier aus der Überschrift des betreffenden Kapitels schliefsen kann), als ob die Methode der kleinsten Quadrate nur ein Abschnitt der Geodäsie sei. Meiner Ansicht nach könnte man jetzt, wo die Methode der kleinsten Quadrate schon meistens ein selbständiger Vorlesungsgegenstand ist und in vielen besonderen Lehrbüchern ausführlich behandelt wird, die Aufnahme dieser Hilfswissenschaft in die Lehrbücher der Geodäsie allmählich unterlassen. Die Art indessen, wie der Verfasser, seinem Zweck entsprechend, die Methode der kleinsten Quadrate auseinandersetzt, ist anerkennenswert, indem er sie einfach, ohne auf tiefere Begründungen einzugehen, auf das Prinzip der kleinsten Fehlerquadratsumme begründet, das zugleich auf das arithmetische Mittel als plausibelsten Wert führt.

Das Buch enthält aufser einer Einleitung für die grundlegenden Begriffe folgende Kapitel: I. Mafseinheiten und Konstruktionen auf dem Papiere; II. Koordinatenrechnungen; III. Beschreibung, Theorie und Berichtigung der Instrumente zum Längen- und Winkelmessen; IV. Die Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie oder (?) die Methode der kleinsten Quadrate; V. Horizontalaufnahmen; VI. Höhenmessungen, und zum Schlufs auf 5 Seiten ganz kursorisch VII. Die Photogrammetrie.

Potsdam. A. Börsch.

G. Bigourdan. Le système métrique des poids et mesures. Son établissement et sa propagation graduelle, avec l'histoire des opérations qui ont servi à déterminer le mètre et le kilogramme. 8°. VI u. 458 S. Paris 1901, Gauthier-Villars.

Seit der Schaffung des metrischen Systems ist ein Jahrhundert verflossen. Seine Mafse und Gewichte sind jetzt über die ganze Erde verbreitet und werden in absehbarer Zeit in allen zivilisierten Ländern allein im Gebrauch sein. Der Zeitpunkt ist deshalb günstig für eine ausführliche historisch-aktenmäfsige Darstellung der Entstehung und Entwickelung dieses Systems gewählt worden. Der Verfasser war zur Abfassung dieses Werkes um so geeigneter, als er schon vorher historisch-kritische Studien über die älteren Gradmessungen ausgeführt hatte, und weil ihm verschiedene, sonst schwer zugängliche Aktenstücke und Veröffentlichungen zur Verfügung standen. Die Hauptgrundlagen der Schrift bilden natürlich die „Base du système métrique“ von Méchain und Delambre, sowie ihre Fortsetzung durch Biot und Arago, und für die neuere Zeit die Publikationen der internationalen Meter-Kommission und des internationalen Komitees für Mafse und Gewichte. Aufserdem wurden besonders herangezogen für die ältere Zeit der Moniteur universel und das Journal officiel, sowie auf der Pariser Sternwarte aufbewahrte Original-Dokumente in Bezug auf das „Décret du 1er vendémiaire an XII“ und Papiere aus dem Nachlafs Delambres. Die Darstellung für die Anfangszeit des metrischen Systems, wo bis jetzt noch manches dunkel geblieben war, ist sehr ausführlich; sie enthält nicht nur eine reine Erzählung der Thatsachen, sondern öfter auch kritische Betrachtungen und Zahlenangaben. Sehr nützlich erscheint aufser einem ausführlichen Namens-Verzeichnis eine chronologische Tabelle der (französischen) Gesetze, Dekrete, Zirkulare u. s. w., die sich auf Mafse und Gewichte und

speziell auf das metrische System beziehen. Einen besonderen Schmuck des Buches bilden, aufser zwei Dreieckskarten des französischen Meridianbogens und einer Abbildung der Erinnerungs-Medaille der internationalen Kommission von 1872, die Porträts von Delambre, Fabbroni, Lavoisier, Lefèvre-Gineau, Méchain, van Swinden und Talleyrand. Das Werk wird bleibenden Wert behalten.

Potsdam. A. Börsch.

E. Hammer. Astronomisches Nivellement durch Württemberg etwa entlang dem Meridian 9° 4′ östlich von Greenwich. Bestimmung der Polhöhe und der meridionalen Lotabweichung auf den 11 Stationen: Bitz, Mössingen, Lustnau, Schönaich, Solitude, Markgröningen, Freudenthal, Brackenheim, Schwaigen, Fürfeld, Katzenbuckel. Bestimmung eines Azimuts auf den 3 Stationen Solitude, Markgröningen und Katzenbuckel. Mit 18 Figuren im Text und einer Tafel. Im Auftrage des K. Ministeriums des Kirchen- und Schulwesens bearbeitet. Veröffentlichung der K. Kommission für die Internationale Erdmessung. IV. Heft. 4°. VIII u. 157 S. Stuttgart 1901, Druck der Union, Deutsche Verlagsanstalt.

Der Titel dieser Schrift giebt bereits eine summarische Inhalts-Übersicht. Sie enthält hauptsächlich die Resultate eines in den Jahren 1897 und 1898 ausgeführten astronomischen Nivellements (nach Helmert) zur Bestimmung eines meridionalen Geoidprofils für Württemberg in der Nähe des Tübinger Meridians; ihm sollen sich später noch 3 weitere Profile in je 37 km Abstand voneinander und gegen das erste anschliefsen. Die Polhöhen sind an einem Breithauptschen Universal-Instrument mit einem 8zölligen bedeckten Horizontal- und einem ebensolchen Vertikalkreise beobachtet worden; die Methode war die der Messung von Circummeridian-Zenithdistanzen. Die Beobachtungen selbst sowie ihre Berechnung und Diskussion wird sehr ausführlich gegeben; die erhaltene mittlere innere Unsicherheit für das Resultat einer Polhöhenbestimmung im Betrage von etwa $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ Sekunde dürfte der Leistungsfähigkeit des Instrumentes entsprechen. Für Elimination der periodischen Teilungsfehler des Kreises (durch Beobachtung an 6 äquidistanten Kreisstellen) sowie für möglichste Berücksichtigung oder Unschädlichmachung anderer störender Fehlerquellen ist im allgemeinen hinreichend gesorgt worden. Die 3 Azimutbestimmungen sind mit demselben Instrument durch direkte Winkelmessung zwischen Polarstern und irdischem Objekt ebenfalls an 6 Kreisstellen mit einem inneren mittleren Fehler von etwa 0,5″ erhalten worden. Für Solitude ist auch die v. Zechsche ältere Polhöhen- und Azimutbestimmung von 1880 herangezogen worden. Die Übereinstimmung der alten und neuen Messungen ist genügend.

Die 11 Polhöhenstationen liegen zwischen 48° 14,8′ und 49° 28,3′ Breite und im Durchschnitt 14 km voneinander (im Minimum 7 km und im Maximum 29 km); ihre geodätische Lage im System der württembergischen Landesvermessung ist, abgesehen von Solitude (Schlofskuppel) und Katzenbuckel, die dem Dreiecksnetz unmittelbar angehören, durch besondere und kontrolierte Messungen so bestimmt worden, dafs die berechneten geodätischen Breiten auf ungefähr 0,1″ genau erhalten wurden. Die Meereshöhen schwanken zwischen 901 m und 193 m. Die schliefslich abgeleiteten,

auf Bessels Ellipsoid bezogenen relativen Lotabweichungen in Breite (ξ) gegen Tübingen, für das noch die alte Bohnenbergersche Breitenbestimmung mafsgebend ist, sind im allgemeinen gering; der gröfste Unterschied findet sich zwischen den beiden ersten südlichen Stationen Bitz ($\xi = -3{,}9''$) und Mössingen ($\xi = +2{,}8''$) im Betrage von 6,7″ bei 9′ 48,5″ Erdbogen, ein Wert, der durch die Anziehung des Albplateaus erklärlich ist. Wegen der Unsicherheit der Breite von Tübingen, die mehrere Sekunden betragen kann, können die aufgeführten Werte der Lotabweichungen in Breite ebenfalls mit einem gemeinsamen Fehler von diesem Betrage behaftet sein; die geringe Lotabweichung von — 0,6″ in dem nur 2,7 km nordöstlich von Tübingen gelegenen Lustnau scheint indessen doch auf die angenäherte Richtigkeit der Tübinger Polhöhe hinzuweisen. Die relativen Lotabweichungen je zweier Nivellementspunkte gegeneinander, auf die es vorerst fast allein ankommt, dürften dagegen etwa mit einem mittleren Fehler von höchstens 0,7″ behaftet sein, der wohl auch noch für eine hinreichend genaue Konstruktion des Geoidprofils, trotz der geringen Schwankungen in den Lotabweichungsbeträgen selbst, genügen wird. Diese Konstruktion des Geoidprofils ist übrigens, obwohl sie der Endzweck der ganzen Arbeit ist und auch sehr einfach und zwar zunächst ohne Rücksicht auf die in Aussicht genommenen Arbeiten zu erledigen ist, nicht ausgeführt, sondern für später zurückgestellt worden.

Die 3 Azimutbestimmungen (besonders die Neumessung in Solitude) sind von dem Verfasser zu dem Zweck ausgeführt worden, um eine Kontrole oder Verbesserung des Bohnenbergerschen Azimuts in Tübingen zu erlangen, oder, was dasselbe ist, „um über den *wirklichen* Wert des Verdrehungswinkels der x-Achse unseres Landesvermessungssystems gegen den Meridian in Punkten des vorliegenden astronomischen Nivellements genügende Auskunft erhalten zu können“ (S. 113). Wie sich der Verfasser die Ausführung dieser Absicht denkt, ist nicht ganz klar; es sei denn, dafs er entweder die Nichtexistenz relativer ostwestlicher Lotabweichungskomponenten annehme, oder dafs er deren Einflufs auf die Azimutbestimmungen leugne (vergl. hierzu S. 146/147). Die gegenseitigen Azimutbestimmungen Solitude—Markgröningen und Solitude—Katzenbuckel, für die keine älteren Winkelmessungen nötig sind, zeigen gegeneinander relative Lotabweichungen in Azimut von ca. 2,3″ und von 4,6″, die zum gröfsten Teil, dies aber jedenfalls für Solitude—Katzenbuckel, reell sein dürften. Gegen das von Bohnenberger bestimmte Azimut in Tübingen zeigen diese 3 Stationen relative Lotabweichungen in Azimut im Betrage von + 1,0″ in Solitude, — 1,3″ in Markgröningen und von — 3,6″ in Katzenbuckel, die schon wegen der Unsicherheit des Ausgangsazimuts und der von ihm bis nach Solitude eingehenden alten Winkelmessungen eine allen gemeinsame Unsicherheit von mehreren Sekunden haben dürften. Jedenfalls ist zwischen Solitude und Katzenbuckel eine relative Lotabweichung in Länge von etwa 6″ vorhanden.

Die Beobachtungen sind nur zum geringeren Teil vom Verfasser selbst, zum gröfseren Teile von anderen, hauptsächlich von Herrn Prof. Haller, die Rechnungen aber fast vollständig von Herrn Hagenmeyer ausgeführt worden, beides indessen nach der Anleitung und unter der Kontrole des Verfassers.

Potsdam. A. Börsch.

Ch. August Vogler. Geodätische Übungen für Landmesser und Ingenieure. Zweite, erweiterte Auflage. Zweiter Teil: Winterübungen. Mit 25 eingedruckten Abbildungen. 8°. VI u. 154 S. Berlin 1901, Paul Parey.

Die erste Auflage dieses Übungsbuches erschien 1890, der erste Teil der zweiten Auflage 1899, dem nunmehr der zweite Teil, enthaltend die Winterübungen, gefolgt ist. Er schliefst sich auch äufserlich, in Bezug auf Paginierung, Kapiteleinteilung und Aufgabennumerierung, unmittelbar an den ersten Teil an. Es werden in 4 Kapiteln 48 Aufgaben über das Fernrohr, die Libelle, den Theodolith und solche aus der Ausgleichungsrechnung behandelt. Die drei erstgenannten Kapitel geben ausführliche Anweisungen und Beispiele für fast alle wichtigeren Bestimmungen von Konstanten und Fehlern, nebst ihrer Justierung, für die fraglichen Instrumente, sowie für ihre Anwendung. Die Aufgaben aus der Ausgleichungsrechnung behandeln zum Teil ebenfalls Bestimmungen von Instrumentalkonstanten, zum Teil Ausgleichungen von Winkelmessungen auf der Station und in einfachen Netzen, von Nivellements und von Vorwärts- und Rückwärtseinschnitten. Auch Schreibers fingierte, oder vielmehr reduzierte Fehlergleichungen und ihre Anwendung finden hier einen Platz. Die theoretischen Grundlagen für die einzelnen Aufgaben werden jedesmal aufgeführt. Weshalb der Verfasser auf der doch nun einmal nicht eingebürgerten Bezeichnung von Summen in der Form $\widetilde{\lambda\lambda}$, die unter Umständen sehr schwerfällig und sogar unmöglich sein kann, gegenüber der allgemein üblichen Gaufsschen Form $[\lambda\lambda]$ beharrt, ist schwer verständlich, zumal er doch häufig auch Bezeichnungen wie $[\lambda\lambda|$ und $\left[\frac{p\,q}{g}\right]$ anwendet. Für Studierende, besonders für die Zuhörer des Verfassers an der Landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin, ist diese sehr sorgfältig ausgewählte und durchgearbeitete Aufgabensammlung sehr geeignet, das Verständnis für das in den Vorlesungen Vorgetragene zu fördern.

Potsdam. A. Börsch.

Neue Bücher.

Arithmetik und Analysis.

Astresse, Ph., Traité général théorique et pratique des assurances mutuelles. T. I. In-8°. Paris, Fontemoing. Fr. 6.

Fourrey, E., Récréations arithmétiques. 2e éd. In-8°. Paris, Nony. Fr. 3.50.

Koll, Otto, Die Theorie der Beobachtungsfehler und die Methode der kleinsten Quadrate mit ihrer Anwendung auf die Geodäsie und die Wassermessungen. 2. Aufl. Lex. 8°. XII, 323 u. 31 S. Berlin, Springer. M. 10, geb. in Leinw. M. 11.20.

Spöhrer, C., Das höhere kaufmännische Rechnen. 3. Aufl. 8°. VI, 194 S. Stuttgart, Nitzschke. geb. in Leinw. M. 2.

Vogt, H., Eléments de mathématiques supérieures à l'usage des physiciens, chimistes et ingénieurs etc. Gr. in-8°. Paris, Nony. Fr. 10.

Astronomie, Geodäsie, Nautik.

Comstock, George C., A text-book of Astronomy. 8vo, pp. 402. London, Hirschfeld. 7 s. 6 d.

Genovino, Giac., Nuovo metodo per determinare la longitudine con le distanze lunari senza ridurre la distanza apparente in distanza vera e geocentrica. 8° fig. p. 7. Bari, Laterza e figli.

Graff, K., Formeln und Hilfstafeln zur Reduktion von Mondbeobachtungen und Mondphotographien für selenographische Zwecke. Diss. Berlin. 4°. 48 S.

Kreutz, Heinr., Untersuchungen über das System der Kometen 1843 I, 1880 I und 1882 II. 3. Tl. (Abhandlungen, astronomische, als Ergänzungshefte zu den astronom. Nachrichten hrsg., Nr. 1.) gr. 4°. IV, 94 S. Hamburg, Mauke Söhne. M. 9.

Laussedat, A., Recherches sur les Instruments, les Méthodes et le Dessin topographiques. T. II. (1re partie). Gr. in-8° avec 51 fig., 15 pl. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 10.

Marchand, Jules, Partage des terrains. Arpentage, levé des plans et nivellement. In-8°. Louvain, Uystpruyst. Fr. 4.

Möller, Johs., Bestimmung der Bahn des Kometen, 1897 I. (Astronom. Abhandlgn. Nr. 2.) gr. 4°, 24 S. Hamburg, Mauke Söhne. M. 2.50

Darstellende Geometrie.

Breithof, N. et Breithof, Franz, Traité de géométrie descriptive. Première partie. Texte: point, droite, plan. 4e éd. In-8° avec atlas in-4° de 24 pl. Louvain, Uystpruyst. Fr. 9.

Hittenkofer, M., Angewandte (architektonische) Schattenlehre. (Methode Hittenkofer Nr. 10.) 4. Aufl. Mit 45 Abbildgn. in der Beschreibg. — Unterweisungen und Aufgaben. Lex. 8°. 25 S. Strelitz, Hittenkofer. M. 1.80. — 16 Übungsblätter dazu, gr. 4°. M. 4.80.

Geschichte.

Cantor, Mor., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Bd. 3. Abtlg. Abschn. XVIII. (1725—1758). Mit 72 Textfig. 2. Aufl. gr. 8°. X, S. 493—923. Leipzig, Teubner. M. 12.40.

Hoppe, Edm., Zur Geschichte der Fernwirkung. Progr. gr. 4°, 26 S. Hamburg, Herold. M. 2.

Mechanik.

Appell, P., Traité de mécanique rationelle. T. III: Equilibre et mouvement des milieux continus (Premier fascicule). Paris, Gauthier-Villars. Prix du volume complet pour les souscripteurs. Fr. 15.

Breggen, J van der, Leerboek der mechanica. Met vele opgeloste vraagstukken en opgaven. Gr. 8°. 8 en 192 blz. m. 120 fig. Groningen, Noordhoff. F. 2.25.

Föppl, Aug., Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'élasticité, traduit de l'allemand par E. Hahn. Gr. in-8° avec 74 figures. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.

Fritsch, H., Eulers Darstellung der Undurchdringlichkeit als Quelle von Kräften weitergeführt. Progr. Königsberg i. Pr. 4°. 16 S.

Keck, W., Fragen über die wichtigsten Gegenstände aus dem Gebiete der Mechanik. 4. Aufl. gr. 8°. 16 S. Hannover, Helwing. M. —.50.

Koechlin, René, Formeln und Tabellen zum Gebrauche bei der Berechnung von Konstruktionsteilen auf Zug, Druck (Knicken) und Biegung. Schmal gr. 8°. V, 97 S. m. Fig. Zürich, Rascher. geb. in Leinw. M. 4.80.

Koechlin, René, Formules et tableaux pour le calcul de pièces de construction, à la traction, à la compression (flambage) et à la flexion. In-8°. Paris, Béranger. Cart. Fr. 6.50.

Müller-Breslau, Heinr. F. B., Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 3. Aufl. 1. Bd. gr. 8°. VIII, 554 S. m. 541 Textfig. u. 7 lith. Taf. Leipzig, Baumgärtner. M. 18, geb. M. 20.

Pasquier, Ernest, Cours de mécanique analytique. T. I. Vecteurs. Cinématique; statique et dynamique du point. In-8°. Louvain, Uystpruyst. Fr. 10.

Platner, Gust., Die Mechanik der Atome. gr. 8°. IV, 97 S. Berlin, Krayn. M. 2.50.

Résal, Jean, Stabilité des constructions. Cours de l'école des ponts et chaussées. Gr. in-8° avec 242 fig. Paris, Baudry. Fr. 20.

Schubert, Herm., Theorie des Schlickschen Massen-Ausgleichs bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen. gr. 8°. 132 S. m. Fig. Leipzig, Göschen. M. 12.

Schulze, P., Über asymmetrische Schwingungen um eine Lage stabilen Gleichgewichts. Diss. Greifswald. 8°. 97 S. m. 21 Fig.

Vierendeel, A., Cours de stabilité des constructions. T. IV. Charpentes articulées. Gr. in-8° avec fig. et 1 pl. Paris, Ve Dunod. Fr. 3.75

Zimmermann, Über Raumfachwerke. Neue Formen und Berechnungsweisen für Kuppeln und sonstige Dachbauten. gr. 8°. VI, 93 S. m. Abb. Berlin, Ernst & Sohn. M. 8, geb. in Leinw. M. 9.

Physik.

Boussinesq, J., Théorie analytique de la chaleur. Mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. T. I. (Aura 2 volumes.) Problèmes généraux. Gr. in-8° avec 14 fig. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 10.

Fortschritte, die, der Physik im J. 1900. Dargestellt von der deutschen physikal. Gesellschaft. 56. Jahrg. 3. Abt. Kosmische Physik gr. 8°. XLVIII, 472 S. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 18.

Dasselbe, 56. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. gr. 8°. XXXVI, 357 S. Ebenda. M. 15.

Gages, L., Traité d'électricité. T. I. (Aura 3 Volumes.) Gr. in-8° avec 142 fig. Paris, Desforges. Fr. 8.

Griffiths, E. H., The thermal measurement of energy. Lectures delivered at the Philosophical Hall, Leeds. Cr. 8vo, pp. 135. Cambridge, Univ. Press. 2 s.

Krüger, J., Über den Einfluſs der Temperatur auf die Wärmeleitung von Gläsern. Diss. Jena. 8°. 44 S. m. 5 Fig.

Matuschek, J., Praktische und theoretische Bedeutung der Studien über niedere und extrem niedere Temperaturen. Progr. Trautenau. 8°. 19 S. m. 6 Fig.

Pellat, H., Cours d'Électricité (Cours de la Faculté des sciences de Paris). T. I: Electrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité. Gr. in-8° avec 145 fig. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 10.

Plessen, K. v., Über den Einfluſs suspendierter Teilchen auf den Auftrieb einer Flüssigkeit. Diss. Greifswald. 8°. 40 S.

Puschl, K., Über das Wesen der Wärme. Progr. Seitenstetten. 8°. 9 S.

Robin, G., Oeuvres scientifiques, réunis et publiées sous les auspices du ministère de l'instruction publique par Louis Raffy. Physique. In-8° en 2 fascicules. Paris, Gauthier-Villars. Physique mathématique. Fr. 5. Thermodynamique générale. Fr. 9.

Thompson, Sylvanus P., Courants polyphasés et alternomoteurs. Traduction par E. Boistel. 2e éd. Gr. in-8° avec 359 fig. Paris, Bérenger. Rel. Fr. 25.

Weber, Heinr., Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in 4 Aufl. neu bearb. II. (Schluſs) Bd. gr. 8°. XI, 527 S. m. Abb. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 10, geb. in Halbfrz. M. 11.60.

Tafeln.

Greve, Emil, Vierstellige logarithmische u. trigonometrische Tafeln, nebst mathematischen u. naturwissenschaftlichen Hilfstafeln. Schmal gr. 8°. XII, 178 S. Glogau, Flemming. Geb. in Leinw. M. 2.50

Pitz, H., Vierstellige Logarithmentafeln. 3. Aufl. gr. 16°. 18 u. 2 S. Gieſsen 1902, Roth. M. —.40.

Riem's Rechentabellen für Multiplikation. 2. Aufl. Lex. 8°. VIII S. u. 99 Doppels. München, Reinhardt. M. 6, geb. M. 7.50.

Scherer, Zweistellige Multiplikationstafel zum Gebrauch im Bureau, Comtoir u. s. w. Fol. (4 Bl.). Kassel (Königsthor 23, II). Selbstverlag. Auf Leinw. M. 2.

Souillagouet, F., Tables du point auxiliaire pour trouver rapidement la hauteur et l'azimut estimés, suivies d'un recueil nouveau de tables nautiques. In-8°. Toulouse, Privat. Fr. 12.

Verschiedenes.

Bigourdan, G., Le système métrique des poids et mesures, son établissement et sa propagation graduelle. Petit in-8°. 17 fig. et 10 pl. ou portr. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 10.

Jahrbuch üb. die Fortschritte der Mathematik. 30. Bd. Jahrg. 1899. 1. Hft. gr. 8°. 432 S. Berlin, Reimer. M. 13.60.

Müller, Fel., Mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enth. die Kunstausdrücke aus der reinen u. angewandten Mathematik. 2. Hälfte. Lex. 8°. IX—XIV, S. 133—315. Leipzig, Teubner. M. 11 (vollständig in 1 Leinw.-Bd. M. 20).

Répertoire bibliographique des sciences mathématiques, 10e série. In-32. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2.

Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik, die im Jahre 1900 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Zusammengestellt von E. Wölffing in Stuttgart.

Abkürzungen für die Titel der ausgezogenen Zeitschriften.

A.B. (Wiener) Allgemeine Bauzeitung, Jahrgang 65.
A.E.R.J. American Engine and Railroad Journal, vol. 74.
A.G.B. (Glasers) Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Band 46 und 47.
Am.M. American Maschinist vol. 23.
A.P.Ch. Annales des ponts et chaussées, série 10. année.
B. The Builder, vol. 77 und 78.
C.B. Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 20.
D.B. Deutsche Bauzeitung, Jahrgang 34.
Eg. Engineering vol. 69 und vol. 70.
G.I. Gesundheitsingenieur, Jahrgang 23.
J.G.W. (Schillings) Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Jahrgang 43.
M.I.C. Mémoires de la Société des Ingénieurs Civiles de France, 1900.
O.F.E. Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 55.
P.J. (Dinglers) Polytechnisches Journal, Band 315.
Schw.B. Schweizerische Bauzeitung, Band 35 und 36.
T.B. Technische Blätter, Jahrgang 31, Heft 4; Jahrgang 32, Heft 1—3.
V.V.G. Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleifs, Jahrgang 79.
Z.A.I. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Hannover, Heftausgabe, Band 46.
Z.B. Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 50.
Z.E. Zeitschrift für Elektrochemie, Band 6.
Z.G. Zeitschrift für Gewässerkunde, Band 3.
Z.K. Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie, Jahrgang 7.
Z.Ö.I.A.V. Zeitschrift des österreich. Ingenieur- und Architektenvereins, Jahrgang 52.
Z.V.D.I. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Band 44.
Z.W. Zeitschrift für Werkzeugmaschinen, Band 4.

Aerodynamik.

1. *R. Kotfahl.* Winddruck. Z.V.D.I. 44. 1021.

2. *F. Heinz.* Grundlagen der Fluglehre. P.J. 315. 207; 223.

Arithmetik, politische.

3. *A. Rühle von Lilienstern.* Zur Bestimmung der Beförderungskosten im Eisenbahnbetriebe. Z.A.I. (2) 5. 209.

Dynamik.

4. *Schubert.* Formeln für Stöfse von Blechträgern. C.B. 20. 279.

5. *V. Fischer.* Die Dampfmaschine als monocyclisches System behandelt. P.J. 315. 485.

6. *O. Schlick.* The balancing of steam engines Eg. 69. 472; 531.

7. *J. Macfarlane Gray.* Graphic method of balancing marine engines. Eg. 69. 487.

8. *Lorenz*. The unformity of turning moments of marine engines. Eg. 69. 503; 529.

9. *E. Braufs*. Rotierende Maschinenteile. Z.K. 7. 231.

10. *F. Göpel*. Die Bestimmung des Ungleichförmigkeitsgrads rotierender Maschinen durch das Stimmgabelverfahren. Z.V.D.I. 44. 1359; 1431.

11. *M. Enfslin*. Zur Frage der Spannungsverhältnisse in einem rotierenden Schleifstein. Z. V. D. I. 44. 1577.

12. *A. L. de Leeuw*. Some points about cutting spiral gears. Am. M. 23. 30.

13. *H. Hefs*. Planer countershaft location. Am.M. 23. 477.

14. *A. L. de Leeuw*. Planer countershafts. Am. M. 23. 637.

15. *Wittfeld*. Über wirtschaftlich vorteilhafteste Lokomotiven. C.B. 20. 205.

16. *F. J. Cole*. Locomotive design. A.E.R.J. 74. 307.

17. *Pforr*. Bewegungsverhältnisse von Eisenbahnzügen. C.B. 20. 46.

18. *C. Schlüfs*. Über den Wirkungsgrad der Spindelbremsen von Eisenbahnfahrzeugen. Z.Ö.I.A.V. 52. 225.

19. *E. Lang*. Einschaltung einer Weiche mit gekrümmtem Hauptgeleise in einen Kreisbogen. O.F.E. (2) 37. 8; 32.

20. *R. Petersen*. Über die Gesetze, welche der Fahrgeschwindigkeit auf Eisenbahnen durch die Fliehkraft in Bahnkrümmungen gesetzt werden. O.F.E. (2) 37. 155.

21. *W. Ritter*. Die Richtersweiler Holzriese. Schw.B. 35. 199; 213.

22. *C. J. Kriemler*. Die Umlegung eines Kamins. Schw.B. 36. 250.

Elastizitäts- und Festigkeitslehre.

23. *J. Kübler*. Die richtige Knickformel. Z.V.D.I. 44. 82; 738. — *Kriemler*. 1132.

24. *J. Kübler*. Die richtige Knickformel. D.B. 34. 58; 368. — *Kriemler*. 611.

25. *A. Francke*. Einiges über Knickspannungen. Z.A.I. (2) 5. 239.

26. *Harel de la Noë*. Déformations et conditions de la rupture dans les corps solides. A.P. et Ch. (7) X B. 180.

27. *O. Mohr*. Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materiales? Z.V D. I. 44. 1524; 1572.

28. *E. Grafstrom*. Fibre stresses due to impact. A.E.R.J. 74. 17.

29. *K. Hager*. Die Spannungsverteilung in elastischem Material D.B. 34. 130.

30. —. Criterions in strength. Eg. 70. 241.

31. —. Details of structural iron and steel. B. 78. 18; 41; 65; 89; 118; 171; 191; 218; 244; 269; 295; 324; 349; 379; 404; 424; 447; 470; 495; 523; 546; 569; 591; 619; 649.

32. *W. Schüle*. Festigkeit und Elastizität gewölbter Platten. P.J. 315. 661.

33. *F. Rofskothen*. Die rechnerische Ermittlung der Spannungsgrenzlinie in Mauerquerschnitten bei Ausschlufs von Zugspannungen. C.B. 20. 242.

34. *M. Grübler*. Ringspannungen und Zugfestigkeit. Z.V.D.I. 44. 1157.

35. *F. Leitzmann*. Eine Aufgabe aus der Stofselastizität und -Festigkeit. Z.V. D.I. 44. 417; 514.

36. *R. A. Bruce*. Flat springs. Am.M. 23. 688.

37. *E. Grafstrom*. Graphical treatment of helical springs. A.E.R.J. 74. 86.

38. *A. Francke*. Einiges über Stabbiegung. C.B. 20. 485.

39. *O. Kalda*. Über die Durchbiegung einfacher Träger. T.B. 32. 70.

40. *Ramisch*. Ermittelung der Gleichungen der elastischen Linien eines auf 2 Stützpunkten ruhenden und mit Einzellasten versehenen Trägers von überall gleichem Querschnitte. Z.Ö.I A.V. 52. 91.

41. *Ramisch*. Neue Bestimmung der Spannkräfte in den Stäben eines besonderen Trägers. C.B. 20. 106.

42. *A. Francke*. Zeichnerische Darstellung der elastischen Durchbiegung der Bogenträger. Z.B. 50. 289.

43. *A. Vierendeel*. Théorie générale des poutres élastiques. M. I. C. 53. II. 163.

44. *C. F. Blake*. The strength of I-beam girders. Am.M. 23. 959.

45. *Camerer*. Beiträge zur Schraubenrechnung. Z.V.D.I. 44. 1063.

46. *P. Rey*. Charpentes métalliques de la salle des fêtes de l'exposition de 1900. M.I.C. 53 II. 449.

47. *A. Bantlin*. Zur Beurteilung von Expansionsschiebersteuerungen. Z.V D.I. 44. 868.

48. *G. Huguenin*. Untersuchung der Knickfestigkeit von Kolbenstangen. Schw. B. 35. 85.

49. *R. Schanzer*. Propellor shafts. Eg. 69. 536.

50. *Pregél*. Der gespannte Hohlzylinder. P.J. 315. 453; 476.

51. *A. Petterson*. Cylinders under internal pressure. Am. M. 23. 159.

52. *W. Schüle*. Über die Beanspruchung von Schleifsteinen durch die Zentrifugalkraft. P.J. 315. 37.

53. —. Der Einfluſs der Eiseneinlagen auf die Eigenschaften des Mörtels und Betons. Schw.B. 35. 235.

54. *J. Roſshändler*. Anwendung und Theorie der Betoneisenkonstruktionen. Schw.B. 36. 93; 101; 109; 129.

55. *R. Musiol*. Das Ziehen auf Ziehpressen in Theorie und Praxis. P.J. 315. 428.

56. *G. Mantel*. Die Standfestigkeit von Brücken auf Pendelsäulen. C.B. 20. 289. — *W. Cauer* 412.

57. *C. Bach*. Über die Proportionalität zwischen Dehnungen und Spannungen bei Sandstein. Z.V.D.I. 44. 1169.

58. *A. Ehrlich*. Die Förderung mit Treibscheibe. Z.V.D.I. 44. 675.

59. *A. Francke*. Der Einfluſs wagerechter Seitenkräfte auf die Veränderung der Spurweite des eisernen Querschwellenoberbaus. O.F.E. (2) 37. 302.

60. *A. Francke*. Einige Rechnungsformeln für die eiserne Querschnittschwelle. O.F.E. (2) 37. 89.

61. *A. Francke*. Der Einfluſs unsymmetrischer Belastung der Querschwelle. O.F.E. (2) 37. 228.

62. *H. Herrmann*. Über den Bau langer Wagenwände. O.F.E. (2) 37. 55; 79.

63. *W. Conradt*. Beitrag zur Festigkeitsberechnung der Kesselwände. Z.Ö. I.A.V. 52. 663. 697.

64. *G. Barkhausen*. Neuere Formen von Flüssigkeitsbehältern. Z.V.D.I. 44. 1594; 1681.

65. *G. Cadart*. Note sur les calculs de résistance d'une carcasse de porte d'écluse. A.P. et Ch. (7)X. C. 267.

Elektrizität und Magnetismus; Elektrotechnik.

66. *R. Mewes*. Das Dopplersche Prinzip und das elektrodynamische Grundgesetz Webers. P.J. 315. 295.

67. *R. Mewes*. Die Faraday-Maxwellsche Theorie im Lichte der Sellmeier-Helmholtzschen Absorptionstheorie. P.J. 315. 456.

68. *R. Mewes*. Beitrag zur Erklärung des Ohmschen Gesetzes. P.J. 315. 501; 520.

69. *Fleming*. Electric oscillations. Eg. 70. 772.

70. *C. Heinke*. Über Wellenstromenergie. V.V.G. 79. 115.

71. *W. Duddell*. The direct current arc. Eg. 70. 799; 848.

72. *M. H. F. Parshall* and *H. M. Hobart*. Design of alternators. Eg. 70. 107; 141; 227; 464; 485; 591; 815.

73. *B. v. Michelis*. Die elektrischen Akkumulatoren. J.G.W. 43. 91; 111; 192; 576; 595.

74. *K. Norden*. Über eine Methode zur Bestimmung der wahren Oberflächen von Akkumulatorplatten. Z.E. 6. 397.

75. *R. Mewes*. Der Erdinduktor von Wilhelm Weber; seine Theorie und Anwendung. P.J. 315. 576.

76. —. Lessons in modern electrical engineering. B. 79. 5; 14; 38; 57; 111; 135; 157; 178; 197; 215; 237; 255; 274; 295; 323; 346; 369; 395; 422; 447; 467; 493; 521; 546; 572; 592; 594.

77. *O. Lasche*. Elektrischer Antrieb von Walzwerken. Z.W. 4. 187.

78. *O. Schaefer*. Berechnung elektrischer Maschinen mit Hilfe graphischer Methoden. P.J. 315. 175.

79. *Pforr*. Ob auf Stadtbahnen der elektrische Betrieb eingeführt werden muſs. A.G.B. 46. 92; 145.

80. *Pforr*. Der elektrische Betrieb auf der Berliner Stadt- und Ringbahn. A.G.B. 47. 242.

81. *H. Danneel*. Chemisches Gleichgewicht und elektromotorische Kraft. Z.E. 6. 293.

82. *H. Casewitz*. La télégraphie sous-marine en France. M.I.C. 53 I. B. 365.

Erddruck.

83. *A. Francke*. Die Gleitfläche des Erddruckprismas und der Erddruck. Z.A.I. (2) 5. 247.

84. *A. Francke*. Einiges über Fundamente. Schw.B. 35. 145.

85. *H. Seymat*. Pose de la voie. Comparaison des divers modes de travail utilisée à ce jour. M.I.C. 53 II. 676.

Fehlerrechnung.

86. *S. Wellisch*. Die Genauigkeitsbestimmung eines Planes. Z.Ö.I.A.V. 52. 735.

Geometrie.

87. *B. Vogel.* Finding the radius. Am.M. 23. 797. — *G. R. Easy* 892. — *G. A. Goodfellow* 913. — *B. Vogel* 982. — *H. W. Halbaum* 1027.

88. *J. Horsfall.* The circle squaring. Eg. 69. 263. — *A. S. E. Ackermann* 331. — *C. Pain* 362.

89. *F. O. Hunt.* Laying out angles. Am.M. 23. 311.

90. *D. A. Low.* Construction of the curve $PV^n = C$. Am.M. 23. 524. — *G. A. H.* 591.

Graphische Verfahren.

91. *A. S. Österreicher.* Graphische Bestimmung des Flächeninhaltes von unregelmäfsigen Figuren. Z.V.D.I. 44. 155.

92. *F. H. Hummel.* Graphical construction in engineering. Eg. 69. 601.

93. *J. Macfarlane Gray.* Graphic method of balancing marine engines. Am.M. 23. 592.

Hydrodynamik, Hydraulik, Hydrologie.

94. *H. S. Hele-Shaw.* The pressure on an inclined plane with special reference to balance rudders. Eg. 69. 507.

95. *H. S. Hele-Shaw.* Pressure due to flow round submerged surfaces. Eg. 70. 65.

96. *H. Gravelius.* Die mittlere Abflufsmenge. Z.G. 3. 212.

97. *H. Gravelius.* Herrn Bazins neue Untersuchungen über den Abflufs an Überfällen. Z.G. 3. 162.

98. *E. Beyerhaus.* Die Bewegungsart des Wassers in Stromkrümmungen. C.B. 20. 611.

99. *Fargue.* Hydraulique fluminale. A.P. et Ch. (7) XA. 106.

100. *Vautier.* Hydraulique des cours d'eau. A.P. et Ch. (7) XC. 207.

101. *C. K. Aird.* Über den Begriff eines hydraulischen Momentes der Kanalquerschnitte. Z.I.A. (2) 5. 401.

102. *Bourdelles.* Étude sur le régime de la marée dans les estuaries et dans les fleuves. A.P. et Ch. (7) XC. 5.

103. *Rother.* Über Fortschritte in der Verwendung Woltmannscher Flügel in der Wassermessung. J.G.W. 43. 735.

104. *H. Gravelius.* Untersuchungen über die Veränderlichkeit und sekulare Variation der hydrologischen Elemente. Z.G. 3. 27; 92.

105. *H. Gravelius.* Die Wassermenge der Donau bei Wien. Z.G. 3. 200.

106. *H. Gravelius.* Die Wassermenge der Wolga bei Ssamara. Z.G. 3. 292.

107. *H. Gravelius.* Wassermengenmessung in Ungarn. Z.G. 3. 307.

108. *G. Russo.* The rolling of ships on waves. Eg. 69. 442; 493.

109. *J. H. Biles.* On large cargo steamers. Eg. 69. 763.

110. *G. H. Bryan.* The action of bilge keels. Eg. 69. 729.

111. *A. Jöhrens.* Über die Beanspruchung langer schwimmender Landungsanlagen. Z. A. I. (2) 5. 51. — *A. Francke* 249.

Inhalte.

112. *A. Coulmas.* Die Ermittelung von Querschnittsinhalten von Bahnkörpern. C.B. 20. 89.

113. *E. Puller.* Ermittelung der Querschnittinhalte bei Bahnkörpern. C.B. 20. 403.

114. *R. Selle.* Ein Erdmassenmafsstab. C.B. 20. 202.

Instrumentenkunde.

115. —. Michelsons Echelon spectroscope. Eg. 69. 239.

Kinematik.

116. *J. B. Peddle.* Straight line motions. Am.M. 23. 245.

117. *R. A. Bruce.* Designing spiral wheels for given centers. Am.M. 23. 345.

118. *A. Ernst.* Eingriffsverhältnisse der Schneckengetriebe mit Evolventen- und Zykloidenverzahnung und ihr Einflufs auf die Lebensdauer der Triebwerke. Z.V.D.I. 44. 1313; 1423; 1466.—*M. Rother* 1474.

119. *O. Herre.* Das exzentrische Kreisradgetriebe für ein Umdrehungsverhältnis 1 : 2. P.J. 315. 359.

120. *J. B. Taylor.* Analysis of the cams of the geometric boring tool. Am.M. 23. 565.

Näherungsrechnung.

121. *J. B. Goebel.* Über Näherungsgleichungen und deren Anwendung bei technischen Rechnungen. G.I. 23. 88.

Nautik.

122. *M. Geitel.* Die konstruktive Entwicklung der Seefeuer. A.G.B. 47. 22; 45.

Perspektive.

123. *F. Meisel.* Perspektivische Abbildung der auf einer normalen Cylinderfläche liegenden Kreise auf einer der Cylinderaxe parallelen Ebene. D.B. 34. 447.

Prinzipien der math. Physik.

124. *R. Mewes.* Die Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen mittels des Popplerschen Prinzips. P.J. 315. 637.

Rechnen, numerisches.

125. *R. Mewes.* Die Doms'sche Rechenmethode im Vergleich zu andern Hilfsmitteln des Rechnens. P.J. 315. 547.

Reibung.

126. *J. Hammer.* Untersuchung von Fahrrädern. P.J. 315. 317.

127. *G. Dettmar.* Neue Versuche über Lagerreibung nebst neuer Berechnungsmethode derselben. P.J. 315. 88.

Schwerpunkte.

128. *F. H. Hummel.* Graphical constructions for finding the center of gravity and moment of inertia of irregular sections. Am.M. 23. 720.

Statik.

129. *J. Melan.* Zur Bestimmung der Spannungen in den durch einen geraden Balken mit Mittelgelenk versteiften Hängeträgern. Z.Ö.I.A.V. 52. 553.

130. *Ramisch.* Beitrag zur Theorie des einfachen Fachwerkbalkens. Z.Ö.I.A.V. 52. 712.

131. *Ramisch.* Entwicklung und Grundgleichungen eines Trägers überall gleichen Querschnitts auf beliebig vielen Stützen nach einem neuen Verfahren. Z.Ö.I.A.V. 52. 649.

132. *F. Steiner.* Direkte Konstruktion der Einflufslinie für die Momente und Querkräfte eines durchlaufenden (kontinuierlichen) Trägers. T.B. 31. 166.

133. *A. Francke.* Kontinuierliche Spitzbogenträger. Z.I.A. (2) 5. 417.

134. *A. Francke.* Der Spitzbogenträger mit frei drehbaren Kämpfergelenken. Z.Ö.I.A.V. 52. 773.

135. *Ramisch.* Kinematische Begründung der Theorie der statisch unbestimmten Fachwerkträger und Beiträge zu derselben. Z.I.A. (2) 5. 427.

136. *F. Engesser.* Über den Einflufs der Nebenspannungen auf die Durchbiegung der Fachwerkträger. Z.I.A. (2) 5. 533.

137. *Ramisch.* Über die Ermittlung der Spannkräfte in den Gegendiagonalen eines einfachen Fachwerkträgers. Z.A.I. (2) 5. 65.

138. *W. Cauer.* Zur Berechnung von Gitterbalkenträgern mit gekrümmten Gurten. C.B. 20. 115.

139. *L. Geusen.* Zeichnerische Bestimmung der Stützmomente kontinuierlicher Träger von konstantem Trägheitsmoment. Z.Ö.I.A.V. 52. 69.

140. *Ramisch.* Statische Untersuchung eines eigentümlichen Trägers. Z.Ö.I.A.V. 52. 611.

141. *M. R. v. Thullie.* Berechnung der Betoneisenträger mit oberen Rippen. Z.Ö.I.A. V. 52. 133.

142. *L. Geusen.* Die Berechnung der Binder und Ständer eiserner Wandfachwerke. Z.V.D.I. 44. 625; 708.

143. *F. Jasinski.* Graphische Methode zur Berechnung des flachen Fufsrings räumlicher Fachwerke. Schw.B. 35. 189.

144. *E. Braufs.* Die Berechnung der Feuerungen. G.I. 23. 17.

145. *Puller.* Ermittlung vorteilhaftester Stützmauerquerschnitte. Z.I.A. (2) 5. 505.

146. *Gamann.* Berechnung der Leibung und des Inhalts eines Kreuz- oder Klostergewölbes. C.B. 20. 376.

147. *H.* Beanspruchung schief gewölbter Bogen. D.B. 34. 635.

148. *Legay.* Mémoire sur le tracé et le calcul des voûtes en maçonnerie. A.P. et Ch. (7) XD. 141.

149. *K. Bernhard.* Die Linienführung grofser Eisenbogen. C.B. 20. 257.

150. *A. Francke.* Einiges über Grundbogen. Schw.B. 36. 71.

151. *E. Lebert.* Étude de courbes pouvant servir au tracé de l'axe neutre des arcs de grandes portées. A.P. et Ch. (7) XD. 74.

152. *Mörsch.* Bestimmung der Stärke von Brückengewölben mit drei Gelenken. Z.A.I. (2) 5. 177.

153. *Mörsch.* Nebenspannungen in Brückengewölben mit drei Gelenken. Z.A.I. (2) 5. 193.

154. *W. Cauer.* Bewegliche Brückenlager mit einer Rolle oder einem Pendel. Z.V.D.I. 44. 917. — *Kübler* 919.

155. *Kübler.* Das einfache Pendel als Ersatz für das Rollenkipplager. Z.V.D.I. 44. 216.

156. *F. Engesser.* Über die Beanspruchung des Baugrundes bei den Widerlagern von Bogenbrücken. C. B. 20. 308.

157. *C. J. Kriemler.* Les efforts dans les cadres transversaux des ponts tubulaires. Schw. B. 35. 274.

158. *Gisclard.* Note sur un nouveau type de pont suspendu rigide. A. P. et Ch. (7) XC. 297.

159. *W. Weingärtner.* Konstruktion der Kaiser-Franz-Joseph-Kettenbrücke in Prag. A. B. 65. 4.

160. *E. Fleischmann.* Die neue Strafsenbrücke über den Main bei Miltenberg. Z. B. 50. 217.

161. *H. Müller-Breslau.* Der Kaisersteg über die Spree bei Oberschöneweide. Z. B. 50. 65.

162. *Résal et Alby.* Construction du pont Alexandre III. A. P. Ch. (7) X A. 232.

Wärmelehre.

163. *Holzmüller.* Die Sonne und die Erklärung ihrer Wärme. Z. V. D. I. 44. 441.

164. *Holzmüller.* Das Wesen der Wärme. Z. V. D. I. 44. 1080.

165. *R. Mewes.* Über die Grundlagen der mechanischen Wärmetheorie. P. J. 315. 347.

166. *R. Mewes.* Übereinstimmung der Spannungs-, Volumen- und Temperaturgesetze der Stoffe mit den Absorptions- beziehungsweise Emissionsgesetzen der Ätherschwingungen. V. V. G. 79. 197.

167. *Pickersgill.* Beitrag zur technischen Thermodynamik. P. J. 315. 64.

168. *H. Strache* u. *R. Jahoda.* Zur Theorie des Wassergasprozesses. J. G. W. 43. 354; 373; 574; 672; 694; 709; 957.

169. *O. Venator.* Über die Wärmeleitungsfähigkeit metallener Zwischenwände. Z. K. 7. 84; 104.

170. *R. Mewes.* Zurückführung des Biotschen Dampfspannungsgesetzes und des Gesetzes der korrespondierenden Siedetemperaturen auf das verbesserte Gasspannungsgesetz. P. J. 315. 424.

171. *L. C. Wolff.* Der Dampfmesser von Gehre. Z. V. D. I. 44. 1694.

172. *H. Lorenz.* Versuche an Kühlmaschinen verschiedener Systeme. Z. K. 7. 21; 61; 121.

173. *R. Mewes.* Kühlverfahren nach Siemens, Linde und Mix. V. V. G. 79. 184.

174. *R. Stetefeld.* Die Abhängigkeit des Kraft- und Kühlwasserverbrauchs der Kompressionskältemaschinen von den Kaltwassertemperaturen. Z. K. 7. 41.

175. *R. Mewes.* Die verschiedenen Kühlverfahren mittels der Kaltluftmaschine. P. J. 315. 408.

176. *R. Mewes.* Zur Theorie der verschiedenen Gasverflüssigungsverfahren mittelst der Kaltluftmaschine. Z. K. 7. 146.

177. *R. Mewes.* Theoretische Folgerungen aus den neuesten Versuchen über Sprengstoffe. V. V. G. 79. 255.

178. *R. Stetefeld.* Die Erweiterung des Temperaturgefälles der Dampfmaschinen. Z. K. 7. 6; 23.

179. *E. Meyer.* Über Kraftgas und Gichtgasmaschinen. J. G. W. 43. 805; 825; 845.

180. *D. R. Mewes.* Die Kreisprozesse der Gasmaschine. J. G. W. 43. 116.

181. *H. Lorenz.* Wärmeausnützung der Heifsluftmaschinen. Z. V. D. I. 44. 252.

182. *E. Schimanelli.* Der Bánki-Motor und die Wärmemotoren. Z. Ö. I. A. V. 52. 492; 512; 529.

183. *O. Fröhlich.* Zu den Anfragen aus dem Leserkreis. G. I. 23. 182.

184. *E. Braufs.* Die Dampfkesselfeuerungen und ihre Einregulierungen. Z. K. 7. 107.

185. *L. Holborn* und *W. Dittenberger.* Über den Wärmedurchgang durch Heizflächen. Z. V. D. I. 44. 1724.

186. *H. Krug.* Die Rohrweiten der Niederdruckdampfheizung. G. I. 23. 289.

Zeichenwerkzeuge.

187. *U. Peters.* Compas for drawing arcs of large radius. Am. M. 23. 273.

188. *R. A. Bruce.* Geometrical construction of the logarithmic scale. Am. M. 23. 900.

ABHANDLUNGEN ZUR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.
BEGRÜNDET VON MORITZ CANTOR. XI. HEFT.

EUCLID

UND DIE SECHS PLANIMETRISCHEN BÜCHER.

MIT BENUTZUNG DER TEXTAUSGABE VON HEIBERG.

VON

DR. MAX SIMON
STRASSBURG I. ELS.

MIT 192 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Mitteilung.

Von dem vorliegenden Hefte ab werden die von Moritz Cantor begründeten Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften nicht mehr als Supplement zur Schlömilch'schen Zeitschrift für Mathematik und Physik, die von 1901 ab lediglich als Organ für angewandte Mathematik dienen wird, herausgegeben, sondern erscheinen als selbständiges Unternehmen.

Die unterzeichnete Verlagsbuchhandlung bittet die Herren Fachgelehrten um freundliche weitere Unterstützung dieser Abhandlungen durch Einsendung geeigneter Beiträge. Umfangreichere Arbeiten werden wie bisher Hefte für sich bilden, während kleinere Beiträge in Sammelbänden vereinigt werden.

Leipzig.

B. G. Teubner.

JOHANNA SIMON

GEB. BURG

IN TREUER LIEBE GEWIDMET.

Vorwort.

Da ich nun einmal in Baumeister's Handbuch der Erziehungs- und Unterrichtslehre die Mathematik bearbeitet habe, — wenngleich, wie mein hochverehrter früherer Chef bezeugen wird, ich hier, wenigstens für die Realschulen, erst eingetreten bin, nachdem eine Reihe anderer, ich nenne Bertram und Lampe, abgelehnt hatten — so erfordert es die Konsequenz, dafs ich gewissermafsen als Fortsetzung und Abschlufs meiner Methodik und Didaktik die Lehrer auf den erhabenen Meister aller mathematischen Pädagogik hinweise, der, in Deutschland wenigstens, in eine ganz unverdiente Vergessenheit geraten ist. Man mag über die verschiedenen Arten der 9-klassigen Lehranstalten und ihre Berechtigungen denken, wie man will, und ebenso über die Notwendigkeit des griechischen Unterrichts und der Verba auf μι in den höheren Schulen, aber ein Unterricht an irgend einer dieser Anstalten, der nicht ganz und gar von hellenischem Geist durchtränkt ist, ist für die Geistes- und Herzensbildung keinen Schufs Pulver wert. Und das gilt ganz besonders für die Mathematik, die ja jetzt auch noch die philosophische Propädeutik ersetzen mufs, wenn sich auch, wie ich erst vor kurzem ausgesprochen, zur Zeit die Neigung zeigt, die Mathematik nicht etwa von dem „praktischen“ Standpunkt des Architekten und Ingenieurs, sondern von dem noch praktischeren des Maurerpoliers und Zimmergesellen zu betreiben. Da wird die Trigonometrie zerrissen und auf drei verschiedene Klassen verteilt, der Binom auf ganze Potenzen, wo er zwecklos ist, beschränkt; da wird in der Kl. II den Schülern ein buntscheckiges Sammelsurium von Brocken vorgeworfen, der Untersekundaner wird auf Logarithmenaufschlagen dressiert, und der gymnasiale Primaner soll mit Storchschnabel und Rechenschieber handwerkern.

Von einem wirklichen Einblick in den Zusammenhang der Elementarmathematik kann und soll nicht die Rede sein. In den Real- und noch mehr in den Oberrealschulen, am meisten aber in dem berühmten sogen. Reform-Gymnasium wird gerade den jüngern Schülern der für Knaben so schwer verdauliche Stoff in einer Fülle zugeführt, die bei der grofsen Menge nur Ekel erzeugen kann. Vier Stunden reiner Mathematik in allen Klassen aller höheren Lehranstalten sind nötig, aber auch hinreichend.

Nach mehr als dreifsigjähriger Lehrthätigkeit kann ich nur sagen, es giebt für die Geometrie, wenn ein propädeutischer Unterricht in der Quarta vorausgegangen ist, keinen besseren Lehrgang als den des Euclid, wenn der Lehrer den Einblick in den so durchsichtigen als einfachen Aufbau der Elemente sich angeeignet hat, und den Schülern diesen Aufbau genetisch klar machen kann.

Was die Herausgabe selbst betrifft, so habe ich die Definitionen, Petita, Axiome so wörtlich als möglich übersetzt; Zusätze meinerseits durch eckige Klammern gekennzeichnet und unübersetztes aus dem Euclid durch runde. Von den Beweisen und Konstruktionen sind nur die wichtigsten wortgetreu. Die Breite der Darstellung, welche bei Euclid angebracht ist, da es sich um ein Kollegienheft zum mündlichen Vortrag handelt, wobei die Wiederholung des Resultats nötig, ist beim Druck, um mit Saccheri zu reden, ein Makel, und ich glaubte, wie schon Lorenz und Mollweide gethan, den Euclid „von jedem Makel befreit“ edieren zu sollen. Soviel wie möglich habe ich für das erste Buch Proclus ausgenutzt, es stand mir aufser dem griech. Text von Friedlein nur die lat. Übersetzung des Barocci von 1560 zu Gebote, die gerade in allen kritischen Fällen nur Worte giebt.

Sollte diese Herausgabe die Lehrerwelt, die der Hochschulen eingeschlossen, für das Studium des Euclid und der griech. Geometrie interessieren, so wäre ihr Zweck erreicht.

Strafsburg, 30. Juni 1900.

Max Simon.

Inhaltsübersicht.

§ 1.

Biographisches.

Von dem Verfasser des Werkes, das unter allen mathematischen Schriften auf das Geistesleben der Menschheit den weitaus gröfsten Einflufs gehabt, ist nicht einmal der Ort und die Zeit seiner Geburt und seines Todes bekannt. Seinen Zeitgenossen und der nächstfolgenden Generation war Euclid schlechtweg der „Stoicheiótes", der Verfasser der Elemente, und bald ging die Kunde seiner Personalien verloren. Viele Jahrhunderte hindurch ist er mit dem Philosophen Euclid von Megara verwechselt worden, der nach dem Tode des Sokrates dessen Schule zusammenhielt, und dieser Irrtum findet sich schon bei Valerius Maximus um 30 n. Chr. und ist dort aus einer falschen Auffassung einer Stelle bei Geminus (im Proclus Friedl. S. 68) entstanden.

Das Wenige, was wir von ihm wissen, verdanken wir einer Stelle bei Proclus, der etwa um 450 n. Chr. einen uns erhaltenen Kommentar zum 1. Buch der „Elemente" verfafste (Friedlein S. 68): „Nicht viel jünger als diese (Hermion und Philippos, der Schüler Platons) ist Euclid, der die Elemente (Stoicheia) verfafste, wobei er vieles, was von Eudoxos herrührt, in systematischen Zusammenhang brachte, vieles, was Theätet begonnen, vollendete und aufserdem vieles, was früher ohne die nötige Strenge bewiesen wurde, auf unantastbare Beweise zurückführte. Es hatte aber der Mann seine Blütezeit unter Ptolemaios dem ersten. Denn Archimedes, dessen Lebenszeit sich an die des ersten Ptolemaios anschliefst, erwähnt des Euclid [Arch. peri sph. kai ky. Heiberg I, 2 p. 14], und zwar erzählt er: Ptolemaios frug einmal den Euclid, ob es nicht einen bequemeren Weg zur Geometrie gäbe, als den durch die „Elemente". Jener aber antwortete: Zur Geometrie giebt es für Könige keinen Privatweg. Er ist also jünger als die

[unmittelbaren] Schüler des Platon und älter als Eratosthenes und Archimedes.“

Demnach ergiebt sich für Euclid etwa 300 v. Chr. als Zeit seines Mannesalters. Zur Charakterisierung des Euclid haben wir noch eine Stelle bei Stobaios, welche Heiberg (Litteraturgesch. Studien über Euc. Leipz. 1882) anführt: Jemand, der angefangen hatte, bei Euclid Geometrie zu treiben, frug, nachdem er den ersten Satz (der Elemente) gelernt hatte, was habe ich nun davon, dafs ich das gelernt habe. Euclid rief seinen Sklaven und sagte: Gieb ihm 3 Obolen, da er lernt, um Profit zu machen.

Die Stellen zeigen uns, dafs Euclid in der Tradition seines Volkes als ein hochgesinnter, rein der Wissenschaft hingegebener Mann lebte.

§ 2.

Die Schriften des Euklid aufser den Elementen.

Wir geben zunächst eine Besprechung der Schriften des Euclid, wie sie teils von Proclus, teils von Pappus, dem Verfasser der für die Hellenische Mathematik und ihre Geschichte so wichtigen Kollektaneen, erwähnt werden, und folgen dabei im wesentlichen dem dänischen Gelehrten Heiberg, von dem die letzte und zur Zeit mafsgebende Ausgabe der „Elemente“ herrührt.

Im griechischen Urtext sind erhalten: a) die Dedomena (lat. Data), Gegebenes, mit einer Vorrede des Marinus von Neapolis in Palästina, einem Schüler des Proclus. Die Echtheit des Textes wird durch die Inhaltsangabe bei Pappus (300 n. Chr.) bestätigt, welche im wesentlichen mit dem Text der Codices übereinstimmt. Die Schrift enthält 95 Sätze (Pappus 90), welche aussagen, dafs, wenn gewisse geom. Gebilde gegeben sind, andere dadurch ebenfalls gegeben sind; also eine Art geom. Funktionentheorie. Beispiele Satz 2: Wenn eine gegebene Gröfse zu einer zweiten ein gegebenes Verhältnis hat, so ist die zweite ebenfalls gegeben.

S. 33. In einem gegebenen Streifen ist durch die Winkel, welche eine Querstrecke mit den Grenzen bildet, die Länge der Querstrecke gegeben.

Dem Inhalt nach gehen die Data nicht über die „Elemente“ hinaus, doch war eine solche Zusammenstellung praktisch im hohen Grade wertvoll für die Anwendung der seit Platon sich immer mehr aus-

breitenden analytischen Methode, deren Wesen gerade darin besteht, die durch die gegebenen Stücke mitbestimmten Punkte, Linien, Figuren aufzusuchen, bis man zu einer konstruierbaren Nebenfigur gelangt. Die Data sind daher eine eng an die Elemente sich anschliefsende Anleitung zum Konstruieren nach der analytischen Methode, etwa entsprechend unserm Petersen.

Erhalten ist unter dem Titel „Phänomena" eine Schrift über Astronomie mit den Anfangsgründen der Sphärik. Die Schrift zeigt wesentliche Fortschritte gegenüber dem unmittelbaren Vorgänger, dem Autolycos. Sie beginnt mit dem Satz: „Die Erde liegt in der Mitte der Welt und vertritt in Bezug auf dieselbe die Stelle des Mittelpunktes" und schliefst mit dem 18. Satz: „Von zwei gleichen Bogen des Halbkreises zwischen dem Äquator und dem Sommerwendekreis durchwandelt der eine, beliebig genommen, in längerer Zeit die sichtbare Halbkugel, als der andere die unsichtbare." Das Wort „Horizont" stammt aus der Schrift, welche von Pappus im 6. Buch der Sammlung erläutert und ergänzt wurde (A. Nokk, deutsche Übersetzung im Programm von Freiburg i. Breisg. 1850). Heiberg hat, was schon Nokk bemerkt, eingehend bewiesen, dafs die Schrift des Euclid einen sehr wesentlichen Bestand der für unsere Sphärik grundlegenden Schrift des Theodosius (von Tripolis, etwa 100 v. Chr.) gebildet hat.

Echt Euclidisch ist auch nach der Wiederherstellung des griechischen Textes von Heiberg die Schrift „Optica", deren gewöhnlicher Text (nach Heiberg) auf ein Kollegienheft nach Theon (dem Vater der Hypatia) zurückgeht. Die Schrift gehörte zu der Sammlung, welche unter dem Titel „Mikros Astronoumenos" (der kleine Astronom) neben den „Elementen" das Rüstzeug des Astronomen bildete, ehe er an das grofse Kompendium des Ptolemaios, den Almagest (megale syntaxis) gehen konnte. Die Schrift giebt die Anfangsgründe der Perspektive. Unecht dagegen ist die andere Schrift über Optik, welche unter Euclids Namen gedruckt wurde, die Katoptrik. Heiberg macht es im hohen Grade wahrscheinlich, dafs die von Proclus unter diesem Titel erwähnte Schrift des Euclid rasch durch das bedeutendere Werk des Archimedes über den gleichen Gegenstand verdrängt wurde.

Noch über einen andern Zweig der angewandten Mathematik haben wir eine Schrift des Euclid, die Katatome kanonos, die Lehre von den musikalischen Intervallen, 20 Sätze, wissenschaftlich auf dem Standpunkte der Pythagoräer, der Erfinder des Monochords.

Die zweite musikalische Schrift, die unter dem Namen des Euclid geht, die Einleitung in die Harmonielehre (Eisagoge harmonice), rührt,

wie schon Joh. Grotius 1599 erkannte, von dem Aristoxenianer Kleionides her. —

Aus arabischen Quellen ist uns durch Dee 1563 eine Bearbeitung und durch Woepcke 1851 eine Übersetzung der von Proclus an zwei Stellen erwähnten Schrift des Euclid „über Teilungen“ (peri diaireseōn) erhalten. Die Schrift (Inhaltsangabe bei Heiberg l. c.), an zwei Stellen von Proclus erwähnt, enthielt wichtige Aufgaben über Flächenteilungen, so die noch im Unterricht stets vorkommende Teilung des Dreiecks durch Gerade von gegebener Richtung in Teile, die ein gegebenes Verhältnis haben, Teilung von Vierecken, von Kreisen, von Figuren, die von Kreisbogen und Geraden begrenzt sind. Werden auch keine andern Sätze benutzt, als solche, die in den Elementen vorkommen oder sich mühelos an die Sätze der Stoicheia anschliefsen, so zeigen sie doch Euclid als einen sehr bedeutenden Konstrukteur. Verloren sind die Schriften des Euclid, welche sich auf die eigentliche höhere Mathematik seiner Zeit bezogen. Zunächst die zwei Bücher „topoi pros epiphanaia“, Oberflächen als geometrische Orte, die Proclus und Pappus erwähnt. Was ein geometrischer Ort ist, wird schon von Proclus gerade so wie heute definiert: die Gesamtheit aller Punkte, denen ein und dieselbe bestimmte Eigenschaft (Symptom) zukommt; und jenachdem diese Gesamtheiten eine Linie oder Fläche bilden, heifsen sie Linien- oder Flächenorte. Die Schrift des Euclid scheint nach Angaben des Pappus wesentlich die Ortseigenschaften der Cylinder-Kegel- (und Kugel-)Fläche behandelt zu haben. Sie scheint in der bedeutenden Arbeit des Archimedes über Konoide und Sphäroide aufgegangen zu sein.

Mehr wissen wir von den drei Büchern „Porismata“, von denen uns durch Pappus die Inhaltsangabe erhalten ist, so dafs der grofse französische Geometer Chasles eine Rekonstruktion versucht hat. Es wäre möglich, dafs aus arabischen Manuskripten, von denen besonders in Leyden noch eine grofse Anzahl der Entzifferung harrt, eine Kritik dieser Rekonstruktion möglich wird. Das Wort „Porisma“ selbst bildet noch eine Streitfrage. Es hat zwei Bedeutungen: erstens Zusatz, so kommt es vielfach in Handschriften der Elemente vor; zweitens aber bedeutet es ein Mittelding zwischen einem gewöhnlichen Lehrsatz und einem sogenannten Ortssatz, d. h. einem Satze, der ausspricht, dafs eine bestimmte Kurve eine bestimmte Eigenschaft hat, wie z. B. der Satz: Der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten ein festes Verhältnis haben, ist der Kreis (des Apollonius), dessen Durchmesser die beiden in diesem Verhältnis zu den gegebenen harmonischen ver-

bindet. Ein Porisma wäre demzufolge in der Geometrie das Analogon dessen, was wir in der Arithmetik einen Existenzbeweis nennen, es spräche aus, dafs ein bestimmter Ort existiert, ohne ihn direkt zu konstruieren. Die Porismata bildeten vermutlich das Seitenstück für die synthetische (direkte) Konstruktionsmethode zu den Daten als Hilfsmethode für die analytische Methode (vgl. aber S. 41). Nach den Proben bei Pappus gingen sie weit über die Elemente hinaus, und mit Chasles und Zeuthen müssen wir annehmen, dafs sie die Grundlage zu der projektiven Behandlung der Kegelschnitte enthielten.

Auch über diese zur Zeit des Euclid höchste Mathematik hat Euclid geschrieben, vier Bücher konika. Ebenso wie die Elemente des Euclid die Arbeiten seiner Vorgänger benutzten und verdrängten, wurde auch diese Schrift, Zeuge ist Pappus, von dem grofsartigen Werk der acht Bücher Konika des Apollonius verdrängt, in dessen ersten vier Büchern sie vermutlich ganz Aufnahme gefunden hat. Sie wird daher auch schwerlich aus arabischen Quellen je zum Vorschein kommen, und ist, wenn sie nicht etwa zufällig, z. B. als Einwickelung einer ägyptischen Mumie, gefunden wird, hoffnungslos verloren.

Verloren ist auch eine Schrift mathem. philos. Inhalts „über Trugschlüsse" (pseudaria), nach der Aussage des Proclus zur Geistesgymnastik der Schüler bestimmt.

Diese Schüler sind, was zu wenig beachtet wurde, Studenten, reife Männer gewesen. Euclid hat den Schwerpunkt der Mathematik von Athen weg, wo er selbst bei den Schülern des Platon und Eudoxus seine Bildung holte, nach Alexandrien verlegt, Archimedes und Apollonius haben in der Euclidischen Schule gelernt. Unsere Übersicht zeigt, dafs der um die Geschichte der Mathematik so hoch verdiente Moritz Cantor mit Recht Euclid nebst jenen beiden zu den drei grofsen griechischen Mathematikern zählt, welche die Blüte hellenischer Mathematik im dritten Jahrhundert herbeiführten.

Wir wenden uns nun zu den „Elementen".

§ 3.

Die Elemente (*στοιχεῖα*).

Den 13 Büchern der Elemente des Euclides wurden schon früh zwei Bücher angehängt. Das 14. ist eine tüchtige Arbeit des in

Alexandrien etwa 150 v. Chr. lebenden Mathematikers und Astronomen **Hypsikles** über die fünf regulären Körper, dessen Wichtigstes der Beweis des Apollonischen Satzes ist: Die Umkreise der Seitenflächen des regulären Ikosaeders und Dodekaeders derselben Kugel sind gleich. Das 15., früher oft ebenfalls dem Hypsikles zugeschrieben, ist eine weit schwächere Arbeit, nach Tannery und Heiberg hat sie einen Schüler des Erbauers der Sophienkirche, **Isidorus** (um 530 n. Chr.), zum Verfasser.

Den Zweck der Elemente giebt **Proclus** S. 72 an: Elemente nennt man das, dessen Theorie hinreicht zum Verständnis von allem anderen, und mittelst dessen man imstande ist, die Schwierigkeiten, welche das andere bietet, aus dem Wege zu räumen. Stoicheion bedeutet eigentlich **Buchstabe**, und l. c. sagt Proclus geradezu: Die Elemente enthalten die Sätze, die als Bestandteile alles folgenden auftreten, wie die Buchstaben im Wort. Die Grundbedeutung von Stoichos ist militärisch, es bedeutet das, was wir einen Zug nennen, also auch da die Grundlage der Formation.

Etwas früher sagt Proclus: „Der Zweck ist, den Schülern behufs Verständnis des ganzen (der Geometrie) die Grundlage zu liefern und die einzelnen Konstruktionen der kosmischen Körper zu geben.“ Die kosmischen Körper sind die fünf regulären Körper, sie bilden den Schlufs, aber nicht den Zweck der Elemente; Kästner (Anfangsgr. 7. 1 S. 455, 5. Aufl.) sagt dazu: „es hat noch niemand gesagt, das Pantheon zu Rom sei seines Doms [Kuppel] wegen gebaut“. Der Zweck ist nie verkannt, und das „καί“ der Proclusstelle ist mit **sogar** zu übersetzen. Die Schüler sind durch die Elemente so weit zu fördern, dafs sie sogar die Konstruktionen der fünf Körper verstehen und, setze ich hinzu, ein Gefühl für die Grofsthat bekommen, mit der die Elemente schliefsen, den Nachweis, dafs es mehr als die fünf Körper nicht geben kann.

Der Zweck und die Notwendigkeit der Elemente folgt ohne weiteres aus der geschichtlichen Entwickelung der hellenischen Mathematik. In der Schule des Pythagoras erwuchs aus den Handwerksregeln ägyptischer Feldmesser und Baumeister im 5. Jahrh. n. Chr. die Geometrie zu einer Wissenschaft; es gelang den Pythagoräern in geometrischer Einkleidung die allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung, damit aber auch entdeckten sie (an der Seite und Diagonale des Quadrats) die Irrationalzahl bezw. die Möglichkeit, bezw. Wahrscheinlichkeit, der Inkommensurabilität (Mangel vom gemeinsamen Mafs) zweier Strecken. Damit wurden alle früheren Beweise über Flächenmessung, Ähnlichkeit etc. hinfällig. Das 4. Jahrhundert, Platon und der als Mathematiker

ihn überragende Eudoxus von Knidos und Theätet widmen sich der methodischen Arbeit, die neuen Grundlagen festzustellen; von Eudoxus rührt das fünfte Buch der Elemente, die Lehre von den Proportionen her, er ist vermutlich der eigentliche Schöpfer der Exhaustionsmethode, die sich später unter den genialen Händen des Archimedes (und Apollonius) zur antiken Differentialrechnung auswuchs, und von Theätet wissen wir, dafs er die Einteilung der Irrationalzahlen, die den Inhalt des zehnten Buches ausmachen, begonnen hat. Nach einem Jahrhundert waren die methodischen Arbeiten zum Abschlufs reif, und den gab Euclid.

Die Aufgabe, die er sich setzte, auf Grund der notwendigsten Voraussetzungen, in unantastbarer Weise die Geometrie und in geometrischer Einkleidung auch die Algebra als ein zusammenhängendes Ganze darzustellen, hat er in einer Weise gelöst, die alle Vorgänger spurlos verschwinden liefs und niemals übertroffen wurde.

Daran schliefst sich die Frage: inwieweit Euclid in den Einzelheiten der Elemente eigenes gab. Die Frage ist nur summarisch zu beantworten. Cantor sagt: „Ein grofser Mathematiker wird auch da, wo er anderen folgt, seine Eigentümlichkeit nicht verleugnen, und so war es sicherlich auch bei Euclid.“ Gewifs, denn so ist es ja bei jedem Schullehrer, der seine Elemente gedruckt oder ungedruckt traktiert. Als gesichert ist durch Proclus (Friedlein S. 426) der Beweis des Pythagoras und die Verallgemeinerung auf beliebige ähnlichen Figuren. Derselbe Proclus sagt uns (Knoche, Programm Herford 1865), dafs das so bedeutende fünfte Buch des Eudoxus Eigentum sei, und Archimedes (Quadr. parab.) vindiciert eben diesem den Exhaustionsbeweis und die Berechnung der Pyramide. Dafs das zehnte Buch zum Teil dem Theätet gehört, wissen wir auch durch Proclus. Cantor, Heiberg und mit ihnen jeder Unbefangene sind auch der Meinung, dafs die eigentümliche Form des Vortrags die (schon von den Ägyptern) überkommene gewesen mit den so berühmten Schlufsformeln: „Was zu beweisen war (ὅπερ ἔδει δεῖξαι)“ und „Was zu thun war (ὅπερ ἔδει ποιῆσαι).“ Euclid gehören wohl vor allem die Auswahl und die Form der Definitionen, Forderungen (Voraussetzungen) und Grundsätze, dann die strenge Anordnung der Sätze nach dem Prinzip, dafs kein früherer Satz mittelst eines späteren bewiesen, kein Gebilde gebraucht wird, dessen Existenz nicht vorher durch geforderte oder gegebene Konstruktion gesichert ist; dann ein grofser Teil des zehnten Buches, die Vollendung der Einteilung der Irrationalitäten durch Theätet. Dem Euclid gehört der elementare Beweis (ohne Exhaustion bezw. Integralrechnung) des Satzes, dafs die

Pyramide gleich dem dritten Teil des Prisma, das mit ihr gleiche Grundlinien und Höhe hat; ferner viele Sätze des dreizehnten Buches über die Bestimmung von Stücken der regulären Körper und mit gröfster Wahrscheinlichkeit der schon erwähnte Schlufssatz. Etwa um 420 war das Dodekaeder gefunden, wenig früher war überhaupt das logische Element in der Geometrie, die Forderung nach dem Beweis, erst aufgetreten, die Ausbildung des logischen Sinnes bis zum Bedürfnis eines solchen Existenzbeweises erfordert sicher ein Jahrhundert. Der einzige, der noch in Frage kommen könnte, wäre Eudoxus.

§ 4.

Zur Bibliographie der Elemente

Kaum dürfte je ein anderes Buch, von der Bibel abgesehen, in so viel Auflagen und Bearbeitungen verbreitet gewesen sein, als die 13 „Biblia" des Euclid, dessen Namen geradezu mit der Geometrie identifiziert wurde, z. B. Älian: Die Spinnen ziehen ihren Kreis genau und eines Euclid bedürfen sie nicht. Im Mittelalter heifst die Professur der Geometrie sehr häufig Professur des Euclid. Die Studenten lasen den Euclid, sei es vollständig, sei es im Auszug, und der Professor kommentierte, wobei selten mehr als das erste und zweite Buch erledigt wurde. Savile, der die nach ihm genannte, noch heute in Oxford bestehende Professur des Euclid stiftete, kam bis zum achten Satz des ersten Buches. Auf dem Titel bezeichnen sich die Professoren als Professoren der Arithmetik und des Euclid, so z. B. Scheibl 1555. Noch heute heifst in der englischen Schulsprache die Mathematik einfach „Euklid".

Es war selbstverständlich, dafs der Text im Laufe der Jahrhunderte entstellt, verdorben, aber auch erweitert wurde; letzteres besonders für die schwierigen bezw. zur Zeit des Euclid „modernen" Teile des zehnten und des zwölften und dreizehnten Buches.

Eine Bearbeitung ist besonders wichtig, die des Theon, des Vaters der Hypatia, der zur Zeit Theodosius des Grofsen, also etwa 350 n. Chr. in Alexandria lebte und lehrte. Savile macht in seiner Vorlesung (Praelect. tresdecim in principia elementor. Euclidis Oxf. 1621) auf eine Stelle in Theons Kommentar zum Almagest aufmerksam, die schon Petrus Ramus, der auch die Wichtigkeit von Proclus erkannt hatte, erwähnte: „Dafs sich die Sectoren gleicher Kreise wie

ihre Zentriwinkel verhalten, wurde von uns in der Euclidausgabe am Schlufs des sechsten Buches gezeigt." Diese Ausgabe, etwa 400 n. Chr., mufs die früheren im Buchhandel fast völlig verdrängt haben, obwohl sie, wie wir jetzt wissen, eine Verschlechterung gewesen. Alle bekannten Codices, und ihre Zahl ist sehr grofs, alle Drucke und Übersetzungen bis 1800 sind aus dieser Ausgabe hervorgegangen, wenn man von arabischen Quellen absieht. Peyrard, dem wir die erste im heutigen Sinne kritische Ausgabe des Euclid (griechisch, lateinisch, französisch) verdanken, fand 1808 dank der Beraubung aller Bibliotheken, Museen etc. durch Napoleon in einer dem Vatikan entnommenen Handschrift 190 (1814 zurückgegeben), die bis jetzt einzige auf eine Ausgabe, die älter ist als Theon, zurückgehende vollständige Handschrift.

Aus diesem Codex konnte man die Änderungen des Theon feststellen, und auch die Theonschen Codices ihrem Werte nach beurteilen, eine Arbeit, welche für die Elemente von Heiberg in bewunderungswerter Weise geleistet ist.

Auf doppeltem Wege drang die Kenntnis des Euclid im Mittelalter nach Europa. Einmal sind es die von oder nach Boetius (etwa 500) verfafsten dürftigen Auszüge der Elemente, welche sich in den Klöstern hielten und besonders durch Gerbert von Wichtigkeit wurden, dann aber sind es die Übertragungen der arabischen Übersetzungen und Bearbeitungen ins Lateinische. Über den arabischen Euclid hat uns der durch einen unglücklichen Sturz der Wissenschaft zu früh entrissene Schüler von Nöldecke und Landauer, Klamroth, Gymnasiallehrer in Altona, aufgeklärt, Zeitschrift der Deut. Morgenl. Ges. 1881: „Die beiden berühmtesten Übersetzungen sind die des Haǵǵâǵ (spr. Hadja'sch) ibn Iûsuf ibn Maṭar aus dem Anfange und die des Isḥâq ibn Ḥunein aus dem Ende des 9. Jahrh.; jene ist uns teilweise, diese ganz und zwar in mehreren Handschriften erhalten. Die grofsenteils ungünstigen Beurteilungen des arabischen Euclid in den Geschichten der Mathematik beziehen sich nicht auf diese Handschriften, von denen bisher nichts veröffentlicht ist, sondern auf zwei gedruckte Bücher, von denen das eine eine spätere arabische Überarbeitung der ältesten Übersetzungen, das andere eine lateinische Übertragung des arabischen Euclid enthält. Die erstere hat zum Verfasser den Naṣîr ed-dîn († 1273) aus Ṭûs in Chorâsân und erschien im Jahre 1594 zu Rom. Der letztere wird dem Giovanni Campano aus Novara zugeschrieben, der um die Mitte des 13. Jahrh. gelebt haben mufs; sie erschien im Jahre 1482 bei Erhard Ratdolt in Venedig als erste Euclid-Ausgabe."

Nach Klamroth ist der Euclid des Haggag die erste Übersetzung eines griechischen Werkes ins Arabische, die des Ishaq, welche uns nur in der Form vorliegt, wie sie von Thâbit ibn Quorra verbessert ist, „ein Muster von guter Übersetzung eines mathematischen Textes". Wir müssen fortab annehmen, dafs diesen Arabern ein dem ursprünglichen Werke des Euclid viel näherstehender Text, der etwa nur drei Viertel des jetzigen enthielt, vorlag. Klamroth schliefst:

1) Alle Lemmata und Scholia, der Excurs hinter XIII, 5, die meisten Porismata und zweiten Beweise, 22 Sätze, 17 Definitionen in unserer Ausgabe rühren nicht von Euclid her, sondern sind sehr späte Zusätze.

2) Bei den meisten Sätzen, aufser etwa in Buch 7—9, sind einzelne kleinere, begründende, erklärende, zurückverweisende und weiter ausführende Glossen in den Text gedrungen.

3) Nicht wenige Sätze, besonders in Buch 10 und 11—13, hatten früher einen weit kürzeren, einfacheren bezw. unvollkommeneren Beweis, der erst in späterer Zeit erweitert und vervollständigt wurde.

Aber Heiberg beweist (Cantor 29), dafs den Arabern verstümmelte griechische Handschriften nach Art der des Demetrius Cydonius (zu Bologna) aus dem 11. Jahrh. vorlagen, und dafs griechische Handschriften, wie der Vaticanus 190 und der Palimpsest aus dem 7. oder Anfang des 8. Jahrh. (B. M. 17211) auf ältere Quellen zurückgehen. Die Unechtheit der mit ἄλλως bezeichneten zweiten Beweise ist schon von August bemerkt worden. Wenn auch die lat. Vorrede zu Nasur nichts mit Thâbit zu thun hat, so hat doch Heiberg völlig recht, wenn er die Willkürlichkeit der arabischen Übersetzer hervorhebt. Noch 1740 in der 4.? Auflage übersetzt der deutschredende Eucl. d. h. v. Pirckenstein die vierte Def. wie folgt:

„Eine gerade Linie ist, welche Schnur — eben, zwischen zwei Punkten liegt" oder „eine gerade Linie ist die kürzeste unter allen, welche aus einem Punkt in einen andern möge gezogen werden" (Fig. IV).

Die Bearbeitung Tusis ist nach Heiberg 1801 zum zweiten Male in Konstantinopel gedruckt (nach Riccardi 4. Aufl.), sie ist auch für die Parallelentheorie wichtig.

Die ältesten uns erhaltenen lateinischen Übersetzungen gehen beide wahrscheinlich (oder nach Heibergs neuester Arbeit fast sicher) auf eine und dieselbe arabische Bearbeitung zurück, die bis jetzt unbekannt ist; es sind die des Atelhard von Bath um 1120 und die des Campano etwa 1250. Seine Zusätze zeigen ihn als einen tüchtigen Mathematiker (wie Tusi), seine Ausgabe ist auf lange Zeit mafsgebend und 1482

ward sie von dem Augsburger Ratdold gedruckt. Der Titel der sehr seltenen Ausgabe lautet Praeclarissimus liber elementorum Euclidis perspicassimi In artem Geometrie incipiet quam felicissime; sie ist von Kästner genau beschrieben (Gesch. d. Math. Bd. I S. 289 etc.).

Im Beginne der Renaissance wird dann die Existenz griechischer Codices und ihrer Abweichungen von Campanus offenkundig, und so gab 1500—1505 der Venetianer Zamberti den Euclid zum ersten Male vollständig nach griechischem Codex lateinisch heraus. Eu. oper. ed. a Bartolemaeo Z. folio. Gegen diese Ausgabe veröffentlichte 1509 Lucas Paciuolo, der durch seine „summa" für die Arithmetik epochemachend ist, eine Verbesserung des Campanus, ebenfalls bei Ratdold (ist ist die seltenste E.-Ausgabe, Kästner l. c. S. 299—301). Zamberti hielt noch an dem Irrtum fest, dafs die Sätze vom „Megarenser" Euclid, die Beweise vom Alexandriner Theon seien. Seine Arbeit, verbunden mit der des Campanus, wird durch den Pariser Druck Lefèvre's (Faber, Mich. Pontanus) 1516 und durch Herwagens Baseler Nachdrucke (unwesentliche Verbesserungen von Herlin) 1537, 1546, 1558 sehr verbreitet und hat 300 Jahre lang den Markt beherrscht, obwohl nach Heiberg der Codex des Zamberti zu den schlechteren Theonischen gehörte.

Von lateinischen Übersetzungen wollen wir nur noch die hervorragendsten erwähnen, die des Commandinus, Pisa 1572, der zuerst die Persönlichkeit unseres Euclids feststellte, und die des Clavius mit Kommentar 1574, „welche ganz durchzustudieren viel Geduld erfordert, aber desto nützlicher ist". Zitat aus Scheibel, Anleitung zur mathematischen Bücherkenntnis, Breslau 1769, 2. Aufl. 1772, 1781?, wo sich eine Übersicht aller Euclidausgaben findet; von da ab vgl. Kaiser bis 1888 und seine Fortsetzung Hinrichs bis heute für Deutschland.*) Die Arbeit des für seine Zeit hochbedeutenden Jesuiten Clavius ist von allen Historikern der Mathematik gleich gewürdigt, von Montucla, Kästner, Cantor; Kästner nennt sie die Pandekten der Mathematik, aber die 22 Ausgaben, welche Engel und Stäckel in der anerkannten meisterhaften „Theorie der Parallellinien" angeben, habe ich nicht her-

*) Die umfassendste Zusammenstellung findet sich in den Mem. del. B. Acad. d. Sc. d. Inst. di Bologna Serie IV s. VIII und IX, VII. 1887—1890. Sie ist das hochverdienstliche Werk Riccardi's (Bonola zählt gegen 1700 Ausgaben), leider freilich, wie ich für Deutschland konstatieren konnte, ist sie nicht absolut sicher, was in der Natur der Sache liegt. (So existiert z. B. eine Ausgabe des Lorenz für Deutschland von 1819 nicht, obwohl Kaiser sie angiebt, bei dem 1818 fehlt etc.)

ausbringen können, vielleicht zählt Stäckel die Ausgaben der Ordensbrüder, Grünberger (und Tacquet), mit.

Zu Basel erschien 1533 bei Herwagen, der auch in Strafsburg eine Druckerei besafs, die erste griechische Textausgabe durch Simon Grynaeus (den älteren); leider nach zwei sehr schlechten Handschriften. Das erste und zweite Buch wurde von dem hervorragenden Mathematiker des Sturmschen (Protest.) Gymnasiums zu Strafsburg, Konrad Dasypodius, dem Verfertiger der ersten kunstvollen astronomischen Uhr des Münsters, nach Proclus verbessert 1564

Die griechisch-lateinische Ausgabe des Steph. Gracilis von 1557 hatte bis 1612 zehn Auflagen.

Die grofse Oxforder Ausgabe von David Gregory 1705, beinahe bis auf den heutigen Tag die einzig vollständige, ist für die Elemente ganz von der Baseler Ausgabe abhängig. Von 1814—1818 erschien dann Peyrards grofse Ausgabe der Elemente und Data in drei Quartbänden, griechisch, lateinisch, französisch, in der zuerst der Vaticanus 190 verwertet wurde. Eine sehr tüchtige Arbeit ist die griechische Textausgabe von August (Berlin 1826—1829), die jetzt allerdings durch die Ausgabe von Heiberg (griechisch-lateinisch) Leipzig 1882—1888 veraltet ist.

§ 5.

Euclidausgaben in lebenden Sprachen.

Die erste Übersetzung in eine moderne Sprache ist die des grofsen italienischen Algebraikers Nicolo Tartaglia 1543 (wenn man von der bei Scheibel nicht erwähnten spanischen von 1506? absieht).

Ich gebe zunächst eine ausführlichere Angabe über deutsche Euclid-Ausgaben. Es beginnt 1555. Das siebend acht und neunt Buch des hochberühmten Mathematikers Euclides Meg. etc. durch Mag. Joh. Scheybel, der löbl. Univ. zu Tübingen des Euclidis und Arithmeticae Ordinarien (also nur die arithmetischen Bücher).

1562. Die sechs ersten Bücher des Euclid von anfang oder grund der Geometrie etc. Aus griech. Sprach in die Teutsch gebracht, eigentlich erklast. Auch mit verstentlichen Exempeln, gründlichen Figuren und allerley den nutz für Augen stellenden Anhängen gersiert, dermafsen vormals in Teutscher Sprach niemals gesehen worden etc. Durch Wilh. Holtzmann genannt Xylander von Augspurg (Diophant). 2. Aufl. von

1610 durch Sim. Gunzenhausen, sehr selten, 3. nach der holl. Ausgabe von 1608, von 1615.

1651. Henrich Hoffmanns Teutscher Euclides (1653. 2. Aufl.) Bearbeitung, keine eigentliche Übersetzung.

1694 (Ricc. giebt 1685 nach Zakhartchenko) (1694, 1699). Teutsch redender Euclid, oder acht Bücher von der Meſskunst etc. Zu Nutzen aller Generalen, Ingenieure, Natur- und Wahrheits-Kündiger etc. von A. E. B. v. P. Ausgabe von 1740: Ant. Ernst Burkh. v. Pirckenstein.

1697. In teutscher Sprache vorgestellter Euclides, dessen sechs erste Bücher auf sonderbahre und sehr leichte Art mit algebraischen oder aus der neuesten Lösekunst enthaltenen Zeichen, also daſs man denselben Beweis auch in anderen Sprachen gebrauchen kann, durch Samuel Reyher. Kiel (alle Kunstausdrücke verdeutscht) 1692, 1749.

1699. Euclides erstes Buch (zweites?) durch Henr. Meiſsner. Hamburg. Meiſsner ist der verdiente Gründer der so blühenden Hamburger mathematischen Gesellschaft.

1714. Euclid (15 Bücher). Teutsch durch Christ. Scheſslern Dresden (1721? 1723? 1729).

(Nicht 1771, wie Ricc. nach. Zakh. angiebt, sondern)

1733 erscheint die erste deutsche Übersetzung, welche den Text wortgetreu und sinngetreu wiederzugeben bemüht ist. Die sechs ersten Bücher zum Schulgebrauch aus dem Griechischen von Lorenz, mit Vorrede von J. A. v. Segner (Beweis des Parallelenaxioms). 1781 (elftes und zwölftes Buch); von Mollweide 1809, 4. Aufl.; 1818, 24, Dippe 1840.

1781. Euclids Elemente, fünfzehn Bücher aus dem Griechischen übersetzt von Johann Friedrich Lorenz (Halle) 1798, 1809, 1818, 24. 1840.

Die Ausgaben 1809—1824 sind von Mollweide, dem bekannten Mitarbeiter am Klügel. Im Kaiser steht irrtümlich 1819; die Ausgabe von 1840 ist von Dippe.

1860 werden die acht Bücher nach Lorenz zum letzten Male neu ediert von Hartwig.

Ich erwähne noch

1807. Hauff (acht geometrische Bücher), 1828 dito Hoffmann und einen Versuch, der 1800 gemacht wurde:

1800. Erstes Buch der Elemente des Euclid. Für den ersten Unterricht in der griechischen Sprache und Mathematik (Weimar, Verfasser?). 1900 wird der Versuch wiederholt.

Italien.

1543 Nicola Tartalea. 1575 Commandino (nach seiner lateinischen Ausgabe). 1613 Cataldi (sechs erste), 1621 die drei arithmetischen, 1625 das zehnte. 1718 Viviani. 1731 Guido Grandi (keine Übersetzung, sondern abgekürzte Bearbeitung, die bis 1805 immer wieder aufgelegt wurde). 1736 Martino. 1749 italienische Übersetzung der französischen Ausgabe von Dechales (85, 97). 1752 Ximenes (sechs Bücher). 5. Aufl. 1819. 1818 Flauto (acht geometrische Bücher) Geschichte des Parallelenaxiomes 1827, 54.

Dazu noch Borelli Euclides restitutus 1658 (1663 italienisch von Magni, 79, 95) und 1680. Vitale Giordano Euclide restituto, als Vorläufer von Hieron. Saccheri, Euclides ab omni naevo vindicatus 1733 (Mailand).

Frankreich.

1569 (sechs Bücher) von Forcadel, 1615 (alle 15) von Henrion bis 1676 sieben Auflagen, dann abgelöst von Milliet Dechales Bearbeitung, zunächst 1672 der acht geometrischen Bücher (1—6, 11—12), dann 1677 Wiedergabe der Elemente, immer wieder aufgelegt, auch ins Italienische etc. übersetzt, seit 1709 in der Bearbeitung von Ozanam bis 1778. Zu erwähnen sind als Versuche den Euclid zu beseitigen Petrus Ramus Scholae mathem. 1559 und sehr häufig aufgelegt. 1741 Clairaut (Eléments d. géom.). 1794 Legendre, Elém. d. g. bis 1852 fünfzehn Auflagen (1849 von Crelle deutsch) und den französischen Mittelschulunterricht noch heute beherrschend; obwohl

1867 Hoüel, essai critique und Duhamel, Des méthodes (2. Aufl. 1875, T. 2) Euclid gegen Legendre in zutreffendster Weise verteidigen. Siehe auch Gino Loria, Della varia fortuna di Euclide. Roma 1893.

England.

1570 Billingslai (Vorrede von Dee). 1621 Saviles praelectiones tresdecim. 1655 Barrow (abgekürzte Bearbeitung) 1675, 1705, 22, 32; 1781—90 Jam. Williamson (wohl die einzige textgetreue Übersetzung des ganzen Euclid). Pleyfair 1796, bis 1861 acht Auflagen. Keill 1708 (elf Auflagen). Entscheidend für den englischen Unterricht ist Robert Simson 1756: the elem. of Euclid etc., die acht geometrischen Bücher. Diese Bearbeitung bis 1885 dreifsig Mal aufgelegt. Ich erwähne noch als sich enger an Euclid anschliefsend die Ele-

mente von Todhunter 1862. Rob. Simson ist 1806 von Reeder ins Deutsche übersetzt. Die zahllosen neueren englischen Ausgaben betreffen meist die acht geometrischen Bücher und weichen, obwohl sie den Namen Euclids tragen, vom Gange Euclids ebenso ab, wie unsere deutschen Elemente der verschiedensten Lehrer. Noch immer heifst also in der englischen Schulsprache die Geometrie schlechtweg „Euclid“.

Rufsland.

1739 Ivan Astaroff (nach Lat.). 1789 Suvoroff (nach dem Griech.). 1880 Vachtchenko-Zakhartchenko, der eine Bibliographie von 1480—1879 gegeben, die aber wohl mit Vorsicht zu benutzen ist. 1807? Czecha. 1817 polnisch.

Schweden und Norwegen.

1744 Marten Strömer (sechs Bücher), 1753 (elftes und zwölftes) bis in die neueste Zeit immer wieder neu aufgelegt bei wechselnder Bearbeitung.

Dänemark.

1745 Ziegenbalg. In Dänemark scheint bald, nachdem das Lateinische als Unterrichtssprache der Gymnasien aufgehört hat, der Gang des Euclid verlassen zu sein. 1803 Lindrup (sechs Bücher). Zur Zeit sind die verbreitetsten Lehrbücher in Geometrie und Arithmetik die von Petersen.

Holland.

1606 (Jan Pieterzoon) Dou (sechs Bücher nach Xylander); oft aufgelegt. 1617 Frans von Schooten (sehr abgekürzt), 1662 vergröfsert; Vooght vollständig mit dem 16. Buche Candallas 1695. Coets (sechs Bücher) 1702 oft aufgelegt bis 1752, dann Steenstra (sechs Bücher) abgekürzt. 1763, 70, 1803, 1810, 25; seit der Zeit keine holländische Euclid-Bearbeitung bei Riccardi. Euclid scheint in Holland ganz durch die modernen französischen Lehrbücher verdrängt zu sein.

Spanien.

1516?? Zamorano (sechs Bücher) 1576; 1689 Kresa (acht erste).

Griechenland.

1820 Benjamin.

China.

1608 Matteo Ricci (sechs Bücher); 1857 auf Befehl des Vizekönigs vervollständigt durch Wylie.

§ 6.

Die Kommentatoren des Euclid.

Der festgefügte Bau der Elemente hat, wie er einerseits die höchste Bewunderung erregte, andererseits die Versuchung erweckt, die Geometrie auf andere Weise ebenfalls zu begründen. Dazu kommt, daſs der Euclid in seinem ersten Buche einen mathophilosophischen Teil enthält, der die Grundbegriffe der Geometrie und die nötigen und hinreichenden Voraussetzungen angiebt, von denen die ersteren ihrer Natur nach unauflösbar, die anderen variabel sind. So hat der Euclid, und das ist vielleicht sein Hauptverdienst, eine staunenswerte Geistesarbeit hervorgerufen, die wir ausführlich bei der Parallelentheorie besprechen müssen. Hier wollen wir nur einen Überblick über die hervorragendsten Interpretatoren geben, welcher zeigt, wie recht Gino Loria hat, wenn er als Prinzip seiner ausgezeichneten Arbeit „Della varia fortuna di Euclide Rom. 1893" das Gesetz der Kontinuität ausspricht. Es ist ein roter Faden, der von Archimedes und Apollonius bis Hilbert geht. Von Apollonius sind Spuren eigener „Elemente" erhalten. Darunter eine ganz allgemeine Definition des Winkels (Heiberg V S. 88 nicht 89, wie Loria zitiert). Archimedes gab eine von Euclid abweichende Definition der Geraden (vermutlich auch der Ebene), neue Prinzipien, darunter das nach ihm benannte, für die Exhaustionsmethode, die er zur Integralrechnung umbildete. Ihm schlieſst sich würdig Heron, der groſse Mechaniker des 1. Jahrh., an, von seinem Kommentar sind uns Fragmente durch Proclus überliefert.

Aus der Zusammenstellung der Euclid-Stellen bei Heron durch Heiberg geht klar hervor, daſs die Definitionen des Euclid schon zu Herons Zeit die uns überlieferte Form hatten, Euclid also damals schon der unantastbare Klassiker der Elemente war, wie Tannery sagt. Es sei denn, daſs Heron selbst auf diese Formulierung Einfluſs gehabt hat.

Es ist das Parallelenaxiom und die Definitionen, überhaupt die ganze Anordnung des ersten Buches, dann gewisse Inkongruenzen zwischen den sechs ersten und den drei letzten Büchern, der sonder-

bare Umstand, dafs Euclid die Lehre von den Proportionen ganz allgemein im fünften Buch begründet, und dann die elementaren für rationale Zahlen noch einmal im siebenten, was von jeher die Kommentatoren in Thätigkeit gesetzt hat.

Die Inkongruenz bezieht sich besonders auf die Bewegung, in den planimetrischen Büchern wird sie ängstlich vermieden, nur zum Beweis des vierten Satzes (ersten Kongruenzsatz) und des achten wird sie herangezogen, dagegen scheut sich Euclid in den stereometr. Büchern absolut nicht die Definition der Körper auf die Bewegung zu stützen. Man hat daraufhin (ich selbst war gleicher Meinung) geschlossen: „Einen Homeros gäb es nicht, sondern acht bis zehn", aber ich wurde aufmerksam gemacht, dafs nach Platon und besonders Aristoteles der Begriff der Bewegung einen körperlichen Raum voraussetzt. Dies erklärt auch, dafs Euclid die Gleichheit des rechten Winkels als „Forderung" einführte.

Auf Heron folgt Geminos bezw. Géminus, von dem Proclus berichtet, er habe die Verschiebbarkeit in sich der Schraube auf dem Rotationszylinder, wenn nicht gefunden, so doch gekannt. Es folgt eine Ära, in der die zusammenfassende eigentlich philosophische Geistesrichtung unter dem Einflufs des Aristoteles gegen die Ausbildung der Spezialwissenschaften, wie Medizin, Geographie, Astronomie, Mechanik etc. zurücktritt (vgl. Windelband, Geschichte der alten Philosophie). Aus dieser Zeit, in der sich von mathematischen Disziplinen die Trigonometrie (eben und sphärisch) im Anschlufs an die Astronomie entwickelt, wissen wir von besonderen Kommentaren nichts, aber von den Elementen, dafs sie zur Ausbildung des angewandten Mathematikers für unentbehrlich galten. Als gleichzeitig mit dem Christentum gegen diese nüchterne Periode in Anlehnung an den Theosophen Platon zunächst der Neupythagoräismus sich erhob, war es anfangs die arithmetische Seite des Euclid, die in Nikomachus von Gerasa, um 100 n. Chr., den „Elementenschreiber der Arithmetik" (Cantor) und in Theon von Smyrna ihre Kommentatoren fand. Um 300 (nach Cantor und Zeuthen) lehrte dann zu Alexandria Pappos, dessen Kollektaneen von unschätzbarer Bedeutung sind. Pappos hat sicher einen Kommentar zum zehnten Buche geschrieben, von dem Reste im Vaticanus erhalten sind und der uns nach Heiberg wahrscheinlich ganz in einem noch unedierten Leydner Manuskripte erhalten ist. Mit den Neuplatonikern, jener seltsamen Mischung christlicher und platonischer Mystik, nimmt auch die Mathematik die platonische Richtung auf die Probleme, welche die geometrischen Grundbegriffe und die Methodik bieten, ener-

gisch auf. Wir nennen Jamblichus, Porphyrios, von denen uns Spuren ihrer Scholien erhalten sind, Theon, dessen Ausgabe den „echten“ (Heronischen?) Euclid fast völlig verdrängte, und Proclus, dessen Kommentar zum ersten Buch uns fast ganz erhalten ist. Der Kommentar, der bis auf 1873 nur in der Ausgabe des Grynaeus 1533 (Herwagen) gedruckt war, ist für die Geschichte der Mathematik einzig. Tannery, der zuverlässigste Detailforscher hellenischer Mathematik, nennt sein Verständnis geradezu das Problem der Geschichte dieser Mathematik. Die Ausgabe von Friedlein von 1873 ist philologisch sehr bedeutend, wenn auch nach Heiberg noch nicht das letzte Wort über Proclus, aber griechisch, es existiert nur die lateinische Übersetzung von Barocci(us) 1560, welche oft nur eine Wortübersetzung ist, wie die englische (wörtliche) des Barocci von Taylor.

Als Justinian 529 die Schule von Athen, mit der die hellenische Kultur begann und schlofs, aufhob und die Lehrer vertrieb, kam Euclid mit ihnen nach Persien, und so an die Araber, wo er im achten und neunten Jahrhundert an Haggag und Ishâk Übersetzer fand. Sehr bald darauf mufs es auch arabische Kommentare gegeben haben, wie aus der Ausgabe des Campanus hervorgeht, der schon erwähnte Nasur ed Din im 13. Jahrh. ist keineswegs unbedeutend, der auch zuerst die Trigonometrie als eigenen Zweig behandelt hat.

Die Renaissance macht Proclus bekannt, an ihn schliefst sich Commandinus und Clavius an. Der erstere wirkte besonders auf die Engländer, Savile, der die Professur des Euclid in Oxford begründete, wodurch Wallis und wohl auch Barrow (erste Ausgabe 1652) und durch diesen Newton auf Euclid und die Beschäftigung mit den Grundlagen hingewiesen wurden. Vor allem haben wir Robert Simson zu nennen (der direkt Commandinus zugrunde legt) und der besonders auf die englische Schulmathematik von allerwesentlichstem Einflufs geworden ist. Der Kommentar erschien 1756. Titel: Die sechs ersten Bücher nebst dem elften und zwölften des Euclid mit Verbesserung der Fehler, wodurch Theon und andere sie entstellt haben etc. mit erklärenden Anmerkungen (aus dem Englischen übersetzt von Roeder, her. von Niesert Paderborn 1806). Clavius kennt den Proclus ganz genau, auch er harrt noch der deutschen Herausgabe, der er im hohen Grade wert ist, er hat nebst Borelli sicher auf seinen Ordensbruder Saccheri gewirkt, von dessen Euclides ab omni naevo vindicatus (Mediol. in 4. 1733) die heutige sogenannte nicht-eucl. Geometrie gezählt wird. Es ist wahrscheinlich, dafs Lambert in Chur den Saccheri kennen lernte, und fast sicher, dafs Gaufs wieder Lamberts Abhandlung im

Hindenburgschen Archiv von 1786 gelesen; Gaufs wirkte dann auf die Bolyai (durch den Vater Wolfgang auf den Sohn Johann) und durch Vermittelung von Bartels auf Lobatschewski.

Für Frankreich ist aufser Clavius noch Petrus Ramus, der Besieger der Scholastik, von Bedeutung. Hier geht der Weg über Tacquet 1659 und Arnauld zu Clairaut 1741 und Legendre 1794 und Bertrand 1810. Clairaut hat sich auch auf die deutschen Schulen (des Adels z. B. Ilfeld) verbreitet. Es scheint, als ob auch Lambert ihn gekannt habe. Doch ist der Ausgang vom Rechteck ein so natürlicher, dafs ich selbst um 1880, ohne eine Ahnung von Clairaut oder Lambert zu haben, im Unterricht einen ganz ähnlichen Weg einschlug. Der aufserordentliche Beifall und Verbreitung der Elemente Legendres ist bekannt und berechtigt, noch heute beeinflussen sie den Unterricht auf Mittelschulen, nicht blofs in Frankreich, sondern in Spanien und selbst in Deutschland.

Was die deutschen Schulen betrifft, so möchte ich auf eine Schrift Hubert Müllers aufmerksam machen: „Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euclid-Originals"? Ich kann meine Kritik (Deutsch. Litter. 1887 N. 37) jetzt dahin ergänzen: Die deutsche Schulgeometrie hat sie nie besessen. Weder Johannes Vogelin, bekannt durch die Vorrede Melanchthons der Ausgabe von 1536, noch des Dasypodios Volum. I und II, noch die Mathesis juvenilis von Sturm oder Wolffs oder Kästners Anfangsgründe oder Thibauts Grundrifs, von Kambly, Mehler, Henrici (und Treutlein) ganz zu schweigen, sind jemals dem Gange Euclids gefolgt. Dagegen waren die Studenten und die Lehrer bis etwa um die Mitte unseres Jahrhunderts, wie die rasch aufeinander folgenden Ausgaben am besten beweisen, völlig mit dem Euclid vertraut. Von da ab ändert sich die Sache, seit Dinde 1840 ist keine vollständige Ausgabe der Elemente erschienen und 1843 und 1860 keine der geometrischen Bücher, und ich bin sicher, dafs es eine minimale Anzahl Lehrer giebt, die den Euclid gelesen haben. Zum Beweis ein eigenes Erlebnis: Auf dem Umweg über die Abstandslinie der nicht-eucl. Geometrie fand ich eine Konstruktion der Tangente an den Grenzkreis, die mir auch für unsern alten Kreis ebenso einfach, als neu erschien, ich trug sie in München vor, wo über 100 Mathematiker, darunter fast alle Hochschullehrer von Bedeutung, waren, weder ich, noch ein anderer hatte eine Ahnung, dafs es die Konstruktion des Euclid war. Übrigens mufs gesagt werden, dafs auch die Studenten der Zeit von 1500—1700 vielfach nicht über das erste, allenfalls das zweite Buch hinauskamen; die 13 Vorlesungen Saviles gehen bis zu Satz 8,

Buch 1; ferner aber wuchs durch die ungeheure Entwickelung der Analysis von 1650—1750 und der Geometrie von 1750—1850 das Material derartig, daſs der alte ehrwürdige Euclid zurücktreten muſste. Einen Teil des Sinkens trugen auch die ungerechtfertigten Angriffe Schopenhauers, worüber ich besonders meine Besprechung der Schrift „Zur Nieden, der Beweis in der Geometrie“ in der Zeitschrift für Gymnasial-Wesen 1894? zu vergleichen bitte. Schopenhauer hatte als Künstler, der er ist, für die intuitive Erkenntnis vollstes Verständnis, aber um so geringeres für die logische, die oft ebenso unmittelbar als jene ist. Nun ist aber die Geometrie als Wissenschaft eine untrennbare Verbindung von Anschauung und Logik, und darum muſste der Versuch, den z. B. Kosack in dem Nordhausener Programm anstellte, die Geometrie rein auf Anschauung zu begründen, gerade so scheitern, wie der noch berühmtere Bolzanos von 1804 (Betrachtungen über einigs Gegenstände der Elementar-Geometrie), die Geometrie rein logisch zu begründen. Bolzano hat übrigens viel mehr von Leibniz entlehnt, als bekannt ist. Der groſse „Nebenbuhler“ Newtons zeigt sich auch in der Auffassung der Grundlagen als Widerpart.

Während Newton in der Vorrede der Phil. nat. ausdrücklich auf den Ursprung der mathematischen Grundgebilde aus der Mechanik hinweist: „Gerade Linien und Kreise zu beschreiben sind Probleme, aber keine geometrischen“, ist Leibniz bemüht, der Anschauung so wenig als möglich einzuräumen. Es scheint wenig oder gar nicht bekannt, daſs schon bei Leibniz Lebzeiten Ansichten desselben über die Grundlagen der Geometrie veröffentlicht sind in La Montre 1691. Les 47 prop. du I livre d. El. d'E. av. des rem. de G. G. Leibniz. Ähnlich wie für Deutschland liegt die Sache in Frankreich, nur in England folgt Ausgabe auf Ausgabe noch im 19. Jahrh., und noch ist der „Syllabus“ nicht zustande gekommen, der den Euclid verdrängen soll; auch in Schweden und Norwegen scheint noch ziemliches Interesse für Euclid zu herrschen. In neuester Zeit ist das Interesse für historisch-philosophische Ausbildung, Dank sei es dem Altmeister M. Cantor, wieder sehr stark erwacht, schon giebt es historische Vorlesungen in mehreren Universitäten, auch mehren sich die mathophilosophischen, und sie werden vielleicht, ehe das 20. Jahrhundert verflossen, allgemeiner werden.


ELEMENTE



I. [Buch].

Erklärungen [Definitionen].[1]

1) [Der] Punkt ist [das], dessen Teil nichts [ist].[2]

2) [Die] Linie aber breitenlose Länge.[3]

3) [Der] Linie (aber) Äufserstes [sind] Punkte.[4]

4) [Die] Gerade ist [die] Linie, welche gleichmäfsig durch ihre Punkte gesetzt ist[5] (d. h. die Gerade ist die Linie, auf der kein Punkt vor dem andern ausgezeichnet ist).

5) [Die] Fläche ist [das Raumgebilde], was nur Länge und Breite hat.[6]

6) [Die] Ebene ist [die] Fläche, welche gleichmäfsig durch ihre Geraden gesetzt ist.[7]

7) Ein ebener Winkel entsteht, wenn zwei Linien (in) der Ebene zusammentreffen, welche nicht in derselben Geraden liegen, durch die Biegung von der einen Linie zur andern.[8]

8) Falls die den Winkel begrenzenden Linien Strahlen sind, so heifst der Winkel geradlinig.

9) Falls ein auf einer Geraden stehender Strahl[9] die aufeinander folgenden Winkel zu gleichen macht, so ist jeder der beiden gleichen Winkel ein rechter, und der Strahl heifst senkrecht [zu der Geraden], auf der er steht.[10]

10) Stumpf ist der Winkel, der gröfser als der rechte.

11) Spitz aber, der kleiner als der rechte.

12) Grenze ist das, was das Aufserste irgend wovon ist.[11]

13) Figur[12] ist das, was eine oder mehrere Grenzen hat.[13]

14) Kreis heifst eine ebene Figur von einer Linie, (welche Peripherie heifst) [so] umschlossen, dafs alle von einem der im Innern liegenden Punkte zu ihr (zu der Peripherie des Kreises) gezogenen Geraden einander gleich sind.

15) Mittelpunkt (Zentrum[14]) des Kreises wird jener Punkt genannt.

16) Durchmesser des Kreises ist irgend eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt gezogen ist und von dem Umfang des Kreises an beiden Seiten begrenzt ist; er halbiert auch den Kreis.

17) Halbkreis heifst die Figur, welche von einem Durchmesser und dem von ihm abgeschnittenen Umfang [Bogen] umschlossen wird. Das Zentrum des Halbkreises ist dasselbe wie das des Kreises.

18) Geradlinige Figuren sind die von Geraden begrenzten. Dreiseitige die von drei, vierseitige die von vier, vielseitige die von mehr als vier Geraden begrenzten.

19) Von den dreiseitigen Figuren ist ein gleichseitiges Dreieck [diejenige] mit drei gleichen Seiten, ein gleichschenkliges mit nur zwei gleichen Seiten, ein ungleich[seitig]es das mit drei ungleichen Seiten.

20) Aufserdem heifst von den dreiseitigen Figuren rechtwinkliges Dreieck das, welches[15]) einen rechten Winkel, stumpfwinkliges das, welches einen stumpfen Winkel hat, spitzwinkliges aber das, welches drei spitze Winkel hat.

21) Aber von den vierseitigen Figuren ist ein Quadrat[16]) die gleichseitig rechtwinklige, ein Rechteck[17]) die zwar rechtwinklige aber ungleichseitige, ein Rhombus die zwar gleichseitige aber nicht rechtwinklige, ein Rhomboid die, deren gegenüberliegende Seiten und Winkel einander gleich sind und die weder gleichseitig noch rechtwinklig ist; die Vierseite aufser diesen sollen Trapeze heifsen.

22) Parallel sind Gerade, welche in derselben Ebene liegen und auf jedem von beiden Teilen ins unendliche[18]) ausgezogen auf keinem von beiden einander treffen.

Anmerkungen zu den Erklärungen.

1) Griech. ὅροι s. v. w. „Abgrenzungen“ scl. der Begriffe. Die Erklärungen des Euclid sind von jeher Gegenstand heftigen Streites gewesen. Man hat der des Punktes vorgeworfen, dafs sie negativ sei, der der Geraden, Fläche etc., dafs sie keine Vorstellungen des Erklärten gebe; und selbst ein Mann wie Loria schliefst sich zustimmend an einen solchen Tadel Tyndals an. Als wenn Euclid auch nur den Versuch hätte machen wollen, jemandem, der kein Bild von der Geraden besitzt, ein solches durch Worte zu erzeugen. Da hätte er ebenso gut einem Blindgeborenen durch Worte die Anschauung der grünen Farbe geben können. Treffend sagt Lambert in: Briefe an Holland (Deutsch.

Gelehrt. Briefwechsel I, Bd. IV): „Dafs Euclid seine Definitionen vorausschickt und anhäuft, das ist gleichsam eine Nomenclatur. Er thut dabei weiter nichts, als was z. B. ein Uhrmacher oder anderer Künstler thut, wenn er anfängt seinem Lehrjungen die Namen seiner Werkzeuge bekannt zu machen.“

2) Das Wort σημεῖον (Semeion) bedeutet „Zeichen“, ein Raumzeichen, kein Raum ist dem Euclid der Punkt. Dem lat. Punkt entspricht genau das in Scholien vorkommende Wort Stigma, das Aristoteles und Archimedes gebrauchen. Zamberti hat signum, Campanus punctum; Holzmann (Xylander): Tipffelein. Die hier gegebene Auslegung ist, wie alles, schon dagewesen, sie findet sich bei Martianus Capella (s. Heiberg) (satyros): Punctum vero est cuius pars nihil est, sonst stets nulla, also Punkt ist, was keinen Teil hat. Verf. glaubt den Sinn des Euclid getroffen zu haben. Der Begriff „Punkt“ gehört zu den „Grenzbegriffen“, den notwendigen Abschlüssen von an sich (vermöge des psychischen Trägheitsgesetzes) unbegrenzt fortgesetzten Vorstellungsreihen. Der Punkt ist der Grenzabschlufs der Lokalisation, wird sie immer schärfer und schärfer fortgesetzt, so führt sie zu dem Grenzbegriff Punkt, besser „Ort“, der (vgl. Kerry System einer Theorie der Grenzbegriffe) zugleich mit einer Begriffsveränderung verbunden ist. Der Rauminhalt verschwindet, die Ortsbeziehung bleibt. Punkt nach unserer Interpretation des Euclid ist also die äufserste Grenze dessen, was wir noch als Raumvorstellung denken (nicht anschauen) können, und wenn wir darüber hinausgehen, hört nicht nur die Ausdehnung, sondern auch die Lagenbeziehung auf, und in diesem Sinne ist der Teil nichts (vgl. Max Simon, zu den Grundlagen nicht-Eucl. Geometrie Strafsburg, 1891).

Die Analogie, die der Punkt des Raumes mit dem der Zeit hat, hebt schon Proclus Fried. S. 93 hervor: er ist unteilbar wie das jetzt (τονῦν) und die Einheit (im Sinne der Pythagoräer).

Aus der Erzeugung des Punktes als Grenzbegriff gelangt man fast unmittelbar zu einer Identifizierung mit dem Unendlichkleinen jeder Art, dem Strecken-, Flächen- und Kugelelement, dem Differential in unserem Sinne, schon Xylander setzt seiner Erklärung hinzu: Das ist Anfang aller Gröfse, jedoch er selbst keine Gröfse, und Proclus S. 88: aber es liegt in ihm verborgen eine unbegrenzte Macht, Längen zu erzeugen. Diese Veränderung im Begriffe des Punktes taucht besonders deutlich bei der Auffassung der Tangente als Gerade, die ein Linienelement mit der Kurve gemein hat, auf. (Vieta.)

3) Euclid definiert den schwierigen Begriff Dimension (vgl. die eben zitierte Schrift) nicht, so wenig wie er den Raum definiert oder „Richtung". Das sind ihm gegebene Vorstellungen, wie Punkt, Gerade, Ebene in der projektiven Geometrie.

4) *πέρατα* würde am besten wiedergegeben mit: das, bis wohin (sich nämlich eine Linie erstreckt).

5) *εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' αὑτῆς σημείοις κεῖται.* Grammatisch kann der Dativ von *ἐξ ἴσου* abhängig gemacht werden, dann wäre er soziativ: die Gerade liegt in gleicher Weise wie ihre Punkte; so faſst es Proclus (Friedl. 109). Er sagt ausdrücklich: die Gerade ist die einzige Linie, deren Länge zwischen je zweien ihrer Punkte mit dem Abstand ihrer Punkte zusammenfällt. Die Begriffe Abstand und Richtung sind nicht nur nach Bolzano ursprüngliche schlechthin irreducible Grundbegriffe, sondern sicher auch nach der des Euclid. Läſst man den Dativ von *κεῖται* abhängen, so heiſst es: die Gerade liegt für (durch) ihre Punkte gleichmäſsig, und es wäre durchaus gestattet zu ergänzen, in Bezug auf die Richtung. Nimmt man *κεῖται* als Passiv von *τίθημι*, wie sehr oft bei Euclid, so hat man dem Sinne nach unsere Version: die Gerade ist durch ihre Punkte gleichmäſsig gegeben worden. Jedenfalls enthält *ἐξ ἴσου* keinen Zahlbegriff, sondern ist qualitativ, und es ist falsch, es mit „auf einerlei Art" zu übersetzen, wie nicht nur Lorenz und Mollweide (Klügel), sondern selbst Stäckel und Engel in der ausgezeichneten Theorie der Parallellinien gethan.

Diese Interpretation bringt Auffassungen hinein, die auf Archimedes zurückgehen, von dem auch die Definition als kürzeste Linie herrührt nach Angabe von Proclus (Geminos), wenn auch Killing sagt, daſs er sie bei Archimedes nicht habe finden können; sie entspricht durchaus dem Wesen des groſsen Mathematikers, der von der Erfahrung und Bewegung ausgeht; vgl. die Stelle bei Proclus 109, 17—20. Eben dort finden sich schon fast alle Erklärungen, die bei Schotten in dessen trefflichem: Inh. u. Meth. des plan. Unter. zusammengestellt sind und bei Pfleiderer in dessen so fleiſsigen Scholien.

Die von Schotten Gauſs zugeschriebene, daſs die Gerade beharrt, wenn sie um zwei ihrer Punkte rotiert, ist nicht von Leibniz, sondern ist auch schon bei Proclus. Die hier gegebene Interpretation vindiziert allerdings dem Euclid scheinbar einen logischen Fehler, denn die Erklärung paſst auf den Kreis (und die Schraubenlinie des Rotationszylinders, deren Verschiebbarkeit in sich selbst nicht bloſs dem Geminos, wie Knoche nach Proclus (Progr. Herford 1862) bemerkt, sondern

auch nach Proclus S. 105 dem Apollonius bekannt war). An der Definition der Geraden kann man gut den Weg von der Anschauung zur Logik verfolgen. Platon (Fiedl. 109, 21) definiert die Gerade als eine, „deren Mittleres die Enden beschattet", d. h. also als Weg des Lichtstrahls, also rein durch die Sinnlichkeit gegeben. Euclid in Definition 4 und den beiden Forderungen 1 und 2 faſst sie auf als die Linie, welche durch zwei Punkte bestimmt ist, rein logisch, ohne auch nur den Versuch zu machen, eine Vorstellung zu erwecken. Ich erwähne die Definition von Archimedes, die uns erhalten ist: Die gerade Linie teilt die Ebene in zwei Teile, die nur durch ihre entgegengesetzte Lage zu unterscheiden sind.

Man trifft sie seit Leibniz oft wieder ohne Quellenangabe. Euclid denkt die Gerade nicht in der Ebene, sondern für sich, und das ἐξ ἴσου könnte sich auch beziehen auf die völlige Unterschiedlosigkeit aller Richtungen bei jedem Punkte. Ich hebe noch hervor, daſs die Gerade, wenn sie erscheint, als Gerade erscheint, doch also von jedem Punkte auſser ihr als Gerade projiziert wird, welche „Gleichmäſsigkeit" der Kreis nicht hat. Wenn ich an der hier gegebenen Version festhalte, so geschieht es, weil der Ausdruck bei der Ebene wiederkehrt und zeigt, daſs ἐξ ἴσου κεῖται ein terminus technicus ist, den vielleicht der Eleat Parmenides geschaffen, wo ähnliche Wendungen bei der Kugel und sonst vorkommen (Diels, S. 29; S. 43; S. 49), dann aber ist es mehr als fraglich, ob Euclid eine Verschiebbarkeit in sich selbst mit beständiger Richtungsänderung als eine ἐξ ἴσου, als ein wirklich der Qualität nach gleiches liegen oder vielmehr (gesetzt) sein angesehen hat, ja es scheint mir beinahe sicher, daſs wie Parmenides die Kugel, so Euclid den Kreis vom Zentrum aus (aus dem Zentrum griech.), als gleichliegend angesehen hat. Dazu kommt, daſs Euclid den Kreis genau beschreibt, und dabei gar nicht von der Kreislinie, sondern von der Kreisfläche spricht. Noch bemerke ich die Variante μέρεσι statt σημείοις, wo also wohl die Richtungsgleichung ausgedrückt werden sollte in allen Teilen, und schlieſslich, daſs Duhamel bei seiner Interpretation ganz willkürlich den Artikel τοῖς weggelassen hat.

6) Die Fläche ist wohl der älteste, klar bewuſste geometrische Begriff, der aus der Anschauung der physischen Körper (goldener Wein im grünen Römer) erworben ist. In dem „nur" werden die drei Dimensionen als selbstverständlich vorausgesetzt.

7) Vgl. die Note 5. Die Definition würde auf den Rotationszylinder ebenfalls passen, sie wird eindeutig, wenn man (vgl. Simon,

zu den Grundlagen) statt Gerade „Richtung" sagt. Die gewöhnlich Robert Simson zugeschriebene Definition: die Ebene ist die Fläche, welche jede Gerade, die mit ihr zwei Punkte gemein hat, ganz enthält, ist schon bei Proclus erwähnt (Friedl. 117, Z. 8), an die sich Kästners eng anschliefst.

Auch von dieser Definition 7 gilt, was von der der Geraden gesagt ist; den aus der Anschauung im Laufe ungezählter Jahrtausende erworbenen Begriff bezw. die Vorstellung der Ebene setzt Euclid bei dem Hörer voraus.

8) Die Definition des ebenen Winkels ist oft getadelt worden, *κλίσις*, hier mit Biegung wiedergegeben, ist meist mit „Neigung" übersetzt worden, so auch von Heiberg, und bezieht sich zunächst auf die Änderung in der Richtung. Von da aus ist der Weg leicht zu der ebenso verbreiteten als schlechten Erklärung des geradlinigen Winkels als „Richtungsunterschied" zweier Geraden. Apollonius hebt an der angeführten Stelle die Zweideutigkeit, indem er (Friedl. S. 124) definiert: Der Winkel ist die Verengerung der Ebene oder des Raumes an einem Punkte infolge der Biegung von Linien oder Flächen; auch hier wie bei Euclid handelt es sich also nur um eine Worterklärung (Lambert), nicht um eine die Vorstellung des Winkels in der Anschauung erzeugende. In Schottens vergleichender Planimetrie füllt die Definition des Winkels 40 Seiten, die von mir (?) herrührende findet sich im zweiten Teil erwähnt. Der (geradlinige) Winkel ist die Grenze des Kreissektors bei über jedes Mafs wachsendem Radius. Zu bemerken ist, dafs Euclid vom krummlinigen Winkel nur sehr selten Gebrauch macht; III, 17 etc. Dafs Euclid den Winkel (stets geradlinig) im wesentlichen als eine Flächengröfse auffafst, siehe Definition 9, *περιέχουσαι*, und wenn er stets sagt: der Winkel „*ὑπὸ*" z. B. *αβγ*, so ist zu ergänzen *περιεχομένη*, und das *ὑπὸ* ist das Subjekt des Aktivs im Passiv, es heifst also nicht „sub", sondern „ab", d. h. der Winkel, welchen der gebrochene Linienzug *αβγ* enthält, und das ist auch vollkommen klar, da er unmittelbar vom Winkel als der nicht völlig begrenzten Fläche, zum „*σχῆμα*", der völlig begrenzten Fläche übergeht.

Ich füge noch hinzu, dafs selbst bei Proclus, noch also 400 n. Chr., die Winkel auf solche, welche kleiner als zwei rechte sind, beschränkt sind. Vermutlich um der Eindeutigkeit der Fläche zwischen zwei Rechten; die Ausschliefsung des „flachen Winkels" zeigt, dafs das „Richtungselement" zurücktritt, denn einen schärferen Richtungsunterschied als den zwischen zwei entgegengesetzten Rechten giebt es nicht.

Die Übersetzung von ἁπτομένων mit „sich berührenden" bringt hier schon ganz unnötig die Frage vom Kontingenzwinkel hinein (vgl. III 17).

9) Euclid unterscheidet nicht wie wir zwischen Strecke, Strahl und Gerade, sondern hilft sich durch Zusätze wie begrenzte Gerade, die beiden Teile (für die beiden Strahlen) an beiden Seiten eines Punktes etc.

10) ἐφεξῆς, der Reihe nach, wird bei Euclid oft für nebeneinanderliegend gebraucht, κάθετος „hinabgesandt" entspricht unserem „Senkrechte" und wird sich vermutlich wie dies auf das Bleilot beziehen, das diese Richtung giebt. Übrigens bildeten Definition 10, 11, 12 noch bei Proclus eine.

11) Grenze: ὅρος, das Äufserste: πέρας; beide Worte oft synonym, Proclus sagt: ὅρος wird von Flächen und Körpern, πέρας von Linien gebraucht (Friedl. 136). Rob. Simson hält sie für unecht.

12) Das Wort σχῆμα stammt von ἔχω, haben, halten, und bezeichnet also dasselbe wie unser „Gehalt" in der Geologie, goldhaltig etc. Unser Figur vom lateinischen fingere ist allgemeiner und bedeutet „Gebilde". Eine Anzahl zerstreuter Punkte kann man wohl als Figur bezeichnen, aber nicht als „schema" im Sinne Euclids.

13) Zu dem, was über die Gerade gesagt ist, ist noch zu bemerken, dafs Euclid sich eigentlich gar nicht mit der Kreislinie, sondern mit der Kreisfläche beschäftigt; während wir heute unter Kreis schlechtweg die Linie verstehen, ist bei Euclid die Fläche gemeint. Die Kreislinie wird von ihren Teilen unterschieden, die ebenfalls Peripherie genannt werden; erst die Araber führen das Wort Bogen für den Teil ein. Die Kreislinie heifst bei Proclus ἡ περιφερής.

14) Zentrum von κέντρον der Ochsenstachel, der Nagel, erinnert so recht deutlich an den empirischen Ursprung der Mathematik, deren Ablösung und Befreiung von den irdischen Resten gerade die Arbeit der Pythagoräer und Platoniker galt; doch bleibt ein Erdenrest zu tragen peinlich!

15) Quadrat; griech. Viereck schlechtweg; unter 100 Menschen werden 90, wenn man sie auffordert, ein Viereck zu zeichnen, annähernd ein Quadrat zeichnen, und wenn ein Dreieck, dann ein gleichseitiges, vgl. Simon, Elem. d. Geom. S. 48.

16) ἑτερόμηκες = von verschiedener Länge sc. der Seiten; man sieht deutlich, wie der empirische Gang sich hier geltend macht. Das Quadrat ist das ursprüngliche Viereck des Handwerkers, Baumeisters

u. s. w., dann kommt durch Verschiedenheit der Länge zweier benachbarten Seiten das Rechteck etc.

17) Aus dem Imperativ „καλείσθω“ geht deutlich hervor, dafs dieses Wort (Trapez, Tisch) von Euclid neu eingeführt wird.

18) εἰς ἄπειρον, richtiger „Zum Unendlichen“, eigentlich das, zu dem es kein Jenseits giebt; die Unendlichkeit des Raumes wird dabei stillschweigend vorausgesetzt.

Die heutige Fiktion, dafs Parallele ihren unendlichfernen Punkt gemein haben, rührt von Desargues 1639 her, und wurde aufser von Steiner auch von Newton gewürdigt. Die Definition, dafs es Gerade sind, die überall von einander den gleichen Abstand haben, die noch neuerdings von Hübner seiner trigon. Planim. zugrunde gelegt ist, hat ihren Ursprung nicht bei Wolf 1730, nicht einmal bei Clavius 1574 oder Petrus Ramus, sondern findet sich nach Proclus (Friedl. 176) schon bei Posidonius und ist nach demselben Autor (S. 178) von dem grofsen Geometer Géminos (etwa 100 v. Chr.) angenommen.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs hier schon in der Erklärung die Forderung der unendlichen Länge der Geraden ausgesprochen ist (als selbstverständliche und stillschweigende aus der angewandten Mechanik in die Geometrie hinübergenommene Thatsache), ohne welche die Parallelentheorie hinfällig wäre.

Forderungen.[1]

Es soll gefordert werden, dafs sich

1) von jedem Punkt bis zu jedem Punkt eine und nur eine Strecke führen lasse[2])

2) und diese Strecke sich kontinuierlich auf ihrer Geraden ausziehen lasse.[3])

3) Um jedes Zentrum sich mit jedem Abstand ein und nur ein Kreis zeichnen lasse.[4])

4) Und alle rechten Winkel einander gleich seien.[5])

5) Und wenn eine zwei Geraden schneidende Gerade mit ihnen innere an derselben Seite liegende Winkel bildet, die [zusammen] kleiner sind als zwei rechte, so schneiden sich die beiden [geschnittenen] Geraden bei unbegrenzter Verlängerung auf der Seite, auf der diese Winkel liegen.[6])

Anmerkungen zu den Forderungen.

1) Proclus sagt (vgl. L. Meyer, Progr. Tübingen 1885), dafs die Forderungen von den Grundsätzen sich unterscheiden wie die Aufgaben von den Lehrsätzen. Die ersteren verlangen Konstruktionen, die jeder leicht ausführen könne, die anderen Sätze, die jeder leicht zugäbe. Beiläufig vindiziert Meyer auf S. 15 dem Aristoteles einen ziemlich groben logischen Fehler, durch falsche Übersetzung des „δεῖται“ Friedl. S. 188, Z. 19; es ist hier wiederzugeben mit „ermangelt“ und nicht: bedarf. Aristoteles sagt: die Forderung ermangelt des Beweises, den man gerne geben möchte, wenn man nur könnte, während der Grundsatz von jedem ohne weiteres als richtig anerkannt wird.

Die Unterscheidung des Proclus pafst aber eigentlich nur auf das erste und dritte Petitum, und es darf daher nicht überraschen, wenn in die Handschriften eine Verwirrung eingerissen ist und sich z. B. in vielen Nr. 5 als (11.) Grundsatz findet und das schon vor Theon rezipierte „Gerade schliefsen keinen Raum ein“ sich im Vaticanus als Forderung 6 und in anderen Codices als Grundsatz 9 findet. Im übrigen wird die Fünfzahl der Postulata ausdrücklich hervorgehoben, vgl. Heiberg 7. 1. S. 8 Note. Die Unterscheidung des Proclus ist gewifs nicht die des Euclid, sieht man näher zu, so enthalten die „Aitēmata“ Grundthatsachen der Anschauung, die *κοιναὶ ἔννοιαι* (Axiome) (Grundsätze) aber Grundthatsachen der Logik.

2) Von den drei ersten Forderungen sagt Proclus (Meyer, Progr. Tübingen 1875): Diese drei Sätze sollen ihrer Klarheit wegen und weil darin etwas zu schaffen uns aufgetragen wird, nach Géminos notwendig unter die Forderungen gehören. Wir erinnern an die Bemerkung Newtons, 1 und 3 erhalten Probleme, die von der angewandten Mechanik ihre Lösungen empfangen haben. Darauf deutet auch der Ausdruck Ekbalein, „auswerfen“, der stets für das Verlängern von Strecken gebraucht wird, und er erinnert an die Konstruktion der Geraden mittelst des Seiles, das von einem Punkte aus zum anderen geworfen (und angezogen) wird.

3) *ἐπ' εὐθείας* der Folgerung 2 hat verschiedene Auslegung gefunden. Meyer l. c. sagt „in gerader Richtung“ (meint wohl „in derselben Richtung“), Engel und Stäckel „in gerader Linie“, Mollweide „gerade fort“ (schnureben von Pirkheimer).

Von Richtung steht kein Wort bei Euclid, erst bei Geminos findet sich (nach Proclus) die Erzeugung der Geraden durch „unge-

beugte" Bewegung, d. h. durch Bewegung ohne Richtungsänderung. Hätte Euclid sagen wollen: in gerader Linie, so hätte er ἐν mit dem Dativ genommen; ἐπὶ mit dem Genetiv bedeutet entweder „auf der Geraden" (wovon die begrenzte ein Teil ist) oder giebt bei den Verben der Bewegung das Ziel an, wie nach Thrazien gehen, oder, und so haben es Lorenz und Mollweide aufgefafst, es steht wie bei milit. Ausdrücken, wo unser „4 Mann hoch" mit ἐπὶ τεττάρων ausgedrückt wird; in allen diesen Fällen drückt es aus, dafs durch die Vorstellung des Teils, der Strecke, die des Ganzen, der Geraden, in der Anschauung erzeugt werden kann.

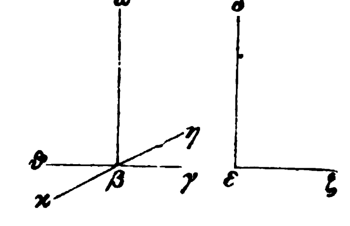
Die 1. Forderung sagt nach griechischem Sprachgebrauch im allgemeinen und dem des Euclid im besonderen, dafs hier die gröfstmöglichste Bestimmtheit herrscht, ausgedrückt durch den Wegfall des Artikels. Genau so, wie bei der Aufgabe Satz 11 und Satz 31, vgl. noch die Anmerkung zu Satz 31. Der bestimmte Artikel wird demonstrativ gebraucht, wenn auf ein Bestimmtes von vielen hingewiesen wird, gerade da, wo wir meistens den unbestimmten Artikel brauchen, also z. B. Satz 11 sagt Euclid: Hier in der gegebenen Geraden τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, wir sagen: Auf eine Gerade, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημαίου, von dem da auf ihr gegebenem Punkte, wir: von einem auf ihr etc. und fährt fort: πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν ἀγαγεῖν, ohne Artikel; wir sagen: Das Lot zu errichten. Proposition 16 steht μίας πλεῦρας, also das Zahlwort gerade, weil Vieldeutigkeit vorhanden ist.

Für unsere Auffassung von ἐπ' εὐθείας sprechen zahlreiche Stellen, z. B. die ἔκθεσις zu Satz 5, noch schärfer Satz 14, und besonders der Schlufs des Beweises, am schärfsten 44, die Konstruktion und dann der Beweis des Pythagoras 48. Die 1. Forderung sagt also aus, dafs zwischen zwei Punkten eine und nur eine Strecke möglich, die zweite, dafs durch eine Strecke die ganze Gerade eindeutig bestimmt ist. Forderung 2 hebt a) die Forderung der Unendlichkeit der Geraden noch einmal hervor, b) exemplifiziert sie das ἐξ ἴσου, insofern jede Strecke die ganze Gerade erzeugt, c) soll diese Forderung und nicht, wie Zeuthen will Nr. 4, die Eindeutigkeit der Fortsetzbarkeit aussprechen, bezw. wird sie als selbstverständlich (vgl. Schlufs der Definitionen) herübergenommen. Den Forderungen 1 und 2 schliefst sich noch die Definition 4 an, zusammen erst definieren sie die Gerade völlig und zwar nicht anschaulich, denn die Anschauung, das wiederhole ich, wird als selbstverständlich vorausgesetzt; zusammen sagen sie aus: die Gerade ist eine unterschiedslose und unendliche Linie, die

durch zwei ihrer Punkte völlig bestimmt ist. Ich verweise auch noch auf Duhamel (Les méthodes II p. 8, 9).

4) In der Annahme des Aorist folge ich Proclus wie August; die Handschriften (Heiberg) haben γράφεσθαι.

5) Forderung 4 ist nach Proclus von Géminos und anderen angegriffen als beweisbar. Wir geben hier den Beweis des Géminos: Wäre $\alpha\beta\gamma > \delta\varepsilon\zeta$ und legte man $\delta\varepsilon\zeta$ auf $\alpha\beta\gamma$, so dafs $\alpha\beta$ und $\delta\varepsilon$ zusammenfallen, so fiele $\varepsilon\zeta$ als $\beta\eta$ innerhalb und dann wäre $\varkappa\beta\alpha$, das nach Vorigem gleich $\alpha\beta\eta$ ist, $> \vartheta\beta\alpha$, also auch $> \alpha\beta\gamma$, also $\delta\varepsilon\zeta$ zugleich kleiner und gröfser als $\alpha\beta\gamma$.



Der Beweis setzt voraus, dafs die Verlängerung von $\eta\beta$ sich nicht mit $\vartheta\beta$ decken könne, d. h. also, dafs eine Strecke sich nur auf eine Weise zu einer Geraden verlängern lasse. Darin hat Zeuthen recht, aber dies zu sagen wäre die Forderung einer seltsamen Form und Euclid hat eine ganze Anzahl stillschweigender Voraussetzungen, ohne die keine geon., d. h. anschauliche Geometrie existieren kann, bezw. hat er diese Forderung in Nr. 1 und 2 ausgesprochen. Dem „Geminos und den anderen“ ist die strenge Arist. Auffassung der „Bewegung“ verloren gegangen, der Beweis verlangt ja auch die Verschiebbarkeit und Drehung der Ebene in sich selbst, bezw. die dritte Dimension, und die will und kann Euclid von seinem Standpunkt nicht zu Hilfe nehmen; so bleibt ihm nur übrig, zur „Forderung“ seine Zuflucht zu nehmen, welche ihm zugleich die Eindeutigkeit des Lotes in einem Punkte auf eine Gerade giebt und die Verschiebbarkeit etc. der Ebene ersetzt.

6) Forderung 5 ist das unter dem Namen des Parallelenaxioms (Parax) bekannte „Kreuz“ der Mathematik, der „Flecken“, mit dem nach Savile und Saccheri das grofse Werk des Euclid behaftet war, bis es durch Gaufs und Schweikart klar wurde, dafs sich, wie stets, aus der Wunde die Neubildung entwickeln mufste. Die Litteratur des Parax füllt bei Riccardi (Mem. d. Bol. S. V T. I. 1890) 20 Quartseiten. Ich nenne die erste selbständige Druckschrift, die des P. A. Cataldi, des Entdeckers der Kettenbrüche, von 1603, und die drei letzten mir bekannten, alle drei noch aus dem Jahre 1891, E. v. Schmidt, Euclids 11 Axiome durch eine neue Definition der geraden Linie bewiesen, Iselin, die Grundlagen der Geometrie und F. Pietzker, kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie. Der Überblick über das Parax, den ich 1890 (gedruckt 1891) im Supple-

mentband der 4. Aufl. des Meyerschen Lexikons gab*), ist jetzt weit überholt durch die Darstellung bei Stäckel und Engel und diese wieder durch den Artikel von Robert Bonola in dem schönen Sammelband, den Enriques unter dem Titel Questioni riguard. la geom. elem. 1900 herausgegeben hat. Aber es ist eine Pflicht, hier der ersten kritischen Sichtung des Materials durch Klügel zu gedenken, der in seiner Dissertation Göttingen 1763 in der bescheidenen Form, wie es dem Anfänger ziemt, seiner Ansicht über die Unbeweisbarkeit des Axioms Ausdruck gab.

Die Forderung 5 heifst häufig 11. Axiom, weil sie in vielen Codices als solche steht, aber schon Zamberti hat sie richtig. Durch Proclus wissen wir, dafs sie eigentlich beständig angegriffen wurde, z. B. von Ptolemäus, und zwar ist der Grund klar. Die Erfahrung der Männer der Praxis schuf die Geometrie, die Geometrie vertiefte die angewandte Mathematik, aber die Skrupel eines Euclid über die Bewegung wurden von den Ingenieuren und Astronomen nicht geteilt; von ihrem Standpunkt aus war die Forderung des Euclid unanschaulich, da die wirkliche Bewegung das Nichtschneiden gar nicht, und das Schneiden in praxi meistens auch nicht konstatieren konnte. In dieser Hinsicht ist der Beweis von der Unrichtigkeit der Euklid. Forderung bei Proclus S. 570 ganz ungemein lehrreich. Euclid war weit schärfer. Er wollte, was Proclus ganz richtig bemerkt, den Satz B. I. 6: „in jedem Dreiecke sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte“ umkehren. Der Beweis gelang ihm, aller Bemühung ungeachtet, nicht, er erkannte, dafs hier eine neue Forderung nötig sei, um der Thatsache, dafs in unserm Raume zwei richtungsverschiedene Geraden sich nach unserer Anschauung schneiden, gerecht zu werden. Proclus kritisiert zuerst den Beweis des Ptolemäus, dann stellt er das Axiom auf: Der Abstand zweier hinlänglich entfernten Punkte, zweier sich schneidender Geraden wächst über jedes Mafs. Er beruft sich auf Aristoteles, der es aufgestellt „als er die Endlichkeit der Welt bewies“, gerade dann ist es falsch! Proclus beweist dann: wenn eine Gerade die eine von zwei parallelen Geraden schneidet, so schneidet sie auch die andere. Das ist das Parax in der Fassung unserer Lehrbücher: Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Parallele möglich. Die Kritik des Beweises durch Clavius, der sich Saccheri anschliefst, ist falsch; der Fehler liegt darin, dafs

*) Für die 5. Aufl. übernehme ich nur die Verantwortung für die Artikel von A bis O.

der Abstand zweier Nichtsichschneidender ebenfalls unendlich werden kann. Clavius ersetzt dann das Parax durch ein anderes, das er allerdings durch seine Auffassung der Definition 4 zu beweisen glaubt: Der Ort der Punkte, welche von einer Geraden gleichen Abstand haben, (die Abstandslinie), ist eine Gerade. Es mag gleich hier bemerkt werden, dafs alle die Beweisversuche darauf hinauskommen, das Parax des Euclid durch ein anderes zu ersetzen, bezw. es implicite enthalten. Beinahe unmittelbar klar ist, dafs das Parax des Euclid sich deckt:

1. mit der Existenz des Rechtecks oder, was dasselbe ist, mit dem Satz: Die Winkelsumme im Dreieck ist zwei Rechte,

2. mit der Existenz ähnlicher Dreiecke,

3. mit dem Satz: Der Peripheriewinkel im Halbkreis ist ein Rechter,

4. mit dem Satz: Durch drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, ist stets ein Kreis möglich, oder, was dasselbe ist: Zwei Gerade, welche auf sich schneidender senkrecht stehen, schneiden sich ebenfalls.

Weniger unmittelbar ist die Identität bei der Fassung Legendre's: Durch jeden Punkt (nicht wie es bei Balzer 3. Aufl. irrtümlich heifst „durch einen") im Innern eines Winkels läfst sich eine Gerade ziehen, welche beide Schenkel schneidet. Noch indirekter ist der Zusammenhang bei Gaufs (Brief an Bolyai 1799): wonach ein (einziges) geradliniges Dreieck, dessen Inhalt gröfser als jede gegebene Fläche, genügt zum Ersatz des Parax. Noch abstrakter ist die Fassung: Man kann mit Flächen rechnen, d. h. es gilt das kommutative und assoziative Gesetz, denn dies Axiom verlangt den Pythagoras und dieser das Parax (Simon 1890).

An Clavius schliefst sich Borelli, dessen Euclides restitutus seit 1658 rasch eine Reihe von Auflagen erlebte; hier findet sich die wesentliche Auffassung der Parallelen als Geraden, welche auf derselben dritten senkrecht stehen, sowie Wallis, der als Savilischer Professor von amtswegen sich mit Euclid beschäftigen mufste. Er gab 1651 eine Kritik der Parallelentheorie Nasur ed Dins und hielt 1665 eine Vorlesung in Oxford, wo er das Parax des Euclid durch die Forderung der Ähnlichkeit ersetzte. Von diesen Vorgängern, in erster Linie von seinem Ordensbruder Clavius, angeregt, folgt Saccheri, von dem die nichteuclidische Geometrie gezählt wird. Saccheri zeigt zuerst die aprioristische Gleichberechtigung dreier Geometrien, und indem er zwei widerlegt, bezw. zu widerlegen sucht, bleibt als dritte die Euclidische übrig. Auf Saccheri folgt Lambert, vielleicht das gröfste Genie des

18. Jahrh.; über Saccheri hinausgehend, bemerkt er, dafs die eine der beiden „fremden“ Geometrien auf der Kugel, die andere auf einer imaginären Kugel ihre Gestaltung fände. Lambert und Saccheri zeigen sehr viel Übereinstimmung, das würde mich nicht veranlassen, an einen direkten Einflufs Saccheri's auf Lambert zu glauben, ich würde auch niemandem als mir selbst glauben, dafs, als ich 1890 meine Elemente der Geometrie mit Rücksicht auf die abs. Geometrie schrieb, ich von Lambert keine Ahnung hatte. Aber Lambert wurde durch Klügel wieder an die Parallelentheorie erinnert, bei Klügel ist Saccheri besprochen; das Werk Saccheri's war schon durch seine Stellung im Orden ein verbreitetes; es ist eigentlich stets erwähnt worden, z. B. hat Pfleiderer S. 87 Saccheri und Lambert voll gewürdigt. Lambert lebte in Chur in engstem Zusammenhang mit der gelehrten Welt Churs, wo er den eigentlichen Grund zu seiner wissenschaftlichen Bedeutung gelegt hat, es wäre sehr unwahrscheinlich, dafs er in dieser speziell von jesuitischer Gelehrsamkeit durchtränkten Atmosphäre den Saccheri nicht kennen gelernt hätte.

Lamberts Abhandlung erschien als Nachlafs-Werk in Hindenburgs Archiv von 1786, dem angesehensten deutschen wissenschaftlichen Journal der Zeit; dafs Gaufs es las, wissen wir, und so wirkt das Gesetz der Kontinuität auf Gaufs, der als der erste die Zufälligkeit der euclid. Raumform erkannte, dem die logische Gleich- ja Überberechtigung der anderen Geometrien klar war, und der mit vollem Bewufstsein die Konsequenzen der logischen Unbeweisbarkeit der 5. Forderung zog.

Nur darf man nicht glauben, dafs Gaufs je an der thatsächlichen Richtigkeit des Satzes für unsern Raum gezweifelt habe, so wenig, wie an der der Dreidimensionalität des Raumes, obwohl er auch hier das logisch Hypothetische erkannte. Gaufs ist also der Begründer der nichteucl. Geometrie, obwohl er seiner Gewohnheit nach so gut wie nichts darüber veröffentlichte. Unabhängig von Gaufs gelangte etwa 1818 Schweikard zu einer von der 5. Forderung unabhängigen Geometrie. Zum Verständnis diene folgendes:

Es seien g und h zwei Gerade, welche auf derselben Dritten in A und B senkrecht stehen, dann sind zwei Hauptfälle denkbar, welche sich wieder in je zwei Unterfälle spalten: g und h können sich nicht schneiden, oder können sich schneiden. Im Falle 1) kann a) die Gerade h die einzige g Nichtschneidende durch A sein, b) kann ein ganzes Bündel davon existieren, gehälftet von h, welches von den Schneidenden durch zwei symmetrisch zu AB gelegenen Grenzgeraden

— die beiden Parallelen — getrennt wird. Im Falle 2) können g und h sich a) in seinem Punkte x schneiden, der dann links und rechts gleich weit von AB entfernt ist, oder b) in zwei Punkten x und y, symmetrisch zu AB gelegen. Zeigt man, daſs AB eine Mitte hat, so ist vermöge des Axioms von der Ebene leicht zu zeigen: Wenn einer dieser Fälle einmal eintritt, so muſs eben dieser immer eintreten. Je nachdem werden vier Geometrien als Euclidische, Lobatschewskische, Klein-Cliffordsche und Riemannsche unterschieden.

Die ersten, welche nichteucl. Geometrie veröffentlichten, waren Lobatschewski (Vortrag zu Kasan 12. Febr. 1826) und Johann Bolyai im Appendix 1832. Durch die Veröffentlichung von Riemann's Habilitationsvortrag: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen 1861, in der die Möglichkeit einer Endlichkeit des Raumes und einer n-Dimensionalität zugelassen wurde, wurde dann die Beschäftigung mit der Grundlage der Geometrie zu einer der brennendsten Tagesfragen.

Wir haben noch einen Seitenweg zu verfolgen:

Im Jahre 1639 (Brouillon project. ed. Poudra 1864) beseitigte der eigentliche Begründer der modernen projektiven Geometrie, Desargues, durch Einführung des unendlich fernen (uneigentlichen) Punktes den Unterschied zwischen sich schneidenden und parallelen Geraden. Da bei Projektion eigentliche und uneigentliche Punkte in einander übergehen, so wurden die bei beliebigen Projektionen bleibenden projektiven Eigenschaften als vom Parax unabhängig erfunden. Die Geometrie der Lage, welche in Staudt und Reye ihre hervorragendsten Vertreter fand, kam nun ebenfalls zu der Notwendigkeit Maſsbestimmungen projektiv zu definieren. Indem Cayley und Felix Klein die Möglichkeiten dieser Maſsbestimmungen untersuchten, ergaben sich ihnen wieder die verschiedenen Geometrien, welche nach Klein mit Rücksicht auf die Polarkurve bezw. Fläche Elliptische (Riemann, Klein), Parabolische (Euclid), Hyperbolische (Lobatschewski) Geometrie heiſsen.

Jede der Geometrien hat, soweit sie planim., ihre Versinnlichung auf einer Fläche, die Riemannsche auf der Kugel, die Klein-Cliffordsche im Strahlenbüschel, die Euclidsche auf der Ebene (bezw. Halbkugel, wenn man $\frac{\pi}{2} = \infty$ setzt), die nichteucl. auf der Pseudosphäre bezw. im Innern eines Kegelschnitts. Die wesentlichen Abweichungen der nichteucl. Planimetrie von der gewöhnlichen sind:

1. Durch jeden Punkt giebt es zu jeder Geraden zwei Parallelen, oder die Gerade hat zwei uneigentliche unendlich ferne Punkte.

2. Im Dreieck ist die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte.

3. Die Fläche des Dreiecks ist dem sphärischen Exzeſs

$$(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

proportional, und es giebt ein absolut gröſstes Dreieck mit der Winkelsumme 0.

4. Der Ort der Punkte, die von einer Geraden gleichen Abstand haben, ist eine Kurve, deren Tangente auf den Loten senkrecht steht.

5. Der Kreis mit unendlich groſsem Radius ist keine Gerade, sondern eine, wie die Abstandslinien, in sich verschiebbare Kurve Grenzkreis.

6. Zwei Nichtsichschneidende besitzen eine gemeinsame Senkrechte.

7. Alle Streifen (d. h. Stücke der Ebene zwischen zwei Parallelen) sind kongruent.

8. Der Parallelenwinkel hängt von der Distanz und einer Konstanten ab.

Das Verdienst, die Lehrer Deutschlands auf die neue Entwickelung hingewiesen zu haben, hat zunächst Balzer, der sie, wie auch Frischauf Elem. der abs. Geometrie 1876, wohl durch Hoüel's französische Übersetzung kennen lernte. Balzer hat Legendre (Noten), Lobatschewski, Bolyai in seinen Elementen der Mathematik erwähnt, die leider stark in Vergessenheit geraten zu sein scheinen. Wie gering das Verständnis für das System und die Verkettung und gegenseitige Abhängigkeit der Voraussetzungen, welche der Geometrie zugrunde liegen, noch heute ist, bewies ein Vortrag, den vor wenigen Jahren Herr Schotten unter dem Beifall der Zuhörer im Verein für Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hielt.

Grundsätze.[1]

1) Was demselben [dritten] gleich ist, ist unter sich gleich.[2]

2) Und wird Gleiches zu Gleichem hinzugesetzt, so sind die Ganzen gleich.

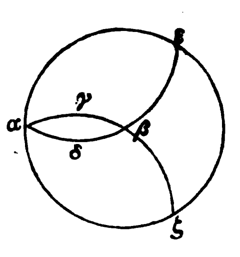
3) Und wird [Gleiches] von Gleichem weggenommen, so sind die Reste gleich.

8) Und das Ganze ist gröſser als sein Teil.[3]

7) Und einander Deckendes ist gleich.[4]

Anmerkungen.

1) Euclid hat κοιναὶ ἔννοιαι. „Allen Vernünftigen gemeinsame Annahme". Proclus „Axiome" eigentlich „Meinungen", aber nach dem Sprachgebrauch des Aristoteles allgemein angenommene logische Sätze, die man nicht beweisen kann, weil sie die logischen Grundlagen des Beweises sind. Proclus hat nur die fünf angeführten, und korrekterweise 8 vor 7, da 7) nicht rein logisch ist, sondern von dem Zusammenfallen in der Anschauung ausgeht, um daraus den logischen Schlufs der Gleichheit zu ziehen. Proclus erwähnt die apokryphen 4, 5, 6, 9, von denen 9 (in etwas anderer Form bei Proclus): Gleiches zu Ungleichem giebt Ungleiches, nach Proclus von Pappus herrührt, 5 und 6 offenbar überflüssig sind und 9): Zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein, unter die Forderungen gehört, wo er sich auch oft findet, und von Proclus als überflüssig bekämpft wird. Den Beweis von Proclus (F. S. 239) macht die Figur klar: Wenn $\alpha\delta\beta\varepsilon$ und $\alpha\gamma\beta\zeta$ zwei Durchmesser wären, so müfsten die Bogen $\alpha\varepsilon$ und $\alpha\varepsilon\zeta$ gleich sein, was unmöglich (aufser, wenn wie in der Riemannschen Raumform beide gleich 0 sein könnten); aber Proclus setzt hinzu: Der „Stoicheiotes", der das wufste (nämlich: zwei Gerade etc.), sagte in der 1. Forderung, dafs sich von jedem Punkt zu jedem Punkt eine gerade Linie ziehen lasse, d. h. dafs eine Gerade stets die beiden Punkte verbinden könne, aber nicht zwei. Somit ist also meine Auslegung der Forderung 1 durch Proclus bestätigt.



2) Das Wort „Gröfse" ist vermieden, Proclus erklärt die Unbestimmtheit, die in dem Plural des Neutr. liegt, ganz richtig mit der allgemeinen Giltigkeit für Raum, Zahl, Zeit etc.

3) Axiom 4 gilt nur für endliche Gröfsen, in der nichteucl. Geometrie ist der halbe Streifen dem Ganzen kongruent; in der Euclidischen kann das Parax auch ersetzt werden durch den Satz: Mit den unendlichen Flächengröfsen kann nach den für endliche giltigen Regeln gerechnet werden, was Euclid übrigens ganz naiv thut, z. B. 1. Prp. 15.

4) Axiom 7 ist von Schopenhauer „Welt als W. u. V." Th. 2 S. 143 angegriffen, weil es entweder eine Tautologie ist oder Bewegung voraussetzt. Es ist von Bolzano und Grafsmann durch das Prinzip: „Dinge, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind gleich" ersetzt. Sch. hat Euclid gar nicht verstanden, Euclid braucht Axiom 7 zuerst

beim Beweis des ersten Satzes. Nur aus diesem Axiom folgt, dafs $AB = BA$ ist, ein Satz, an dessen rein logischem Beweis verzweifelnd, Bolzano die rein logische Begründung der Geometrie aufgab.

Technologie.

Es folgen nun die 48 „Protasis“ (Propositionen, Sätze) des ersten Buches. Die Sätze zerfallen in „Probleme“ [Aufgaben, die zur Erzeugung (γενεσις) eines Gebildes führen] und „Theoreme“ (Lehrsätze). Den Unterschied definiert Proclus (S. 201), wo er von der „Technologie“ des Euclid, um mit Tannery (Géom. grecque 1887) zu sprechen, handelt, wie folgt: „Bei den Problemen handelt es sich darum, Fehlendes sich zu beschaffen, anschaulich hinzustellen und mit den Kunstmitteln (Lineal und Zirkel) zu erzeugen. Im „Theorem“ nimmt man sich vor das Vorhandensein einer Eigenschaft bezw. das Nichtvorhandensein zu sehen, zu erkennen, zu beweisen. Jedes Problem aber und jedes Theorem, das aus seinen vollständigen Teilen zusammengesetzt ist, mufs folgendes in sich enthalten: 1) Vorlage (Prótasis), 2) Feststellung des Gegebenen (ékthesis), Voraussetzung, 3) Feststellung des Geforderten (Diorismós), Behauptung, 4) Konstruktion (Kataskeuë), 5) Beweis (Apódeixis), 6) Schlufs (Sympérasma). „Die Protasis sagt aus, was gegeben und was gefordert wird, denn die vollständige Protasis besteht aus beidem. Die Ekthesis [Voraussetzung] setzt das Gegebene an und für sich [d h. ohne Rücksicht auf das Geforderte] genau auseinander und arbeitet dadurch der Untersuchung vor. Der Diorismos [Forderung, Behauptung] aber macht das Gesuchte, es sei, was es sei, an und für sich deutlich.“ Der Ausdruck Diorismos wird hier bei Proclus anders gebraucht, wie bei Pappus: Peyrard hat Prodior. Bei Pappus bezeichnet Diorismos genau das, was wir heute Determination nennen, d. h. die Angabe derjenigen Einschränkungen in Bezug auf die gegebenen Stücke, welche zur Ausführbarkeit der Konstruktion nötig sind. Die Kataskeue fügt das hinzu, was dem Gegebenen zur Erlangung des Gesuchten mangelt. Proclus sagt zur „Jagd“ (θηραν), und braucht das Bild wiederholt, so alt ist das Bewufstsein des Kampfes des Mathematikers mit seinem Problem. Die Apodeixis leitet das Vorliegende logisch von dem, was bereits

feststeht, ab. Das Symperasma aber kehrt wieder zur Vorlage zurück, indem es den bewiesenen Satz klar und deutlich ausspricht. Und dies sind alle Teile, sowohl der Probleme als der Theoreme.

Am notwendigsten aber und in allen vorhanden sind die Vorlage, der Beweis und der Schlufs. Denn man mufs a) vorher wissen, was zu suchen ist, und b) es durch eine Kette von Schlüssen beweisen, und c) das Resultat einsammeln. Die andern Teile fehlen mitunter, wie Diorismos und Ekthesis bei dem Problem: Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, worin jeder Basiswinkel das doppelte des Winkels an der Spitze.

Dies tritt ein, sagt Proclus, wenn die Vorlage kein Gegebenes (wir sagen keine Voraussetzung) enthält (d. h. wenn es ausgelassen ist, wie in dem c. Beispiel die Basis des Dreiecks), wie oft in den arithmetischen Büchern und im Buch 10, Satz 29: Eine 4. Wurzel zu konstruieren (bei gegebener, aber nicht erwähnter Einheitsstrecke). Und Proclus sagt auch den Grund: Das Gegebene fehlt (d. h. ist als selbstverständlich verschwiegen) und der Diorismos würde zu einer einfachen Wiederholung der Vorlage. Die Konstruktion aber fehlt in weitaus den meisten Theoremen, da die Ekthesis hinreicht, um ohne einen Zusatz (scl. von Zeichnung) das Vorgesetzte [d. i. die Figur, um die es sich handelt] sichtbar zu machen.

Hin und wieder finden sich Hilfssätze, Lēmma und Zugaben, Pórisma. Lemma ist eigentlich in der Geometrie ein Satz, der [noch] des Beweises bedarf, den wir für eine Konstruktion und einen Beweis einstweilen annehmen, vorbehaltlich des Beweises, und der sich durch diesen Vorbehalt von den Axiomen und Forderungen unterscheidet, welche wir, ohne dafs sie bewiesen, zur Rechtfertigung anderer Sätze herbeiziehen. Porisma ist ein Zusatz, der sich beim Beweis eines anderen als eine „Gottesgabe“ ungewollt von selbst ergiebt, im wesentlichen also eine andere Fassung des bewiesenen Satzes. Übrigens sind die meisten Lemma und Porisma verdächtig, so fehlt z. B. das Porisma zu 1, 15, obwohl es sich bei Proclus findet, in den besten Handschriften. Bei Gelegenheit dieses Porisma geht Proclus auch auf die andere Bedeutung des Wortes „Porisma“ ein (vgl. S. 5). Demnach handelt es sich bei dem Porisma darum, etwas, dessen Existenz feststeht, zu finden, während bei dem Problem durch die Konstruktion auch die genesis gegeben, d. h. die Frage der Existenz entschieden wird. Proclus führt als Beispiel vom Porisma an: Das Zentrum eines gegebenen Kreises zu finden und zu zwei kommensurablen Strecken das gröfste gemeinsame Mafs zu finden.

Zu bemerken ist, dafs in den guten Handschriften, abgesehen vom Vaticanus, sich weder Überschriften noch Bezeichnungen der einzelnen Teile finden, die Sätze sind numeriert, und selbst dies ist vermutlich nicht Original, da Euclid nicht auf die betreffende Nummer verweist, sondern den einschlagenden Satz vollständig angiebt. Das Schleppende der Darstellung veranlafste vermutlich die Bezifferung und zwang zu Abkürzungen. Übrigens erklärt sich die Breite, wenn man sich vergegenwärtigt, dafs das Original zum mündlichen Vortrag im Kolleg vor Studenten der Universität Alexandria bestimmt war.

[Satz] 1.

[Aufgabe.] Auf einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

[Voraussetzung.] Gegeben sei die Strecke AB.

[Forderung.] Es ist erforderlich, auf der Strecke AB ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.

[Konstruktion.] Um das Zentrum A werde mit dem Radius AB der Kreis $B\Gamma\Delta$ beschrieben und wiederum um das Zentrum B mit dem Radius BA der Kreis $A\Gamma E$, und von Γ, dem Punkt, in welchem sich die Kreise schneiden, mögen nach den Punkten A, B die Verbindungsgeraden ΓA, ΓB gezogen werden (Fig. 1).

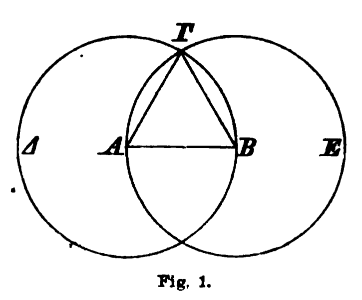


Fig. 1.

[Beweis.] Und da Punkt A Zentrum des Kreises $\Gamma\Delta B$ ist, ist (die) $A\Gamma$ gleich (der) AB; wiederum, da Punkt B Zentrum des Kreises ΓAE ist, ist $B\Gamma$ gleich BA. Es wurde aber gezeigt, dafs auch ΓA gleich AB. Jede von beiden ΓA, ΓB ist also AB gleich. Demselben gleiches ist aber unter sich gleich; folglich ist auch ΓA gleich ΓB. Also sind die drei, nämlich ΓA, AB, $B\Gamma$ einander gleich.

[Schlufs.] Also ist das Dreieck $AB\Gamma$ gleichseitig und steht auf der gegebenen Strecke AB. Was zu bewirken war.

Zu bemerken ist, dafs Euclid aus der Anschauung entnimmt, dafs die Kreise sich schneiden, und aus Axiom 5, dafs AB gleich BA ist.

2.

Von einem gegebenen Punkt eine Strecke, welche einer gegebenen gleich ist, zu ziehen.

Es sei der gegebene Punkt A, die gegebene Strecke $B\Gamma$.

Gefordert von Punkt A eine der gegebenen Strecke $B\Gamma$ gleiche Strecke zu ziehen.

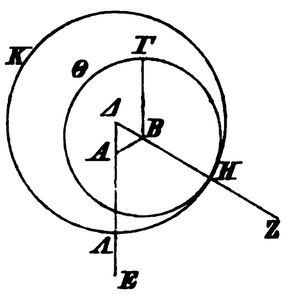


Fig. 2.

Es werde A mit B durch die Strecke AB verbunden, und auf ihr das gleichseitige Dreieck ΔAB errichtet, und ΔA, ΔB um AE, BZ verlängert und um das Zentrum B mit dem Radius $B\Gamma$ der Kreis beschrieben $\Gamma H\Theta$ und dann um das Zentrum Δ mit dem Radius ΔH der Kreis $HK\Lambda$.

Da nun B Zentrum des Kreises $\Gamma H\Theta$ ist, so ist $B\Gamma$ gleich BH, ferner, da Δ Zentrum des Kreises $HK\Lambda$ ist, so ist $\Delta\Lambda = \Delta H$, deren Stücke ΔA und ΔB gleich sind. Der Rest $A\Lambda$ ist also dem Rest BH gleich. Es wurde aber $B\Gamma$ als BH gleich erwiesen. Jede von den beiden $A\Lambda$ und $B\Gamma$ ist also BH gleich. Aber demselben gleiches ist unter sich gleich. Folglich ist auch $A\Lambda$ gleich $B\Gamma$.

Es ist also an Punkt A die der gegebenen Strecke $B\Gamma$ gleiche Strecke $A\Lambda$ angelegt; w. z. bewirken war.

3.

Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, von der gröſseren eine der kleineren gleiche Strecke abzuschneiden.

(Fig. 3.) Es mögen AB und Γ die gegebenen Strecken sein, von denen AB die gröſsere ist. Gefordert etc.

Lege an A eine Γ gleiche Strecke $A\Delta$ an; beschreibe um A mit dem Radius $A\Delta$ den Kreis ΔEZ.

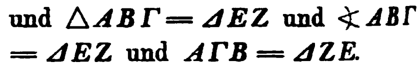
Fig. 3.

Und da A Zentrum des Kreises ΔEZ, so ist $AE = A\Delta$, aber auch $\Gamma = A\Delta$, daher sind beide Strecken AE, Γ der Strecke $A\Delta$ gleich, also auch $AE = \Gamma$. Also ist etc. . . . ., w. z. bewk. war.

4.

Wenn zwei Dreiecke in zwei Seitenpaaren und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen, so sind auch die dritten Seiten gleich, und die Dreiecke sind gleich [der Fläche nach] und die Winkel sind gleich, welche den gleichen Seiten gegenüberliegen.

Es seien $AB\Gamma$, ΔEZ zwei Dreiecke (Fig. 4), so dafs $AB = \Delta E$; und $A\Gamma = \Delta Z$ und $\sphericalangle\ BA\Gamma = E\Delta Z$. Ich behaupte, dafs noch $B\Gamma = EZ$


und $\triangle AB\Gamma = \Delta EZ$ und $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$ und $A\Gamma B = \Delta ZE$.

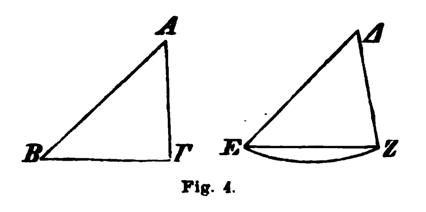
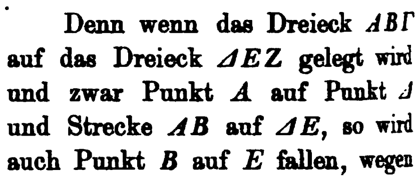


Fig. 4.


Denn wenn das Dreieck $AB\Gamma$ auf das Dreieck ΔEZ gelegt wird und zwar Punkt A auf Punkt Δ und Strecke AB auf ΔE, so wird auch Punkt B auf E fallen, wegen der Gleichheit von AB und ΔE. Nachdem aber AB auf ΔE gefallen ist, wird auch der Strahl $A\Gamma$ auf ΔZ fallen, wegen der Gleichheit der Winkel $BA\Gamma$ und $E\Delta Z$; so dafs auch Punkt Γ auf Punkt Z fallen wird, weil wiederum Strecke $A\Gamma = \Delta Z$ ist. Es war ja aber schon B auf E gefallen; daher wird die Basis $B\Gamma$ auf die Basis EZ fallen. Denn wenn, nachdem B auf E, Γ auf Z gefallen ist, die Strecken $B\Gamma$ und EZ nicht zusammenfallen würden, dann würden zwei Gerade einen Raum einschliefsen, was unmöglich ist. Folglich wird die Basis $B\Gamma$ auf EZ fallen, und wird so ihr gleich sein, so dafs noch das ganze Dreieck $AB\Gamma$ mit dem ganzen Dreieck ΔEZ zusammenfallen wird und ihm gleich sein wird, und die übrigen Winkel sich auf die übrigen legen und ihnen gleich sein werden, und zwar $\sphericalangle\ AB\Gamma$ dem Winkel ΔEZ und $A\Gamma B$ dem $\sphericalangle\ \Delta ZE$.

Wenn also zwei Dreiecke in zwei Seiten etc. . . . .

Was zu beweisen war.

Beim Beweis dieses Satzes, des ersten Kongruenzsatzes, ist die Bewegung zu Hilfe genommen, und zwar nur bei diesem planimetrischen Satz und seiner Umkehrung I, 8. Der ganze Beweis macht schon wegen der späteren Fassung des Axioms 1: Zwei Gerade schliefsen keinen Raum ein, den Eindruck einer späteren Redaktion; vielleicht durch Heron, dem als Mechaniker die Bewegung das Vertrauteste war. Getadelt ist von Savile die Deckung der Winkel, da noch nicht gelehrt ist, wie man einen Winkel anträgt. Merkwürdiger-

weise hat weder Proclus noch Savile, nach Pfleiderer, der so fleifsige Scholiast, auf die auffällige Anwendung der Bewegung hingewiesen. Sieht man näher zu, so ist nichts weiter benutzt als das stillschweigend angenommene Axiom von der Gleichförmigkeit des Raumes, demzufolge jede Figur, die an einer Stelle des Raumes möglich ist, auch an einer andern möglich ist, bezw. das Axiom Bolzano's und Grafsmann's: Gröfsen, deren bestimmende Stücke gleich sind, sind gleich. Die Kongruenz der dritten Seiten würde aus der Forderung 1: nach der zwischen je zwei Punkten eine Gerade vorhanden, sofort hervorgehen. Stillschweigend wird auch die Gleichheit zweier Winkel definiert: Winkel sind gleich, wenn sich ihre Schenkel decken.

Dafs Euclid die Kongruenzsätze nicht unter die Forderungen aufgenommen hat, ist ein Fehler.

5.

Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Basis einander gleich, und werden die gleichen Schenkel verlängert, so sind auch die Winkel unterhalb der Basis einander gleich.

(Fig. 5.) Sei $AB\Gamma$ das gleichschenklige Dreieck mit AB gleich $A\Gamma$ und es mögen auf ihren Geraden AB und $A\Gamma$ verlängert werden um $B\Delta$ und ΓE. Ich behaupte etc.

[Konstr.] Man nehme auf $B\Delta$ einen beliebigen Punkt Z, von AE nehme man AH gleich AZ weg und ziehe $Z\Gamma$ und HB.

[Beweis.] Dann ist $\triangle AZ\Gamma \cong AHB$ [4] folglich $\sphericalangle A\Gamma Z = ABH$ und $\sphericalangle AZ\Gamma = AHB$, und da $AZ = AH$ und ihr Teil AB und $A\Gamma$ auch gleich, so ist (Ax. 3) $BZ = \Gamma H$; und da bereits bewiesen, dafs $Z\Gamma = HB$ und $\sphericalangle BZ\Gamma = \Gamma HB$, so ist [4] Dreieck $BZ\Gamma \cong BH\Gamma$, folglich $\sphericalangle ZB\Gamma = H\Gamma B$ und $B\Gamma Z = \Gamma BH$. Da nun der ganze Winkel ABH als dem ganzen Winkel $A\Gamma Z$ gleich erwiesen wurde, und die Teile ΓBH und $B\Gamma Z$ gleich, so ist [Ax. 3] $\sphericalangle AB\Gamma = A\Gamma B$ und dies sind die Basiswinkel. Aber die Gleichheit von $ZB\Gamma$ und $H\Gamma B$ wurde schon gezeigt und sie liegen unterhalb der Basis.

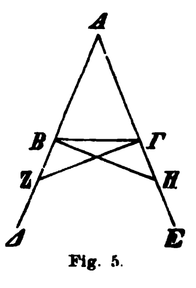


Fig. 5.

Also etc. . . . . w. z. b. w.

Aus Proclus ersehen wir, das wir für den Satz über die Gleichheit der Basiswinkel „dem alten Thales Dank schulden". Proclus giebt einen Beweis für die Gleichheit der Basiswinkel ohne die Schenkel zu verlängern und er giebt aus dem Kommentar des Pappus (s. S. 250) den berühmten Beweis Bolzano's (wenn ich nicht irre auch Leibniz), der darauf hinauskommt, dafs sich beim gleichschenkligen Dreieck links und rechts nicht unterscheiden läfst. Proclus fügt dann die Erweiterung der Geminos hinzu: Gleiche Schenkel bilden mit jeder in sich verschiebbaren Linie gleiche Winkel.

6.

Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so sind auch die Seiten, welche sich unter den gleichen Winkeln unterspannen, einander gleich.

Es soll $AB\Gamma$ das Dreieck sein, worin der Winkel (Fig. 6) $AB\Gamma$ dem Winkel $A\Gamma B$ gleich ist; ich behaupte, dafs auch die Seite AB der Seite $A\Gamma$ gleich ist.

Fig. 6.

[Konstr.] Denn: wenn die AB der $A\Gamma$ ungleich ist, so ist eine der beiden die gröfsere. Es soll die gröfsere (die) AB sein und es soll von der gröfseren AB die der kleineren $A\Gamma$ gleiche $B\Delta$ weggenommen werden und es werde die Verbindung $\Delta\Gamma$ gezogen.

[Beweis, abgekürzt.] $A\Gamma B$ (nach 4) $\simeq \Delta B\Gamma$, der Teil dem Ganzen, was unschicklich; also ist AB nicht ungleich $A\Gamma$, also gleich.

Wenn also .... w. z. b. w.

Satz 6 ist das erste Beispiel eines Satzes, der indirekt (apagogisch), d. h. durch Hinleitung (apagoge) zum Unmöglichen bewiesen wird, für Umkehrungssätze die gewöhnliche Art des Beweises. Proclus beweist auch die zweite Umkehrung.

7.

Wenn über einer geraden Linie AB an derselben Seite die Dreiecke $A\Gamma B$ und $A\Delta B$ stehen, so kann nicht zugleich $A\Gamma$ gleich $A\Delta$ und $B\Gamma$ gleich $B\Delta$ sein.

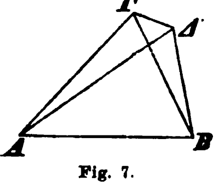


Fig. 7.

(Fig. 7.) Man ziehe $\Gamma\Delta$, dann ist $\sphericalangle A\Gamma\Delta = A\Delta\Gamma$ (5), also $B\Gamma\Delta$ kleiner als $\Gamma\Delta A$ und um so mehr kleiner als $\Gamma\Delta B$, und diesen (nach 5) gleich, was unmöglich ist.

Im Euclid ist scheinbar der Fall nicht berücksichtigt, dafs die Spitze des einen Dreiecks innerhalb des andern falle. Proclus hat diesen Fall und bemerkt ganz richtig, dafs der Stoicheiotes um seinetwillen im Satze 6 die Gleicheit der Winkel unter der Basis beweise. Ebenso richtig bemerkt Proclus, dafs Satz 7 ein Hilfssatz, Lemma, zu Satz 8, dem sogen. 3. Kongruenzsatz; Peyrard hat durch eine leichte Änderung der Figur, welche von Hartwig in der letzten Schulausgabe des Lorenz 1860 adoptiert ist, den Beweis für beide Fälle zugleich gegeben.

8.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seitenpaare einzeln einander gleich sind, und die Grundlinie desgleichen, so sind die von den gleichen Seitenpaaren eingeschlossenen Winkel gleich.

(Fig. 8.) $AB = \Delta E$ und $A\Gamma = \Delta Z$ und aufserdem soll $B\Gamma = EZ$ sein. Ich behaupte, dafs $\sphericalangle B A \Gamma = E \Delta Z$.

Fig. 8.

[Beweis ohne Zuhilfenahme der Bewegung.] Da $B\Gamma = EZ$, so kann man wegen der Gleichförmigkeit des Raumes das Dreieck $BA\Gamma$ in der Lage EHZ denken, dann mufs nach dem Lemma (S. 7) H auf Δ fallen.

Euclid beweist den sogen. 3. Kongruenzsatz dadurch, dafs er das Dreieck $AB\Gamma$ mit $B\Gamma$ auf EZ legt; Proclus giebt als Beweis des Philon den heut meist gebrauchten Beweis durch Aneinanderlegen. Proclus hebt mit Recht hervor, dafs Euclid nicht nötig hat, wie Philon, drei verschiedene Fälle zu unterscheiden. Proclus hebt schon die nahe Verwandtschaft des ersten und dritten Kongruenzsatzes hervor (Umkehrung von einander) und zeigt, wie der ganze Gang des Euclid durch den ersten und dritten Kongruenzsatz bestimmt wird.

9.

[4. Aufgabe.] Einen gegebenen Winkel zu halbieren.
(Fig. 9.) Sei $BA\Gamma$ der gegebene Winkel. Gefordert etc. . . . .
Nimm auf AB beliebig den Punkt Δ und schneide auf $A\Gamma$ eine

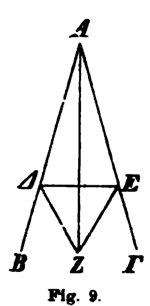


Fig. 9.

$A\Delta$ gleiche Strecke AE ab und ziehe ΔE und errichte auf ΔE das gleichseitige Dreieck ΔEZ und ziehe AZ. Ich behaupte, dafs AZ den Winkel $BA\Gamma$ halbieret.

[Beweis.] Dreieck $\Delta AZ \cong EAZ$ (8).

Dafs Z innerhalb des Winkels $BA\Gamma$ fallen mufs, wird von Proclus bewiesen, der auch schon für einen speziellen Fall die einfache Konstruktion mittelst zwei Kreisen giebt.

10.

[5. Aufgabe.] Eine gegebene Strecke AB zu halbieren.

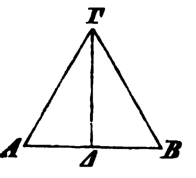


Fig. 10.

(Fig. 10.) Errichte auf AB das gleichseitige Dreieck $AB\Gamma$ und halbiere Winkel $A\Gamma B$ durch $\Gamma\Delta$, so ist Δ die Mitte.

Beweis: Satz 4.

Aus der Anschauung wird stillschweigend entnommen, dafs $\Gamma\Delta$ die Strecke schneide. Von Proclus erfahren wir, dafs unsere Konstruktion, mittelst der Kreise um A mit AB und um B mit BA die Strecke zu halbieren, von keinem geringeren als dem Apollonius herrührt.

11.

Zu einer gegebenen Geraden AB von einem auf ihr gegebenen Punkt Γ aus die senkrechte Gerade zu ziehen.

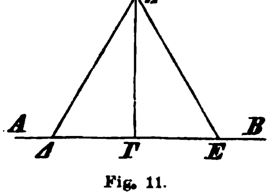


Fig. 11.

(Fig. 11.) Man nehme auf $A\Gamma$ beliebig Punkt Δ, und mache ΓE gleich $\Gamma\Delta$; und errichte auf der (Strecke) ΔE das gleichseitige Dreieck ΔZE und verbinde Z mit Γ, so ist $Z\Gamma$ die verlangte Senkrechte.

[Beweis.] $\Delta\Gamma Z \cong E\Gamma Z$ (8), also $\sphericalangle \Delta\Gamma Z = E\Gamma Z$. Was zu thun war.

Proclus giebt schon eine Lösung für den Fall, dafs der Strahl $\Gamma\Delta$ nicht über Γ verlängert werden darf; die bekannte Lösung mittels des Peripheriewinkelsatz bei Clavius.

12.

Nach einer gegebenen unbegrenzten Geraden AB von einem gegebenen Punkt Γ, der nicht auf ihr liegt, die senkrechte Gerade (Kathete) zu ziehen.

(Fig. 12.) Nimm auf der andern Seite der Geraden AB den Punkt Δ und schlage um Γ mit $\Gamma\Delta$ den Kreis EZH, halbiere EH in Θ, und ziehe ΓH, $\Gamma\Theta$, ΓE; so ist $\Gamma\Theta$ die verlangte Senkrechte.

[Beweis.] $H\Theta\Gamma \cong \Gamma\Theta E$ (8).

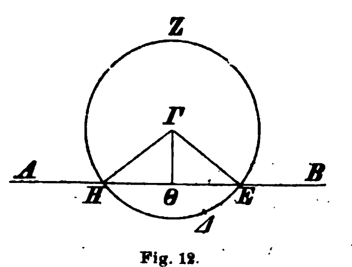


Fig. 12.

Proclus. „Dies Problem untersuchte zuerst Oinopides, der es für die Astrologie (die Astronomie) nützlich hielt.“ Er nannte aber die Kathete altertümlich „nach Art des Gnomon“, weil ja der Gnomon auf dem Horizont senkrecht steht.

13.

[Lehrsatz 6.] Wie auch ein Strahl, der von einer Geraden ausgeht, mit ihr Winkel bilde, so wird er zwei Rechte oder zwei Rechten gleiche Winkel bilden.

(Fig. 13.) Die Gerade sei $\Delta\Gamma$, der Strahl AB, die Winkel sind ΓBA, $AB\Delta$. Sind sie gleich, so sind es zwei Rechte (Df. 10); ist ΓBA der kleinere, so errichte man in B das Lot BE auf $\Delta\Gamma$, also sind ΓBE und $EB\Delta$ zwei Rechte. Und da $\Gamma BE = \Gamma BA + ABE$, werde auf beiden Seiten $EB\Delta$ hinzugelegt; also $\Gamma BE + EB\Delta = \Gamma BA + ABE + EB\Delta$. Andererseits da $\Delta BA = \Delta BE + EBA$, werde gemeinsam $AB\Gamma$ hinzugefügt, also $\Delta BA + AB\Gamma = \Delta BE + EBA + AB\Gamma$. Aber es wurde gezeigt, dafs auch $\Gamma BE + EB\Delta$ diesem Trinom gleich sei, also $\Delta BA + AB\Gamma = \Gamma BE + EB\Delta = 2$ Rechte. W. z. b. w.

Fig. 13.

Dafs dieser Beweis vom heutigen Standpunkt aus fehlerhaft ist, braucht kaum bemerkt zu werden. Es fehlt der Nachweis, dafs man mit Winkeln nach den gewöhnlichen Regeln rechnen könne, speziell der Nachweis des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition.

14.

[Lehrsatz: Umkehrung von 13.] Wenn zwei Winkel den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben und zusammen zwei Rechte betragen, so sind die äufseren Schenkel die Verlängerungen von einander.

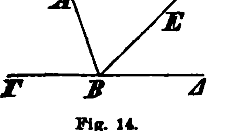


Fig. 14.

Beweis indirekt (Fig. 14).

15.

Wenn zwei Geraden einander schneiden, so sind die Schnittwinkel gleich.

(Fig. 18.) Die beiden Geraden AB und $\Gamma\Delta$ schneiden sich in E, ich behaupte, dafs $AE\Gamma = \Delta EB$ und $\Gamma EB = AE\Delta$.

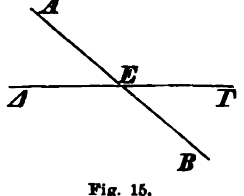


Fig. 15.

$\Gamma EA + AE\Delta = AE\Delta + \Delta EB$, weil beide nach 13 gleich 2 Rechte, also (Ax. 5) $\Gamma EA = \Delta EB$ etc.

Vgl. die Bemerkung zu Satz 13; die Scheitelwinkel werden nicht erklärt, sondern einfach als Winkel „κατὰ κορυφήν", die Winkel „in Bezug auf den Scheitel" bezeichnet; was gemeint ist, sagt die Ekthesis.

[Zusatz (Porisma). Hieraus ist klar, dafs, wenn sich zwei Geraden schneiden, die Winkel am Schnittpunkt zusammen 4 Rechte betragen.]

Das Porisma fehlt im Vaticanus, im Wiener, im Bologner Kodex, dagegen hat es Proclus, der es zu dem Satz erweitert: Alle Winkel um einen Punkt herum betragen zusammen 4 Rechte. Der Zusammenhang bei Proclus läfst die Vermutung zu, dafs das Porisma von Pythagoräern (d. h. Neupythagoräern) in den Euclid hineingebracht ist: „es ist bei einem Jahrhunderte lang gebrauchten Schulbuch fast unmöglich, den ursprünglichen Text festzustellen" (Nöldeke).

16.

[Lehrsatz 9.] In jedem Dreieck ist, wenn eine Seite verlängert wird, der Winkel aufserhalb des Dreiecks gröfser als jeder von beiden der inneren ihm entgegengesetzten.

(Fig. 16.) $AB\Gamma$ sei das Dreieck und $B\Gamma$ werde bis Δ verlängert; ich behaupte etc.

[Konstr.] $A\Gamma$ werde in E halbiert (10) und BE werde um sich selbst verlängert bis Z, ΓZ gezogen und $A\Gamma$ bis H verlängert.

[Beweis.] Dreieck $AEB \simeq \Gamma EZ$ (4) und folglich $\sphericalangle BAE = E\Gamma Z$; also $\sphericalangle A\Gamma\Delta > BAE$; auf gleiche Weise wird durch Halbierung von $B\Gamma$ bewiesen, dafs $A\Gamma\Delta > AB\Gamma$. Also etc. . . . . w. z. b. w.

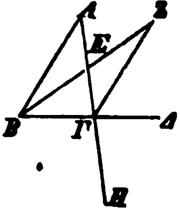


Fig. 16.

Dieser schöne Beweis ist von Legendre benutzt worden zu dem Beweis des Satzes, in jedem Dreieck ist die Winkelsumme nicht gröfser als zwei Rechte; aus ihm folgt sofort (von einigen wie Proclus sagt mit ihm verbunden)

17.

In jedem Dreieck sind zwei Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte (Fig. 17).

Proclus fügt zu 16 hinzu, dafs aus ihm sowohl folgt: Von einem Punkt kann man nicht drei gleich lange Linien nach einer Geraden ziehen; als der Satz: Wenn zwei Gerade von einer dritten unter gleichen Gegenwinkeln geschnitten werden, so schneiden sich jene beiden nicht. Und aus 17 folgt: Von einem Punkte lassen sich mit einer Geraden nicht zwei Lote fällen; was Euclid schon durch das Weglassen des Artikels in 12 kenntlich gemacht hat. Es läfst sich schon in 12 zeigen, dafs, wenn sich von Γ auf AB zwei Katheten fällen lassen, jede Gerade, welche Γ mit einem Punkt auf AB verbindet, auf AB senkrecht steht, und mittelst 4, dafs das zweite Lot zu einem Widerspruch gegen Axiom 1 führt.

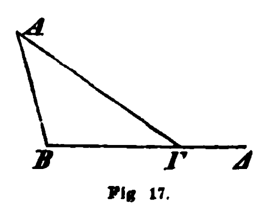


Fig 17.

18.

In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber.

Sei $AB\Gamma$ das Dreieck, und $A\Gamma > AB$.

Da $A\Gamma > AB$, mache man (Fig. 18) $A\Delta = AB$ (2) und ziehe $B\Delta$, dann ist $AB\Delta = A\Delta B$ (5) und $A\Delta B$ (16) $> A\Gamma B$, also auch $AB\Delta > A\Gamma B$ und um so mehr $AB\Gamma > A\Gamma B$.

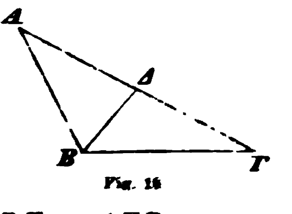


Fig. 18

19.

In jedem Dreieck liegt dem gröſseren Winkel die gröſsere Seite gegenüber.

Beweis indirekt (Fig. 19).

20.

In jedem Dreieck sind irgend zwei Seiten zusammen gröſser als die dritte.

Sei $AB\Gamma$ das Dreieck (Fig. 20). Man verlängere BA bis Δ, so daſs $A\Delta = A\Gamma$, und ziehe $\Gamma\Delta$, dann ist $\sphericalangle\, A\Delta\Gamma = A\Gamma\Delta$, also $B\Gamma\Delta > A\Delta\Gamma$, also $\Delta B > B\Gamma$, also $BA + A\Gamma > B\Gamma$. Entsprechend wird gezeigt, daſs $BA + B\Gamma > A\Gamma$; $B\Gamma + \Gamma A > BA$.... w. z. b. w.

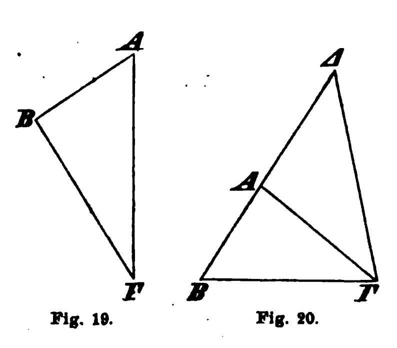


Fig. 19. Fig. 20.

Durch diesen Satz (und seine Folge 21) wird also bewiesen, daſs die Strecke die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte ist.

Ich füge das Scholion des Proclus, soweit es interessant ist, wörtlich hinzu: „Diesen Satz sind die Epikuräer zu schmähen gewohnt, und sie sagen, er sei jedem Esel offenkundig und bedürfe keines Apparats. Und es sei ebenso unverständig von Selbverständlichem Beweis zu fordern als Unklares für selbstverständlich zu erachten (Ramus!). Diese unklaren Köpfe wissen offenbar nicht, was bewiesen werden muſs und was nicht zu beweisen ist. Daſs aber der Esel das vorliegende Theorem erkannt habe, schlieſsen sie daraus, daſs, wenn man ihm sein Heu an das Ende einer Seite legt, er auf dieser einen Seite marschiere und nicht auf den beiden andern, um sein Futter zu holen. Dazu ist zu bemerken, daſs der Satz als Erfahrungsthatsache klar ist, aber keineswegs dem logischen Grunde nach.“

Es folgen dann die Beweise des Heron und Porphyrios, von denen ich den des Heron beifüge.

Wenn man den $\sphericalangle\,\alpha$ — diese Abkürzung auch schon bei Proclus — halbiert durch $\alpha\varepsilon$, so ist nach 16 und 19 $\alpha\beta > \beta\varepsilon$ und $\alpha\gamma > \varepsilon\gamma$, also $\alpha\beta + \alpha\gamma > \beta\gamma$. Vgl. zu diesem Satz Hilbert's Vortrag zu Paris „Mathematische Probleme“. Gött. Nachr. 1900, Heft 3.

21.

Verbindet man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den Enden einer Seite, so ist die Summe der Verbindungslinien kleiner als die Summe der beiden andern Seiten, aber sie schliefsen einen gröfseren Winkel ein.

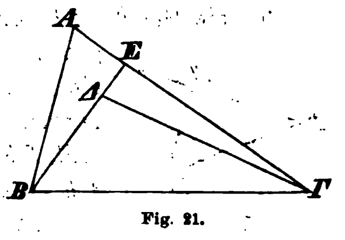


Fig. 21.

Sei $AB\Gamma$ das Dreieck, Δ der Punkt im Innern. $B\Delta$ werde ausgezogen bis E (Fig. 21), dann ist $AB + AE > BE$, also $AB + AE + E\Gamma > BE + E\Gamma$. Ebenso ist $\Gamma E + E\Delta > \Delta\Gamma$, also $BE + E\Gamma > \Delta\Gamma + B\Delta$, also erst recht $AB + A\Gamma > B\Delta + \Delta\Gamma$. Ferner Winkel $B\Delta\Gamma > \Delta E\Gamma > BA\Gamma$. . . . . W. z. b. w.

Proclus zeigt an dem Beispiel des rechtwinkligen Dreiecks, dafs eine gebrochene Strecke im Innern sehr wohl gröfser sein kann als die Summe zweier Seiten.

22.

[Auf. 8.] Aus drei, drei gegebenen gleichen, Strecken ein Dreieck zu errichten; es müssen aber je zwei gröfser als die dritte sein.

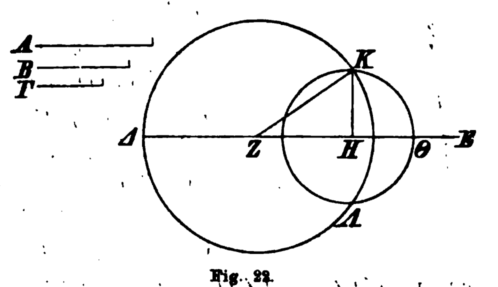


Fig. 22.

Es seien A, B, Γ die drei gegebenen Strecken, von denen immer je zwei gröfser als die dritte sind.

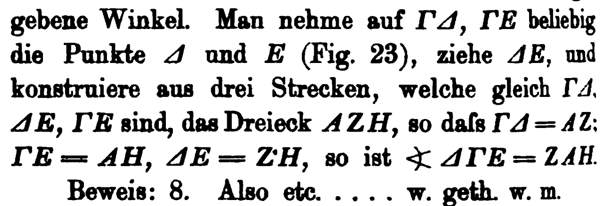
Es werde der Strahl ΔE (Fig. 22) hingelegt und $\Delta Z = A$ gemacht und $ZH = B$ und $H\Theta = \Gamma$ und mit Radius $Z\Delta$ im Z der Kreis $\Delta K\Lambda$ beschrieben: sodann im H mit $H\Theta$ der Kreis $K\Lambda\Theta$ und K mit Z und H verbunden, so ist KZH das verlangte Dreieck.

Beim Beweis fehlt der Nachweis, dafs die Kreise sich schneiden, den Proclus liefert, er folgt daraus, dafs wegen der Bedingung Θ stets aufserhalb des Kreises Z liegen mufs, während, da $A \geq B$, H im Innern, bezw. auf dem Kreis Z liegt.

23.

[Auf. 9.] An eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkt einen Winkel von gegebener Gröſse anzutragen.

Sei die Gerade AB und A der Punkt auf ihr und $\Delta\Gamma E$ der gegebene Winkel. Man nehme auf $\Gamma\Delta$, ΓE beliebig die Punkte Δ und E (Fig. 23), ziehe ΔE, und konstruiere aus drei Strecken, welche gleich $\Gamma\Delta$, ΔE, ΓE sind, das Dreieck AZH, so daſs $\Gamma\Delta = AZ$; $\Gamma E = AH$, $\Delta E = ZH$, so ist $\sphericalangle\, \Delta\Gamma E = ZAH$.



Beweis: 8. Also etc. . . . . w. geth. w. m.

Fig. 23.

Die heute in den meisten Lehrbüchern übliche Variante, das Dreieck $\Delta\Gamma E$ gleichschenklig zu machen, rührt von Apollonius her, die Konstruktion bei Euclid ist entschieden vorzuziehen: sie soll wie die Aufgabe 7 (S. 12) von Oinopides herrühren.

24.

Wenn zwei Dreiecke zwei gleiche Seitenpaare haben, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so liegt dem gröſseren Winkel die gröſsere Seite gegenüber.

Die Dreiecke seien $AB\Gamma$ und ΔEZ und $BA = E\Delta$, $\Gamma A = Z\Delta$ und der Winkel bei A (Fig. 24) $>$ als der bei Δ; ich behaupte, daſs auch $B\Gamma > EZ$. Man konstruiert (nach 23) ΔEH, so daſs $\sphericalangle\, H\Delta E = BA\Gamma$ und $H\Delta = A\Gamma$, dann ist nach 4 $B\Gamma = EH$, und da $\Delta Z = \Delta H$, so ist $\sphericalangle\, \Delta HZ = \Delta ZH$, also $\sphericalangle\, \Delta ZH > EHZ$ und um so mehr $EZH > EHZ$, also $HE > ZE$, also $B\Gamma > EZ$. . . . . q. e. d.

Fig. 24.

Bei Euclid fehlen die Lagen: Z auf HE; Z innerhalb $H\Delta E$, in beiden Fällen ist der Satz unmittelbar ersichtlich (im 2. Falle nach 21).

25.

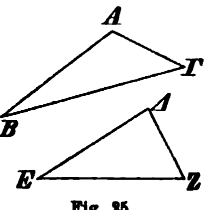


Fig. 25.

[Umkehrung.] Wenn zwei Dreiecke zwei Seitenpaare gleich haben, die dritten Seiten aber ungleich sind, so liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

(Fig. 25.) Beweis indirekt.

Proclus giebt zwei hübsche direkte Beweise, den einen von Menelaos, den die Figur 25a zeigt, den andern von Heron „dem Mechanikus", den die Figur 25b zeigt.

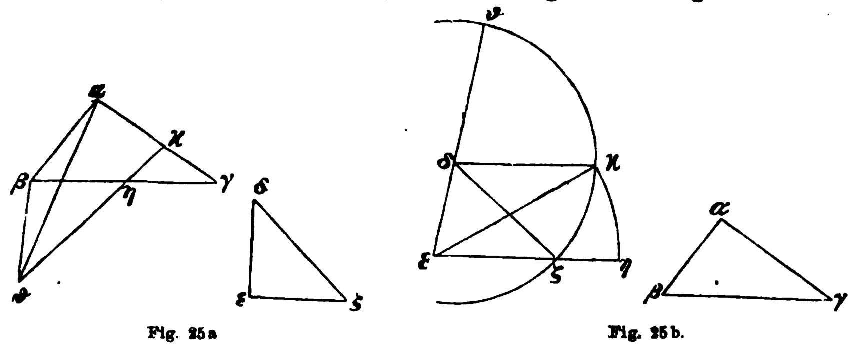


Fig. 25a Fig. 25b.

26.

[Der 2. Kongruenzsatz.] Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen und in einer Seite, welche entweder an beiden gleichen Winkeln liegt oder einem von beiden gegenüberliegt, so sind die andern Seiten einander gleich und die dritten Winkel.

(Fig. 26.) Die Dreiecke seien $AB\Gamma$ und ΔEZ und $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$ und $\sphericalangle B\Gamma A = EZ\Delta$ und sei zuerst $B\Gamma = EZ$; ich behaupte etc.

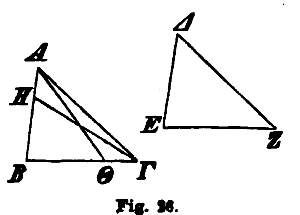


Fig. 26.

Denn wenn AB nicht gleich ΔE ist, so ist eine von beiden, z. B. AB die größere und es werde $BH = E\Delta$ gemacht und $H\Gamma$ gezogen, dann ist (4) $H\Gamma = \Delta Z$ und $H\Gamma B = \Delta ZE = A\Gamma B$, was unmöglich, also sind AB und ΔE gleich und es gilt (4).

Wenn vorausgesetzt wird, daß die gleichen Seiten AB und ΔE sind, so ist $B\Gamma = EZ$, denn wären sie ungleich und z. B. $B\Gamma$ die größere, so mache man $B\Theta = EZ$ und ziehe $A\Theta$; dann wäre nach (4) $B\Theta A = EZ\Delta = A\Gamma B$, was, da $B\Theta A$ der Außenwinkel ist, unmöglich; also ist $B\Gamma = EZ$ (und die Dreiecke kongruent nach 4).

Seit wann dieser Satz als zweiter Kongruenzsatz gezählt wird, habe ich noch nicht ermitteln können; höchst auffallend ist, dafs ein Mann wie Zeuthen (Geschichte der Mathematik, Kopenh. 1896) nicht bemerkt hat, dafs Euclid die beiden Fälle des 2. Kongruenzsatzes in einem Satz behandelt hat. Danach verliert auch sein Urteil (S. 113), „von einer Vermengung, die nur wenig übersichtlich ist", das Gewicht; ich bin der entgegengesetzten Ansicht. Es giebt kaum etwas durchsichtigeres als den planvollen Aufbau des 1. Buches.

27.

Werden zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten, so sind die geschnittenen Linien parallel.

AB und *ΓΔ* werden von *EZ* (Fig. 27) so geschnitten, dafs die Wechselwinkel *AEZ* und *EZΔ* einander gleich sind, so behaupte ich, dafs die *AB* der *ΓΔ* parallel ist.

Denn wenn nicht, so werden *AB*, *ΓΔ* ausgezogen entweder auf der Seite *B*, *Δ* oder *A*, *Γ* zusammentreffen. Sie sollen verlängert werden und auf der Seite *B*, *Δ* in *H* zusammentreffen; also ist der Aufsenwinkel des Dreiecks *EZH*, der Winkel *AEZ*, dem inneren, ihm gegenüberliegenden Winkel *EZH* gleich, was unmöglich. Also schneiden sich *AB* und *ΓΔ*, verlängert, auf der Seite *BΔ* nicht. Ebenso wird gezeigt werden, dafs sie sich auch nicht auf der Seite *AΓ* schneiden. Aber auf keiner von beiden Seiten sich schneidende sind parallel. Parallel folglich ist die *AB* der *ΓΔ*.

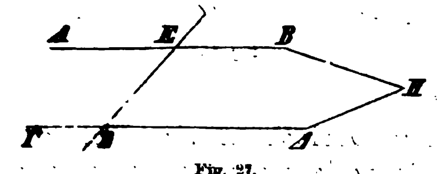


Fig. 27.

Wenn also etc. . . . ., q. e. d.

28.

Wenn zwei Geraden von einer dritten so geschnitten werden, dafs ein äufserer Winkel dem inneren entgegengesetzt und an derselben Seite liegenden Winkel gleich ist oder die inneren und an derselben Seite liegenden gleich zwei Rechten sind, so sind die geschnittenen Geraden einander parallel.

(Fig. 28.) *EHB* = *HΘΔ* (im heutigen Sprachgebrauch: Gegen- oder korrespondierende oder entsprechende Winkel) oder auch *BHΘ* und *HΘΔ* zusammen 2 Rechte (Ergänzungswinkel).

Denn da $\sphericalangle\, EHB = H\Theta\Delta$ und $\sphericalangle\, EHB = AH\Theta$ (15), so ist auch $AH\Theta = H\Theta\Delta$ und das sind Wechselwinkel, also AB (nach 27) parallel $\Gamma\Delta$.

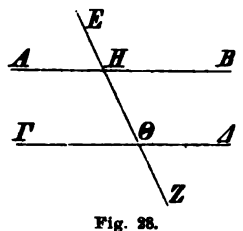


Fig. 28.

Im anderen Falle ist $BH\Theta + H\Theta\Delta$ gleich 2 Rechte und $AH\Theta + BH\Theta$ gleich 2 Rechte (13), also $AH\Theta = H\Theta\Delta$ etc.

Diese 28 Sätze sind vom Parallelenaxiom unabhängig, dagegen wird gelegentlich von dem Axiom, zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich (Ax. 1), Gebrauch gemacht, sie gelten also ohne weiteres auch für die Lobatschefski'sche und Klein-Clifford'sche Planimetrie. (Nur mufs statt „Parallel" gesagt werden „Nicht sich schneidend".)

Aus dem Scholion des Proclus erfahren wir, dafs der heute in den meisten Lehrbüchern übliche Beweis (die Geraden müfsten sich der Symmetrie wegen, wenn sie sich auf der rechten Seite der schneidenden schnitten, auch auf der linken schneiden) von dem grofsen Astronomen Ptolomäos herrührt, der ein Buch zum Beweis des Parallelenaxioms geschrieben.

29.

Eine zwei parallele Geraden schneidende schneidet sie so, dafs die Wechselwinkel einander gleich sind, die Gegenwinkel gleich sind und die Ergänzungswinkel zusammen zwei Rechte betragen.

(Fig. 29.) Wäre $\sphericalangle\, AH\Theta \neq H\Theta\Delta$, so müfste einer von beiden gröfser als der andere sein, z. B. $AH\Theta$. Dann wäre $\sphericalangle\, BH\Theta + H\Theta\Delta < 2$ Rechte: (Gerade) aber, welche von Winkeln aus, die kleiner als zwei Rechten sind, ins Unbegrenzte verlängert werden, schneiden sich. (5. Forderung.) Daher müfsten sich AB und $\Gamma\Delta$ schneiden; aber sie schneiden sich nicht, da sie parallel sind; also ist $\sphericalangle\, AH\Theta$ dem Winkel $H\Theta\Delta$ nicht ungleich, also gleich.

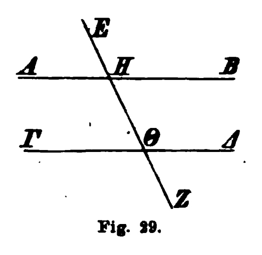


Fig. 29.

Aber $\sphericalangle\, AH\Theta = EHB$ (15), also auch $\sphericalangle\, EHB = H\Theta\Delta$. Zu beiden Seiten werde $BH\Theta$ zugefügt, also $\sphericalangle\, EHB + BH\Theta = H\Theta\Delta + BH\Theta = 2$ Rechte.

Also etc. . . . . q. e. d.

Über das Scholion und den Beweis des Ptolomäos, den Proclus richtig kritisiert, haben wir schon bei der 5. Forderung gesprochen, Proclus (Geminus? Heron?) ersetzt sie durch die Forderung: Eine Gerade, welche eine von zwei Nichtsichschneidenden schneidet, schneidet auch die andere. Sein Beweis ist fehlerhaft, da er annimmt, dafs jede Querstrecke zwischen zwei Nichtsichschneidenden endlich sein müsse.

30.

Geraden, welche derselben Geraden parallel sind, sind untereinander parallel.

(Fig. 30). Sei jede von beiden (nämlich AB, $\Gamma\Delta$) parallel EZ; es möge sie [d. h. AB und $\Gamma\Delta$] HK schneiden, dann ist $\sphericalangle AHK = H\Theta Z$ (29) und aus gleichem Grunde $H\Theta Z = HK\Delta$, also $AHK = HK\Delta$, also (nach 27) AB parallel $\Gamma\Delta$.

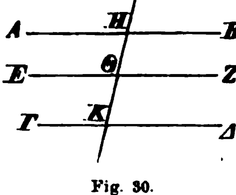


Fig. 30.

An dem Scholion des Proclus ist nur der Ausdruck interessant, dafs Euclid dies noch hinzusetzte: „wegen der Grünheit der Hörer“; also zum Vorlesungsgebrauch für Studierende war auch (oder schon) damals der Euclid bestimmt. Der Beweis selbst ist fehlerhaft, er ist richtig, wenn AB und $\Gamma\Delta$ als parallel EZ vorausgesetzt werden, aber nicht, wenn z. B. AB und EZ als parallel $\Gamma\Delta$ vorausgesetzt werden, denn dann nimmt er gerade den Satz an, den er beweisen will, nämlich, dafs eine Gerade, welche eine von zwei Nichtsichschneidenden schneidet, auch die andere schneidet. Übrigens ist schon beim Beweis des angenommenen Falles stillschweigend vorausgesetzt, dafs jede Gerade die Ebene in zwei getrennte Teile teile. Für den zweiten Fall mufs der Beweis indirekt geführt werden; es wäre $BH\Theta + H\Theta Z$ sowohl ungleich als gleich 2 Rechten.

Satz 30 ist das Par.-Ax., wie es in den meisten heutigen Schulbüchern steht: „Durch einen Punkt läfst sich zu einer Gerade nur eine Parallele ziehen.“

31.

Durch einen gegebenen Punkt die einer gegebenen Geraden parallele Gerade zu ziehen.

(Fig. 31.). Gegeben Punkt A und die Gerade $B\Gamma$. Es werde auf $B\Gamma$ der beliebige Punkt Δ genommen und $A\Delta$ gezogen und an den Strahl $A\Delta$ und den Punkt ein dem Winkel $A\Delta\Gamma$ gleicher (nach der entgegengesetzten Seite) angetragen (23) und EA auf der Geraden (ἐπ' εὐθείας) AZ hinzugefügt (dann ist nach 17) EAZ die verlangte Parallele).

Fig. 31.

Das Scholion des Proclus ist von gröfster Wichtigkeit, weil es in gröfster Schärfe sich darüber ausspricht, dafs der Stoicheiotes den Singular ohne Artikel und Zahlwort gebraucht, um die vollständige Eindeutigkeit sowohl bei dieser Aufgabe als bei der: Von einem Punkt aufserhalb auf eine gegebene Gerade das Lot zu fällen, hervorzuheben.

32.

In jedem Dreieck ist, wenn eine beliebige Seite verlängert wird, der Aufsenwinkel den inneren ihm gegenüberliegenden Winkeln gleich und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zwei Rechten gleich.

(Fig. 32.) Sei $AB\Gamma$ das Dreieck, und es werde eine Seite, z. B. $B\Gamma$ verlängert nach Δ. Man ziehe ΓE parallel AB, dann sind $BA\Gamma$ und $A\Gamma E$ als Wechselwinkel gleich (29) und $AB\Gamma$ und $E\Gamma\Delta$ als Gegenwinkel, also $A\Gamma\Delta = BA\Gamma + AB\Gamma$.

Ferner $A\Gamma\Delta + A\Gamma B = BA\Gamma + AB\Gamma + A\Gamma B = 2$ Rechte.

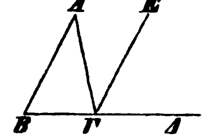


Fig. 32.

Aus dem Scholion erfahren wir, dafs Eudemos von Rhodos, „der Peripatetiker", einer von den unmittelbaren Schülern des Aristoteles, diesen Satz den Pythagoräern zuschreibt mit samt dem Beweise, der gewöhnlich in den Lehrbüchern steht, der Parallelen durch die Spitze zur Grundlinie. Der Satz selbst ist als Erfahrungssatz gewifs viel älter als Euclid, und es wird vollkommen klar, dafs der ganze Gang der Elemente bis zu ihm hin

durch das Bestreben ihn zu beweisen bestimmt ist. Der enge Zusammenhang des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck mit der Parallelentheorie ist also schon dem Euclid völlig bewufst gewesen.

33.

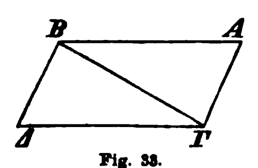


Fig. 33.

Strecken, welche parallele und gleiche Strecken an gleichen Seiten [gleichliegend] verbinden, sind gleich und parallel.

(Fig. 33.) AB gleich und parallel $\Gamma\Delta$; Behauptung $A\Gamma$ gleich und parallel $B\Delta$.

Beweis: Ziehe $B\Gamma$, dann ist $AB\Gamma = B\Gamma\Delta$ (Wechselwinkel 29), also $AB\Gamma \simeq \Delta\Gamma B$ (4), also $AB = A\Gamma$ und parallel (27).

Proclus bemerkt, dafs mit diesem Satz die Existenz der Parallelogramme gesichert ist; es folgt nun (nach Proclus) der dritte Teil des ersten Buches, die Lehre von den Parallelogrammen und daran anschliefsend die Flächenvergleichung. Euclid spricht zunächst von einem parallelogrammischen Raumgebilde und versteht darunter ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind; das Wort ist zufolge Proclus nach Analogie von ευθυγραμμος geradlinig gebildet. Zu bemerken ist, dafs das Wort Diagonale weder bei Euclid noch bei Proclus vorkommt, sondern statt dessen Diameter, Diagonale erst bei Heron.

34.

In Parallelogrammen sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich und jeder Durchmesser halbiert sie.

(Fig. 34.) $A\Gamma\Delta B$ das Parallelogramm, ΓB der Durchmesser.

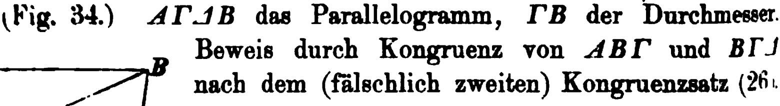


Fig. 34.

Beweis durch Kongruenz von $AB\Gamma$ und $B\Gamma\Delta$ nach dem (fälschlich zweiten) Kongruenzsatz (26).

Proclus hebt ausdrücklich hervor, dafs die Halbierung sich auf den Raum, den das Viereck einnimmt, bezieht, und nicht auf den Winkel, welchen die Diagonale durchschneidet.

35.

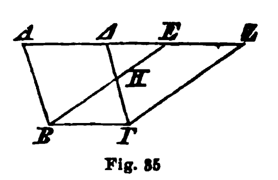


Fig. 35

Parallelogramme auf derselben Basis und in denselben Parallelen sind einander [flächen]gleich.

(Fig. 35.) Beweis: $A\Delta = B\Gamma$, $EZ = B\Gamma$, also $A\Delta = EZ$ und ΔE ist gemeinsam, also

$AE = \Delta Z$; aber auch $AB = \Delta\Gamma$ und $\sphericalangle EAB = Z\Delta\Gamma$, also $\triangle ABE \cong \Delta\Gamma Z$ (4). Wird das gemeinsame Dreieck ΔHE weggenommen, so ist Trapez $ABH\Delta = EH\Gamma Z$, wird das gemeinsame Dreieck $HB\Gamma$ zugesetzt, so folgt: das ganze Parallelogramm $AB\Gamma\Delta = EB\Gamma Z$.

36.

Parallelogramme auf gleicher Basis in denselben Parallelen sind einander gleich.

(Fig. 36.) $AB\Gamma\Delta$ und $EZH\Theta$ die Parallelogramme, $B\Gamma$ und ZH gleich.

Fig. 36.

Beweis: Man ziehe BE, $\Gamma\Theta$, dann ist $EB\Gamma\Theta$ nach 33 ein Parallelogramm und $AB\Gamma\Delta = EB\Gamma\Theta = EZH\Theta$.

37.

Dreiecke auf derselben Grundlinie in denselben Parallelen sind [flächen]-gleich.

(Fig. 37.) $AB\Gamma$ ist die Hälfte von $BEA\Gamma$, und $B\Delta\Gamma$ die Hälfte von $\Delta B\Gamma Z$, welche Parallelogramme nach 35 gleich sind; also ist $AB\Gamma = B\Delta\Gamma$.

Fig. 37.

38.

Dreiecke auf gleicher Grundlinie in denselben Parallelen sind unter sich gleich (Fig. 38).

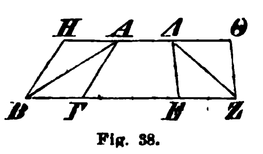


Fig. 38.

39.

Gleiche Dreiecke auf derselben Basis und an derselben Seite dieser Basis gelegen, sind in denselben Parallelen.

(Fig. 39.) $AB\Gamma$ und $\Delta B\Gamma$ seien die Dreiecke. Wenn $A\Delta$ nicht parallel $B\Gamma$, so ziehe man (31) durch A die Parallele AE zu $B\Gamma$ und ziehe $E\Gamma$, dann ist $AB\Gamma = EB\Gamma = \Delta E\Gamma$; das gröfsere dem kleineren, was unmöglich. Ähnlich wird gezeigt, dafs auch keine andere Linie aufser $A\Delta$ mit $B\Gamma$ parallel ist.

Fig. 39.

40.

Gleiche Dreiecke auf gleichen Grundlinien [in derselben Geraden] und an derselben Seite [dieser Geraden] sind in denselben Parallelen.

(Fig. 40.) Beweis wie 39.

Es fällt auf, dafs der Zusatz [in derselben Geraden] bei Euclid fehlt, und das Fehlen dieser Bestimmung von Proclus nicht gerügt wird. Proclus beweist dann den Satz, dafs, wenn flächengleiche Dreiecke (bezw. Parallelogramme) in denselben Parallellinien liegen, sie gleiche Grundlinien haben, und fügt über diesen Satz sowie die analogen hinzu: „Da aber die Methode des Beweises und das Unmögliche (der Teil dem Ganzen gleich) dieselben sind, hat sie der Stoicheiotes mit Fug ausgelassen.“

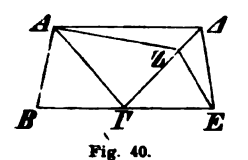


Fig. 40.

41.

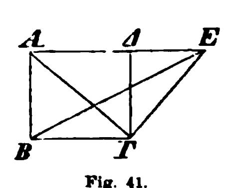


Fig. 41.

Wenn ein Parallelogramm und ein Dreieck dieselbe Basis haben und in denselben Parallelen liegen, so ist das Parallelogramm das Doppelte des Dreiecks.

(Fig. 41.) Das Parallelogramm $AB\Gamma\Delta$ hat dieselbe Basis wie das Dreieck $EB\Gamma$ und liegt in denselben Parallelen $B\Gamma$, AE. Man ziehe $A\Gamma$, dann ist $AB\Gamma = EB\Gamma$ (37), $AB\Gamma\Delta = 2\ AB\Gamma$ (34), also $AB\Gamma\Delta = 2\ EB\Gamma$.

42.

Ein dem gegebenen Dreieck ($AB\Gamma$) gleiches Parallelogramm zu konstruieren in einem Winkel, welcher einem gegebenen Winkel gleich ist.

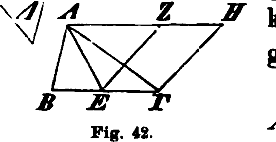


Fig. 42.

(Fig. 42.) Halbiere $B\Gamma$ in E (10), ziehe AE, lege an $E\Gamma$ in E einen dem gegebenen Winkel Δ gleichen an, $\sphericalangle\ \Gamma EZ$ (23) und ziehe durch A die Parallele AH zu $E\Gamma$ und durch Γ die Parallele ΓH zu EZ, so ist $ZE\Gamma H$ das verlangte Parallelogramm.

43.

In jedem Parallelogramm sind die Ergänzungen der Parallelogramme wie den Durchmesser (die Diagonale) einander gleich.

Das Parallelogramm (Fig. 43) sei $AB\Gamma\Delta$, die Diagonale $A\Gamma$, die Parallelogramme um $A\Gamma$ seien $E\Theta$ und ZH, die „Ergänzungen" genannten [Parallelogramme] BK und $K\Delta$, ich behaupte, es sei $BK = K\Delta$.

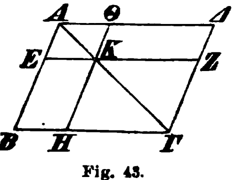


Fig. 43.

Denn da $AB\Gamma\Delta$ ein Parallelogramm ist, und $A\Gamma$ seine Diagonale, wird $\triangle AB\Gamma = A\Gamma\Delta$ sein (34), und da $E\Theta$ ein Parallelogramm ist und AK seine Diagonale, wird $\triangle AEK = A\Theta K$ sein, und gleicherweise wird $\triangle KH\Gamma \equiv KZ\Gamma$ sein, also $AEK + KH\Gamma = A\Theta K + KZ\Gamma$ (Ax. 2). Es ist aber das ganze $\triangle AB\Gamma$ gleich dem ganzen $\triangle A\Delta\Gamma$ gleich, der Rest also, das Parallelogramm BK, dem Rest, dem Parallelogramm $K\Delta$, gleich.

Also etc. . . . . q. e. d.

Dafs mit diesem ebenso einfachen als wichtigen Satz die ganze Lehre von der Flächenverwandlung, und ebenso die Konstruktion der 4. Proportionale, also die ganze Ähnlichkeitslehre, dem Euclid zugänglich geworden, hebt Zeuthen mit Recht hervor. Man kann, wie oft gethan, unmittelbar auf diesen Satz den Pythagoras gründen. Pappos z. B. hat zahlreiche Anwendungen von dem „Satz über die Ergänzungsparallelogramme" gemacht.

44.

An einer gegebenen Strecke ein Parallelogramm anzulegen, welches einem gegebenen Dreieck gleich ist und einen Winkel von gegebener Gröfse hat.

(Fig. 44.) AB die gegebene Strecke, Γ das gegebene Dreieck, Δ der gegebene Winkel. Es werde (nach 42) das Parallelogramm $BEZH$ konstruiert, dem Dreieck Γ gleich und mit dem Winkel EBH gleich Δ, und dies Parallelogramm so gelegt, dafs BE, AB in einer geraden Linie sind und ZH ausgezogen bis Θ, und durch A zu BH,

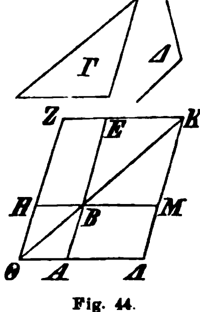


Fig. 44.

EZ die Parallele $A\Theta$ gezogen und Θ mit B verbunden. Weil die Parallelen ΘA und EZ von ΘZ geschnitten werden, ist $\sphericalangle A\Theta Z + \Theta ZE = 2$ Rechten, also $\sphericalangle B\Theta H + HZE < 2$ Rechten, also schneiden sich (nach 5. Forderung) ΘB und ZE, und zwar in K. Durch K werde die zu EA, $Z\Theta$ Parallele $K\Lambda$ gezogen und ΘA, HB verlängert bis zu Λ und M, so ist ΛBMA das verlangte Parallelogramm.

45.

Ein Parallelogramm zu konstruieren, welches einer gegebenen geradlinigen (Figur) gleich ist, und einen Winkel von gegebener Gröfse hat.

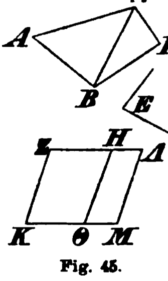


Fig. 45.

(Fig. 45.) Sei $AB\Gamma\Delta$ die gegebene geradlinige Figur, E der gegebene Winkel. Man ziehe ΔB und konstruiere (42) das dem Dreieck $AB\Delta$ gleiche Parallelogramm $Z\Theta$ mit dem Winkel ΘKZ gleich E und lege an $H\Theta$ (nach 44) das dem Dreieck $\Delta\Gamma B$ gleiche Parallelogramm HM mit dem Winkel $H\Theta M = E$, so ist $ZKM\Lambda$ das verlangte Parallelogramm.

Euclid beschränkt sich auf ein Viereck, aber da jedes Vieleck von einer Ecke aus in Dreiecke zerlegt werden kann, so ist die Aufgabe allgemein gelöst.

46.

Von einer gegebenen Strecke aus ein Quadrat zu zeichnen (ἀναγράψαι, wörtlich beschreiben).

(Fig. 46.) Gegeben AB, man errichte in A das Lot $A\Gamma$ auf AB (11) und mache $A\Delta = AB$ (2), und ziehe durch Δ zu AB die Parallele ΔE und durch B und $A\Delta$ die Parallele BE (31), so ist $A\Delta EB$ ein Parallelogramm. Also $AB = \Delta E$; $A\Delta = BE$, aber $AB = A\Delta$, also $BA = A\Delta = \Delta E = EB$, also ist das Parallelogramm gleichseitig. Ich behaupte aber, dafs es auch rechtwinklige etc. Daher ist $AB\Gamma\Delta$ ein Quadrat; . . . . w. zu machen war.

Fig. 46.

47.

In den rechtwinkligen Dreiecken ist das Quadrat der den rechten Winkel unterspannenden (ὑποτεινούσης) Seiten gleich

den Quadraten der den rechten Winkel einschliefsenden Seiten.

Sei (Fig. 47) $AB\Gamma$ das rechtwinklige Dreieck, mit dem rechten Winkel $BA\Gamma$. Ich behaupte, dafs das Quadrat von $B\Gamma$ gleich ist den Quadraten von BA, $A\Gamma$.

Man zeichne das Quadrat $B\Delta E\Gamma$ von $B\Gamma$ und von BA, $A\Gamma$ die HB, $\Theta\Gamma$ und durch A werde zu jeder von den beiden $B\Delta$, ΓE die Parallele $A\Lambda$ gezogen und A mit Δ, Z mit Γ verbunden. Und da ein Rechter jeder von den beiden Winkeln $BA\Gamma$, BAH ist, [so] bilden die von einer Geraden, BA, und an einem Punkt auf ihr, A, an verschiedenen Seiten gelegenen Strahlen $A\Gamma$, AH Nebenwinkel, welche [zusammen] zwei Rechte ausmachen, folglich sind ΓA, AH in einer Geraden (14). Aus denselben [Gründen] ist BA mit $A\Theta$ auf einer Geraden. Und da der Winkel $\Delta B\Gamma$ gleich ZBA ist, denn jeder ist ein Rechter, so lege man zu beiden $AB\Gamma$ hinzu, so ist der ganze Winkel $AB\Delta$ dem ganzen Winkel $ZB\Gamma$ gleich. Und da ΔB gleich $B\Gamma$, und ZB gleich AB, so sind die beiden ΔB, BA den beiden ZB, $B\Gamma$ gleich, eine jede jeder, und der Winkel ΔBA gleich $ZB\Gamma$, also ist die Basis $A\Delta$ der Basis $Z\Gamma$ gleich und das Dreieck $AB\Delta$ dem Dreieck $ZB\Gamma$. Aber vom Dreieck $AB\Delta$ ist das Doppelte das Parallelogramm $B\Lambda$, denn sie haben dieselbe Basis, nämlich $B\Delta$ und sind in denselben Parallelen $B\Delta$ und $A\Lambda$. Also ist das Parallelogramm $B\Lambda$ dem Quadrat HB gleich.

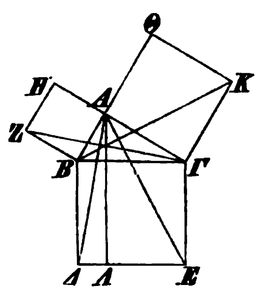


Fig. 47.

Entsprechend wird, wenn A mit E und B mit K verbunden werden, gezeigt werden, dafs auch das Parallelogramm $\Gamma\Lambda$ gleich ist dem Quadrat $\Theta\Gamma$.

Also ist das ganze Quadrat $B\Delta E\Gamma$ den beiden Quadraten HB, $\Theta\Gamma$ gleich. Und es ist das Quadrat $B\Delta E\Gamma$ von $B\Gamma$ (aus) beschrieben, die beiden aber HB, $\Theta\Gamma$ von BA, $A\Gamma$. Also ist das Quadrat von der Seite $B\Gamma$ gleich den Quadraten von den Seiten BA, $A\Gamma$.

Also etc. . . . . q. e. d.

48.

Wenn in einem Dreieck das Quadrat einer Seite gleich ist den Quadraten der übrigen beiden Seiten der Dreiecks,

so ist der von den übrigen beiden Seiten umschlossene Winkel ein Rechter.

Γ

Δ A B

Fig. 48.

(Fig. 48.) Denn im Dreieck $AB\Gamma$ sei $B\Gamma^2 \cong BA^2 + A\Gamma^2$.

Man ziehe vom Punkt A zu ΓA die Senkrechte $A\Delta$, mache $A\Delta$ gleich BA und ziehe $\Delta\Gamma$. Da $\Delta A = AB$, so wird auch $\Delta A^2 = AB^2$ sein. Gemeinsam lege $A\Gamma^2$ hinzu, also $\Delta A^2 + A\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2$, aber $\Delta\Gamma^2 = \Delta A^2 + A\Gamma^2$, denn $\sphericalangle\, \Delta A\Gamma$ ist ein Rechter, und $B\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2$ durch Voraussetzung, also $B\Gamma^2 = \Delta\Gamma^2$, also auch $B\Gamma = \Delta\Gamma$, also Dreieck $A\Gamma B \cong A\Gamma\Delta$ (8), also $\sphericalangle\, \Gamma AB = \Gamma A\Delta$ gleich einem Rechten . . . . q. e. d.

Euclid schliefst das 1. Buch mit dem grofsen Satz und seiner Umkehr, ein Beweis, dafs ihm seine Bedeutung als des Satzes, auf dem die ganze Flächenrechnung (und die ganze Trigonometrie) beruht, klar ist. Dafs der Satz den Pythagoräern zugehört, ist nach den vielfachen Angaben der Alten unzweifelhaft (Vitruv, Plutarch, Digones Laertios, Proclus etc.), es ist aber im höchsten Grade wahrscheinlich, dafs „er selbst" (αὐτὸς) der Entdecker gewesen.

Wenn aus den Chinesischen Rechenaufgaben aus dem Tscheou pei etc. hervorgeht, dafs den Chinesen der Satz bekannt war, so folgt daraus noch lange nicht, dafs sie den Satz selbständig gefunden haben. Die Chinesen sind keineswegs immer so fremdenfeindlich gewesen, wie sie sich heute, angesichts der Gefahr, dafs ihnen eine ganz neue Kultur aufgezwungen wird, erweisen. Dafs das Dreieck 3, 4, 5 ein rechtwinkliges sei, war gewifs eine den Babyloniern, Chinesen, Ägyptern äufserst früh bekannte Zimmermannsregel, aber den grofsen Satz darin erkannte der Hellene. Über den Beweis ist uns freilich nichts erhalten; im Menon läfst Platon durch Sokratische „Maieutik" (Hebammenkunst) den Spezialfall beweisen, wenn das Dreieck gleichschenklig, und Cantor vermutet gewifs mit Recht, dafs die Pythagoräer sehr viele Unterfälle unterschieden haben und deswegen der Pythagoräer Beweis durch den Euclidischen spurlos verdrängt sei. Proclus berichtet von andern Beweisen des Heron und Pappos, in einer Monographie sind dann an 50 gesammelt.

Dafs gerade der Euclidische Beweis des Pythagoras aus der Anschauung hervorgegangen, habe ich wiederholt bei anderer Gelegenheit hervorgehoben, und besonders bemerkt, dafs die Linien, die nach

Schopenhauer (Welt als W. und V. S. 15) gezogen werden „ohne dafs man weifs, warum“ etc., die Linien $A\Delta$, $Z\Gamma$ etc., gerade den anschaulichen Kern enthalten. Die Auffindung des Satzes geht von der Anschauung aus, dafs das Dreieck $ZB\Gamma$ seine Fläche nicht ändert, wenn es eine Vierteldrehung um die Ecke B macht und in die Lage $AB\Delta$ kommt, und beide Dreiecke ändern, wie nach Satz 37 feststeht, ihren Inhalt nicht, wenn die Spitzen sich auf den Parallelen $A\Gamma$ und ΔA bewegen.

Für die Unechtheit aller „Porismata“ scheint mir die Thatsache zu sprechen, dafs der Satz $AZ = BA$ nicht als Zusatz ausgesprochen ist. Die Aufgabe, ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, fehlt hier und sie wird erst II, 14 gelöst, und dann noch einmal indirekt dadurch, dafs VI, 17 die Identität zwischen $a:b = b:c$ und $ac = b^2$ ausspricht.

Man kann bemerken, dafs Euclid die Lehre von den Parallelogrammen fast ganz dem Hörer überläfst, fast alle Umkehrungen, die heute unsere Lehrbücher füllen, fehlen, dagegen wird die Flächenvergleichung, auf der die Flächenmessung beruht, ganz ausführlich behandelt. Es sind drei der Ausdehnung nach sehr ungleiche Teile, in die Buch I zerfällt: Satz 1—26 die wichtigsten Sätze über Winkel, Dreiecke mit den 3 Kongruenzsätzen und dem Satze über die Winkelsumme. Satz 27—33 die Parallelentheorie. Satz 34—48 die Flächenvergleichung.

II. [Buch.]

Nachdem das 1. Buch die Grundlagen der Geometrie einer, zwei und drei Geraden gegeben (bis Satz 26), dann die Lehre von den Parallelen und der Existenz der Parallelogramme, sodann die Flächenvergleichung durchgeführt hat, endigte es mit dem Pythagoras, der die Addition und Subtraktion zweier Quadrate bezw. die Konstruktionen von $\sqrt{a^2 + b^2}$ und $\sqrt{a^2 - b^2}$ giebt; das 2. Buch, das als geometrische Algebra längst erkannt ist, lehrt nun die Rechnung mit Aggregaten, speziell die Multiplikation, geht bis zur Auflösung der quadratischen Gleichungen in geometrischer Einkleidung, zunächst nur in speziellem Falle, und endigt mit dem geometrischen Existenzbeweis der Quadratwurzel.

Definitionen.

1) Man sagt: Zwei einen rechten Winkel einschliefsende Seiten eines Rechtecks enthalten es.

Die Konstruktion bei Euclid ist passiv, ὑπὸ mit dem Genetiv vertritt das Subjekt des Aktiv, es ist also die Übersetzung „unter" von Lorenz und Mollweide und Peyrard zu verwerfen. Die Abkürzung ab für das Rechteck, welches diese Strecken enthalten, behalten wir bei, auch Heiberg hat sie.

2) Von der Fläche eines Parallelogramms soll die Summe eines jeden der beiden um den Durchmesser liegenden Parallelogramme mit den beiden Ergänzungen ein Gnomon heifsen.

Der Imperativ „καλείσθω" beweist wieder, daſs dieser Name von Euclid neu eingeführt wird. Aus Proclus wissen wir, daſs der γνωμων (Erkenner, Beurteiler), der ursprünglich den schattengebenden Zeiger der Sonnenuhr bedeutet, bezw. den Stab, dessen Verhältnis zum Schatten die Höhe der Sonne über dem Horizont bestimmt, die alte Bezeichnung für die senkrechte Richtung überhaupt ist. Wird nun der rechte Winkel zum Werkzeug (Richtscheit), also massiv ausgeführt, so heiſst das Instrument, das aus Quadrat AC durch Herausschneiden von Quadrat BC gewonnen wird, ebenfalls Gnomon, und Euclid erweitert nun den Begriff vom Quadrat auf ein beliebiges Parallelogramm, also aus der Fig. 43 sind Par. $A\Gamma - K\Gamma$ bezw. $A\Gamma - AK$ Gnomone, bezw. erhält man das zu $K\Gamma$ bezw. AK ähnliche und ähnlich liegende groſse Parallelogramm $A\Gamma$ durch Anlegung der Gnomone $HBE\,A\Theta\Delta\,ZKH$ bezw. $\Theta\Delta Z\,\Gamma HB\,EK\Theta$. Daher hat (Cantor S. 151) Heron den Begriff wieder erweitert: Alles, was, zu einer Zahl oder Figur hinzugefügt, das ganze dem ähnlich macht, zu welchem hinzugefügt worden war, heiſst Gnomon.

[Satz] 1.

Wenn zwei Strecken (gegeben) sind, und die eine derselben in beliebig viele Teile geteilt wird, so ist das von beiden Strecken enthaltene Rechteck gleich den Rechtecken aus der nicht zerschnittenen Strecke und den einzelnen Teilen.

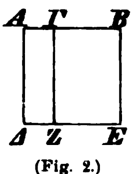
(Fig. 1.) Die [unzerschnittene] Strecke sei A, die zerschnittene $B\Gamma$.

(Fig. 1.)

Der Beweis der Formel $a(b+c+d) = ab + ac + ad$ wird unmittelbar aus der Anschauung entnommen.

2.

Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist die Summe der Rechtecke aus der ganzen Strecke und jedem der Teile gleich dem Quadrate der ganzen Strecke.



(Fig. 2.)

(Fig. 2.) Beweis der Formel, wenn $a = b + c$, so ist $a \cdot a = a(b+c) = ab + ac$, ebenfalls aus der Anschauung. Comman-

dinus 1572, Clavius 1607 fügen dieser Formel die allgemeine Multiplikationsregel $(x+y+z+\cdots)(a+b+c+\cdots) = xa + ya + za + \cdots$ hinzu. Der Satz ist schon beim Beweis des Pythagoras benutzt (Pfleiderer).

3.

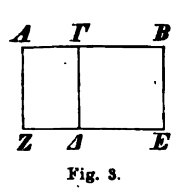


Fig. 3.

Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Teile gleich dem Rechteck aus den Teilen und dem Quadrat des vorher gewählten Teiles.

(Fig. 3.) Formel $(a+b)a = ab + a^2$, Beweis wie in 1 und 2.

4.

Wird eine Strecke beliebig geteilt, so ist das Quadrat der Ganzen gleich den Quadraten der Teile und dem doppelten Rechteck aus den Teilen.

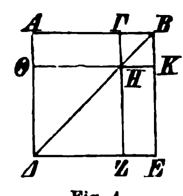


Fig. 4.

Denn die Strecke AB (Fig. 4) werde beliebig geteilt in Γ, ich behaupte:

$$AB^2 = H\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2A\Gamma \cdot \Gamma B.$$

Aus der Figur sieht man, dafs die wichtige Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ als Spezialfall von Satz I, 43 erkannt ist. Dafs man aus ihr den Pythagoras unmittelbar ableiten kann, ist bekannt. Der zweite Beweis dieses Satzes bei Campanus beweist zuerst den Satz, dafs die Diagonale den Winkel des Quadrats halbiert, Heiberg meint, dafs er vielleicht der ältere sei.

(Porisma: Hieraus ist klar, dafs in den Quadraten die um die Diagonale liegenden Parallelogramme Quadrate sind.)

Das Porisma mutmafslich Zusatz des Theon.

5.

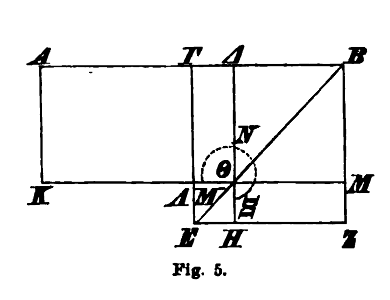


Fig. 5.

Wird eine Strecke in gleiche und ungleiche Teile zerschnitten, so ist das Rechteck aus den ungleichen Teilen samt dem Quadrat der Strecke zwischen den Teilpunkten gleich dem Quadrat der halben Strecke.

(Fig. 5.) Die Strecke AB wird bei Γ in gleiche und bei Δ in ungleiche Teile geteilt; ich behaupte:

$$A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2.$$

Es werde in ΓB das Quadrat ΓEZB konstruiert (I, 46) und BE gezogen und durch Δ zu den [Geraden] $\Gamma E, BZ$ die Parallele ΔH, durch Θ aber zu (den) AB und EZ die Parallele KM, ferner durch A zu $\Gamma\Delta$ und BM die Parallele AK. Und weil die Ergänzung $\Gamma\Theta = \Theta Z$ (I, 43), werde zu beiden das ΔM hinzugesetzt, sofort ist das ganze ΓM dem ganzen ΔZ gleich. Aber $\Gamma M = A\Lambda$, da ja $A\Gamma$ dem ΓB gleich ist; folglich ist auch $A\Lambda$ gleich ΔZ. Lege zu beiden $\Gamma\Theta$ zu, sodann ist das ganze $A\Theta$ dem Gnomon $M^{(\prime)} N\Xi$ gleich. Aber das $A\Theta$ ist $A\Delta \cdot \Delta B$; denn $\Delta\Theta = \Delta B$; und also ist der Gnomon $M'N\Xi = A\Delta \cdot \Delta B$. Zu beiden lege ΛH zu, das dem Quadrat von $\Gamma\Delta$ gleich ist; folglich ist Gnomon $M'N\Xi + \Lambda H = A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma\Delta^2$. Aber Gnomon $M'N\Xi + \Lambda H$ ist das ganze Quadrat ΓEZB, das ΓB^2 ist; also $A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2$.

Also, wenn ... etc. q. e. d.

Die Formel, welche hier bewiesen, ist: $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, es erscheint auffallend, dafs die Formeln $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ und $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ fehlen, deren geometrischer Beweis daher von Angelo de Marchettis (Euclid. reformatus 1709) zugefügt ist. Der Grund liegt wohl darin, dafs die erste Formel in der des Satzes 4 enthalten ist, sobald $a + b$ mit a bezeichnet wird, und die zweite in der eben bewiesenen. Die grofse Knappheit, der sich Euclid sachlich befleifsigt, läfst die Zusätze 2. und Beweise sämtlich als im höchsten Grade verdächtig erscheinen.

Bringt man $\Gamma\Delta^2$ auf die andere Seite, so ist damit zugleich der Potenzsatz III, 35 bewiesen.

Obwohl M zweimal in der Figur vorkommt, hat Heiberg aus Treue gegen die Handschriften den Buchstaben nicht geändert. Eigenartig ist die Bezeichnung des Gnomons dadurch, dafs die Flächenstücke, aus denen er besteht, durch den Kreisbogen bezeichnet werden.

Da das Rechteck $A\Delta\Theta K$ und das Quadrat ΓB^2 den gleichen Umfang haben: $2AB$, so ist mit 5 zugleich die älteste Maximumaufgabe gelöst, bewiesen, und unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat das Quadrat den gröfsten Inhalt (Pappos, Lemma XIII zu des Apollonius: de sectione rationis et spatii; Viviani (Florentiner

Problem!) 1659: De max. et min. geom. divin. vgl. Pfleiderer II, 15). „Da wegen seiner gröfseren Höhe das Rechteck gröfser ist als jedes andere Parallelogramm von gleichem Umfange auf derselben Grundlinie, so folgt, dafs unter allen Parallelogrammen von gleichem Umfange das Quadrat den gröfsten Inhalt hat.“ Viviani 1701 vgl. Pfleiderer l. c. Euclid selbst beweist den Maximums-Satz in allgemeiner Fassung erst VI, 27.

6.

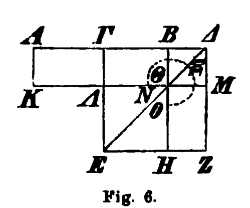


Fig. 6.

Wird eine Strecke AB in Γ halbiert und AB um irgend eine Strecke $B\Delta$ verlängert, so ist $A\Delta \cdot \Delta B + \Gamma B^2 = \Gamma\Delta^2$.

(Fig. 6.) Der Satz $(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$ ist unmittelbar anschaulich, wenn man von dem Quadrat über $(a+b)$ ausgeht, also von ΓZ.

7.

Wenn eine Strecke beliebig zerschnitten wird, so sind die beiden Quadrate aus der ganzen Strecke und einem der Teile [zusammen] gleich dem doppelten Rechteck aus der Strecke und dem gewählten Teile und dem Quadrat des andern Teils.

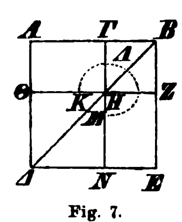


Fig. 7.

Die Strecke AB beliebig in Γ geteilt, so ist $AB^2 + B\Gamma^2 = 2AB \cdot B\Gamma + \Gamma\Delta^2$ (Fig. 7). Formel $(a+x)^2+a^2=2(a+x)a+x^2$.

Der Beweis läfst sich, ähnlich wie der von 6, rein anschaulich führen, dadurch, dafs man zur Figur $NE^2 = \Gamma B^2$ hinzusetzt. Der Formel läfst sich die Form geben: $u^2+v^2=2uv+(u-v)^2$, wo sie aussagt, dafs die Summe der Quadrate zweier Strecken (Gröfsen) ihr doppeltes Rechteck (Produkt) stets um das Quadrat der Differenz übertrifft. Ferner: $(u-v)^2=u^2+v^2-2uv$, die bekannte Formel über das Quadrat der Differenz.

8.

Wenn eine Strecke beliebig geteilt wird, so ist das vierfache Rechteck aus der ganzen [Strecke] und einem der Teile samt dem Quadrat des anderen Teiles gleich dem über der ganzen Strecke und dem gewählten Teil, als wären sie eine, beschriebenen Quadrat.

(Fig. 8.) Die Strecke AB beliebig zerschnitten im Punkte Γ. Ich behaupte, dafs $4AB\cdot B\Gamma+A\Gamma^2=(AB+B\Gamma)^2$.

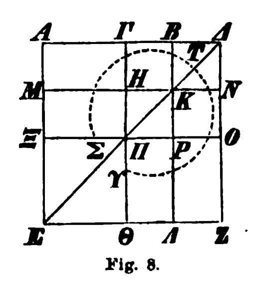


Fig. 8.

Es werde AB um ΓB verlängert bis Δ und über $A\Delta$ das Quadrat konstruiert $AEZ\Delta$ und die zweifache Figur (d. h. die Figur mit 2 Paaren „Ergänzungen"). Beweis folgt aus I, 43, da $HP=PN=K\Delta$. Der Beweis kann auch ohne die Parallelen durch B und K geführt werden, da $4\Gamma K=\Gamma O$ ist. Die Formel ist $4(a+b)a+b^2=[(a+b)+a]^2$. Der Satz ist von 6 nicht verschieden.

9.

Wird eine Strecke in gleiche und in ungleiche Abschnitte zerschnitten, so ist die Summe der Quadrate der ungleichen Abschnitte doppelt so grofs, als die Summe der Quadrate der halben Strecke und des Zwischenraumes zwischen den Teilpunkten.

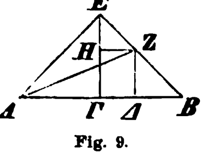


Fig. 9.

(Fig. 9.) AB in Γ in gleiche, in Δ in ungleiche Teile geteilt, so soll $A\Delta^2+\Delta B^2=2(A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2)$. Man errichte in Γ das Lot $\Gamma E=A\Gamma=B\Gamma$ und ziehe AE und BE und durch Δ zu ΓE die Parallele ΔZ, durch Z aber der Geraden AB parallel ZH und verbinde A mit Z. Dann sind $A\Gamma E$, $B\Gamma E$ gleichschenkelig rechtwinkelige Dreiecke, also AEB ein rechter und durch $E\Gamma$ halbiert, ferner EHZ gleichschenkelig rechtwinkelig, und $Z\Delta B$ desgleichen, also $AZ^2=AE^2+EZ^2=2(A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2)$ und $AZ^2=A\Delta^2+\Delta Z^2$ also $2(A\Gamma^2+\Gamma\Delta^2)=A\Delta^2+\Delta B^2$ q. e. d.

Der hübsche Beweis weicht von der Art der bisherigen ab, in Pfleiderers Scholien finden sich viele verschiedene Beweise, die ihn auf die früheren zurückführen. Die Formel, die er giebt

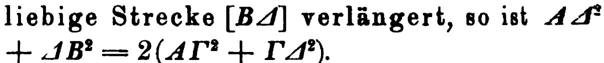
$$a^2+b^2=2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2\right]=2\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

bezw. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$, läfst sich verallgemeinern und ist die bekannte Transformationsformel für quadratische Formen.

Da $(a-b)=0$, sowie $a=b$, so folgt: Die Summe zweier Quadrate, deren Seitensumme konstant ist, ist am kleinsten, wenn die Seiten gleich sind (L'Huilier de relatione mutua capacitatis etc. . . . Varsoviae 1782).

10.

Wird eine Strecke [AB in Γ] halbiert und um eine beliebige Strecke [$B\Delta$] verlängert, so ist $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$.



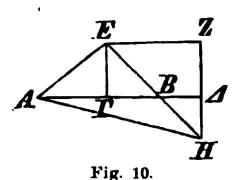


Fig. 10.

(Fig. 10.) Man ziehe von Γ senkrecht zu AB das Lot ΓE gleich $A\Gamma$ bezw. ΓB etc. Es ist $\Delta B = \Delta H$ (Winkel von 45°) und desgleichen $EZ = ZH$, also $A\Delta^2 + \Delta B^2 = AB^2 = AE^2 + EB^2 = 2A\Gamma^2 + 2\Gamma\Delta^2 = 2(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$. Formel $(2a+b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a+b)^2)$.

11.

[Aufgabe.] Eine gegebene Strecke so zu schneiden, dafs das Rechteck aus der ganzen und dem einen Abschnitt gleich ist dem Quadrat des andern Abschnitts.

(Fig. 11.) Sei die gegebene Strecke die AB. Man soll nun die AB schneiden, so dafs das Rechteck aus der ganzen etc. Es werde das Quadrat von AB gezeichnet: $AB\Delta\Gamma$, und $A\Gamma$ halbiert im Punkte E, und B mit E verbunden und ΓA durchgeführt nach Z und BE der EZ gleich gesetzt, und das Quadrat von AZ gezeichnet: $Z\Theta$; so behaupte ich, dafs AB in Θ so geteilt ist, um das Rechteck aus AB und $B\Theta$ dem Quadrat von $A\Theta$ gleich zu machen.

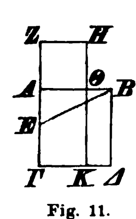


Fig. 11.

Denn da $A\Gamma$ in E halbiert ist, und ZA ihr zugesetzt ist, so ist $\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = EZ^2$ (S. 6).

Aber $EZ = EB$, folglich $AZ \cdot ZA + AE^2 = EB^2$.

Aber $EB^2 = BA^2 + AE^2$, denn der Winkel bei A ist ein rechter: Folglich $\Gamma Z \cdot ZA + AE^2 = BA^2 + AE^2$.

Auf beiden Seiten werde AE^2 fortgenommen, so ist nun der Rest, das Rechteck aus ΓZ und ZA, gleich AB^2.

Und es ist $\Gamma Z \cdot ZA = ZK$, denn $AZ = ZH$; und $AB^2 = A\Delta$.

Folglich $ZK = A\Delta$. Beiderseits soll AK weggenommen werden; so ist der Rest nämlich $Z\Theta$ dem $\Theta\Delta$ gleich, und es ist $\Theta\Delta$ das Rechteck aus AB und $B\Theta$, weil AB der $B\Delta$ gleich ist; aber $Z\Theta$ das [Quadrat] von (der) $A\Theta$. Folglich ist das Rechteck aus AB und $B\Theta$ dem Quadrat von ΘA gleich.

Also ist etc. . . ., wie z. thun war.

Hier tritt also die Teilung nach dem goldenen Schnitt, oder die stetige Teilung zuerst auf, sie ist zugleich die Lösung der quadratischen Gleichung $a(a - x) = x^2$ und wird hier auf die Lösung von $x(x + a) = a^2$ zurückgeführt, bezw. wird hier schon gezeigt, dafs der Minor einer ersten Teilung zugleich der Major der Teilung des ersten Major ist. Die Teilung tritt noch einmal auf in VI, 30. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dafs damit auch das System $x + y = a, xy = x^2 - y^2$ gelöst ist, ebenso wie die geometrische Aufgabe: ein rechtwinkliges Dreieck zu konstruieren, in dem die linke Kathete gleich dem rechten Höhenabschnitt. Die Analyse ging, das zeigt der Gang des Beweises, aus dem Satz 4 hervor und führte damit auf die Konstruktion der Quadratwurzel aus 5.

12.

In (den) stumpfwinkligen Dreiecken ist das Quadrat der den stumpfen Winkel unterspannenden Seite gröfser als die Quadrate der den stumpfen Winkel einschliefsenden Seiten um das doppelte Rechteck aus einer von den [Seiten] um den stumpfen Winkel, welche das Lot schneidet, und dem Stück, welches das Lot aufsen am stumpfen Winkel abschneidet.

B

Δ A Γ

Fig. 12.

(Fig. 12.) $AB\Gamma$ das Dreieck, $BA\Gamma$ der stumpfe Winkel, $B\Delta$ das Lot. Behauptung:

$$B\Gamma^2 = BA^2 + A\Gamma^2 + 2\Gamma A \cdot A\Delta.$$

Weil nämlich die Strecke $\Gamma\Delta$ in A geschnitten ist (wie es traf), ist $\Delta\Gamma^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma A \cdot A\Delta$ (4).

Auf beiden Seiten füge ΔB^2 hinzu, so folgt (ἄρα) $\Gamma\Delta^2 + \Delta B^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2\Gamma A \cdot A\Delta$.

Aber $\Gamma B^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta B$; $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$, also $\Gamma B^2 = \Gamma A^2 + AB^2 + 2\Gamma A \cdot A\Delta$. q. e. d.

13.

Im spitzwinkligen Dreieck ist das Quadrat der den spitzen Winkel unterspannenden Seite kleiner als die Quadrate der den spitzen Winkel einschliefsenden Seiten um das doppelte Rechteck aus einer der [Seiten] um den spitzen Winkel, welche das Lot schneidet und dem Stück, welches das Lot innen am spitzen Winkel abschneidet.

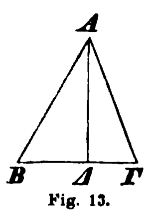


Fig. 13.



(Fig. 13.) Der Beweis ist dem vorigen ganz analog

Zu bemerken ist 1) der Gebrauch des bestimmten Artikels, welcher unsere Auffassung der ersten Forderung auf das intensivste bestätigt und ganz klar macht, dafs eine mündliche Demonstration vorausgesetzt wird. 2) Ohne weiteres wird aus der Anschauung angenommen, dafs Δ das eine Mal aufserhalb, das andere Mal innerhalb fällt.

Die Stellung der Sätze im System ist bemängelt worden, in der That kann man die Sätze 12, 13, 14 unmittelbar an den Pythagoras schliefsen.

Sehr hübsch ist die Art, wie Coets (Hendric) durch Vergleichung mit dem rechtwinkligen Dreieck (Fig. 13a) beweist, dafs $AC < EC$, also $AC^2 < AB^2 + BC^2$ ist und $A'C > EC$ also $A'C^2 > EC^2$ ist. Ich füge den von Coets (1641?) gegebenen Beweis zu 12 hinzu, der aus der Figur (13b) unmittelbar erhellt. Ein sehr anschaulicher Beweis, der sich ganz eng an den Euclidischen Beweis des Pythagoras anschliefst, rührt von Gregora St. Vincentio, Schüler von Clavius und Jesuit wie dieser, her: er findet sich oft in den Lehrbüchern ohne Quellenangabe.

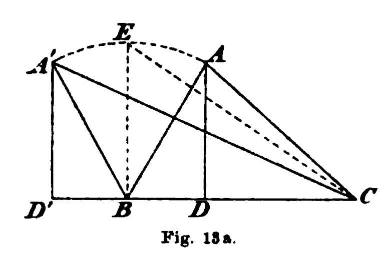


Fig. 13a.

Es ist schon früh (Campanus, Isaacus Monachus) bemerkt worden, dafs Satz 13 zu eng gefafst ist und heifsen mufs: In jedem Dreieck ist das Quadrat einer einen spitzen Winkel etc. und Lorenz hat den Satz so geändert. Angesichts der Einstimmigkeit der Quellen habe ich (nach Heiberg den Wortlaut gelassen. Dafs Euclid die allgemeine Geltung bekannt war, folgt aus S. 65 der Data. Euclid ist wohl durch die Symmetrie zu 12 zu seiner Fassung veranlafst. Es fehlen übrigens auch die Umkehrungen der Sätze, welche Clavius analog von I, 48 gegeben hat. Die Sätze selbst, welche ja nichts anderes sind, als der Cosinussatz, spielen

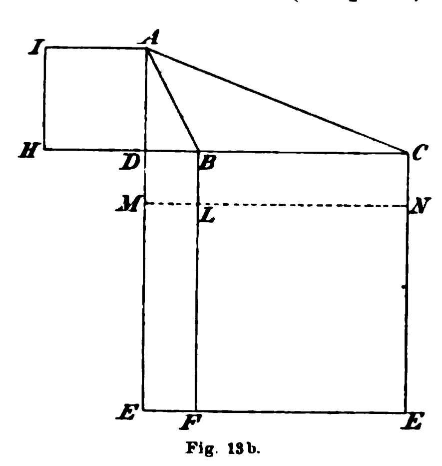


Fig. 13b.

im System eine geringe Rolle; nur 12 wird zum Beweis von XII, 17 (zweiter Teil) herangezogen. Bei Pappos finden sich viele Anwendungen, darunter die bekannten $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + m^2$, wo m die Mittellinie, und: im gleichschenkligen Dreieck übertrifft das Quadrat jedes Schenkels das Quadrat einer beliebigen Verbindung der Spitze mit der Basis um das Rechteck aus den Abschnitten.

14.

[Das] Quadrat zu konstruieren, welches der [einer] gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

(Fig. 14.) Die Figur sei $\varDelta$. Konstruiere (I, 45) ein der Figur $\varDelta$ gleiches Rechteck (das hier) $B\varDelta$. Wenn nun BE gleich $E\varDelta$ ist, wäre die Aufgabe fertig. Denn es steht da dem geradlinigen (*ευϑυγραμμος*) $\varDelta$ gleich das Quadrat, hier das $B\varDelta$. Wenn aber nicht, so ist eine von BE und $E\varDelta$ die gröfsere. Es soll die gröfsere hier (ἡ) BE sein und soll bis Z ausgezogen werden und EZ gleich $E\varDelta$ gesetzt werden und BZ in H gehälftet werden und mit dem Zentrum H in dem Abstand (Radius) entweder von HB oder HZ der Halbkreis $B\Theta Z$ beschrieben, und $\varDelta E$ bis Θ verlängert und H mit Θ verbunden.

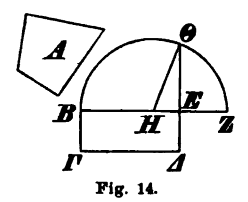


Fig. 14.

Weil nun die Strecke BZ in H in gleiche und in E in ungleiche Teile zerschnitten ist, so ist

$$BE \cdot EZ + EH^2 = HZ^2 \quad (5)$$

aber $HZ = H\Theta$, folglich $BE \cdot EZ + EH^2 = H\Theta^2$.

Aber $H\Theta^2 = \Theta E^2 + EH^2$, folglich $BE \cdot EZ + HE^2 = \Theta E^2 + EH^2$. Nimm auf beiden Seiten HE^2 weg. Der Rest nun, das Rechteck aus BE und EZ ist dem Quadrat von $E\Theta$ gleich. etc.

Vor allem mache ich wieder auf den Unterschied im Gebrauch des bestimmten und unbestimmten Artikels zwischen unserer und der griechischen Sprache aufmerksam und wie auch hier die volle Eindeutigkeit durch das Weglassen des Artikels und Zahlenwertes gekennzeichnet wird. Der Grund, warum die Aufgabe am Schlufs von Buch II steht, ist einfach der, dafs jetzt die Brauchbarkeit des Kreises an dieser fundamentalen Aufgabe so recht deutlich wieder hervortritt und sich nun die Betrachtung dem Kreise zuwendet, dem das dritte Buch gehört.

Robert Simson hat (cf. Pfleiderer) schon bemerkt, dafs die Unterscheidung von BE und $E\Delta$ überflüssig; in unserem heutigen Lehrgang ist dies gerade der Vorzug dieser Konstruktion, welche den Satz aus der Satzgruppe des Pythagoras enthält: Das Quadrat der Höhe etc. vor der andere, welcher den Satz derselben Gruppe braucht: Das Quadrat der Kathete etc. Die Sätze selbst kommen als sehr verdächtige Zusätze zu VI, 8 in den Elementen vor.

III. [Buch.]

Erklärungen.

1)[1] Gleich sind die Kreise, deren Durchmesser oder deren Radien[2]) gleich sind.

2)[3] Man sagt: eine Gerade berührt den Kreis, wenn sie mit dem Kreis zusammentrifft und verlängert ihn nicht schneidet.

3)[4] Man sagt: Kreise berühren einander, wenn sie zusammentreffen ohne sich zu schneiden.

4) Man sagt: Dafs Gerade innerhalb[5] des Kreises vom Zentrum gleich weit abstehen, wenn die vom Zentrum aus bis zu ihnen hin gezogenen Lote gleich sind.

5) Und dafs die weiter abstehe, bis zu der das längere Lot geht.

6) **Kreisabschnitt (Segment)** ist die Figur, welche von einer Geraden und der[6] Peripherie des Kreises begrenzt wird.

7) **Winkel des Kreisabschnitts** heifst der Winkel[7] zwischen der Geraden und der Peripherie.

8) Nimmt man auf dem Bogen des Segments irgend einen Punkt und verbindet ihn mit den Endpunkten der Geraden, welche die **Basis**[8] des Segments heifst, so heifst der Winkel zwischen den Verbindungsgeraden **Winkel im Segment**.

9) Wenn aber Gerade, welche einen Winkel einschliefsen, einen Bogen abschneiden, so sagt man, der **Winkel stehe**[9] auf jenem [Bogen].

10)[10] **Kreisausschnitt (Sektor)** heifst die Figur, welche enthalten ist zwischen zwei vom Zentrum ausgehenden Geraden und dem Bogen, welchen sie begrenzen.

11) **Gleichartige (Ähnliche)** Kreisabschnitte sind solche, welche gleiche Winkel fassen (Def. 9) oder deren Winkel (Def. 8) gleich sind.

Anmerkungen.

1) Über den Grund, weshalb Euclid den Satz in Def. 1 nicht beweist, vgl. die Note zu Post. 4.

Der terminus technicus „radius“, griech. „ἀκτὶς“ findet sich weder im griech. noch im arab. Euclid. Euclid, Archimedes, Heron, Pappus etc. sagen „ἡ ἐκ [τοῦ] κέντρου“; radius (wie ακτιν oder ακτις) vom Stamme rad bedeutet ein geschabtes Stäbchen, das auch zum Figurenzeichnen (Cic. Tusc. etc.) der Feldmesser diente, dann auch cf. Boötius eine bestimmte Länge erhielt, und als Meſsinstrument diente; es wurde vermutlich früh zum Kreisziehen im Felde verwandt, bekommt die Bedeutung „Radspeiche“ und Strahl, aber schon Cicero Timaeus cap. 6 „cujus omnis extremitas paribus a mediis radiis attingitur“ kennt es in unserm heutigen Sinne, und so haben es vermutlich die röm. Agrimensoren gebraucht. Im mittelalterlichen Latein heiſst es nach dem Arabischen: „Semidiameter“ und so noch 1607 bei Clavius, bei Sturm (J. Chr.), in der Mathesis enucleata schon: Radiis sive semidiametris und bei Leibniz und Chr. Wolf schon nur Radius, vermutlich aus dem franz. rayon.

2) Hier zeigt sich, daſs die Übersetzung von ἅπτεσθαι mit berühren falsch ist (vgl. Note zu Def. 8, B. I), es muſs zwischen ἐφάπτεσθαι „berühren“ und „ἅπτεσθαι“ zusammentreffen unterschieden werden und „ἁφή“ ist mit „Treffpunkt“ zu übersetzen.

3) Wie 2; es mag daran erinnert werden, daſs E. unter Kreis schlechtweg die Fläche, nicht die Linie versteht.

4) Den Fall, daſs die Gerade auſserhalb der Kreisfläche verläuft berücksichtigt E. nicht.

6) Der Kreisabschnitt, das Segment allgemein τμῆμα von τέμνω schneiden; für Kreisabschnitte, die kleiner als der Halbkreis, hat Heron in den Definitionen den noch heute in der Architektur gebräuchlichen Kunstausdruck ἀψίς“ (Apsis), der Kunstausdruck „Bogen“ (arcus) für ein Stück des Umkreises war den Griechen fremd, ihr Kriegsgerät war der καμπυλον τοξον ⅄, der (kurvenförmige) krumme Bogen, und ihre Sehne war nur an einem Ende angespannt, und der Bogen wurde durch Zusammendrücken gespannt. Die Worte „Bogen“, „Sehne“ („Pfeil“) sind vermutlich von den Indiern zu den Arabern gekommen, wo sie sich ganz früh, z. B. schon bei den „lauteren Brüdern“ (10. Jahrh.) finden, und in dem „Buch des Maſses“, dessen hebräischen Text Steinschneider ediert hat. Daher finden sich beim Campanus, der ja

arab. Quellen benutzte, „arcus" und chorda, dagegen beim Zamberti nicht. Die Kunstworte verbreiteten sich langsam, Clavius braucht sie nicht und Barrow 1650 auch noch nicht. Für Peripherie findet sich bei Heron in den Definitionen, von denen ich mit Tannery nach genauerem Studium des Proclus auch glaube, dafs sie Geminus gehören, auch Perimetros.

Im Wortlaut der Def. 6 beachte man den Wegfall des Artikels vor περιφερ.

7) Der Winkel ist gemischtlinig, die Definition setzt bereits voraus, dafs die beiden Winkel an den beiden Endpunkten der Sehne gleich sind, was Euclid aber nicht besonders beweist. Die Definition des Winkels von Apollonios pafst hier besser, sie ist in die Definitionen Herons aufgenommen und ich sehe darin ein Argument, das für Geminos spricht.

8) Das Wort Basis wird sehr oft gebraucht, es kommt aus der Geodäsie, von βαινω „schreiten", allgemeine Erklärung in der Geometria Heron. S. 44, N. 7. „Sehne" wird meist mit εν κυκλῳ ευθεια (Gerade im Kreis) bezeichnet.

9) Das Perf. von „βαινω" bedeutet „stehen".

10) Griech. τομεὺς, aktiv, soviel wie „einer, der schneidet", daher richtig mit „Sektor" wiedergegeben. Die hier gewählte abgekürzte Fassung der Definition ist nach Campanus bezw. arabischen Ursprungs.

Das häufige Fehlen des Artikels vor κυκλος zeigt, dafs sich die Sätze auf einen einzigen vorliegend gedachten Kreis beziehen. Übrigens ist der Sprachgebrauch im 3. Buch nicht mehr so fest wie im 1. und 2., das 3. Buch vielleicht auch im Vaticanus nach der Bearbeitung von Theon erhalten.

Satz 1. [Aufgabe.]

Das Zentrum eines gegebenen Kreises zu finden.

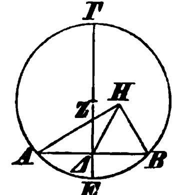


Fig. 1.

(Fig. 1.) Man ziehe in ihm irgend eine Sehne AB, halbiere sie in Δ, errichte in Δ die Senkrechte $\Delta\Gamma$, verlängere sie bis E, halbiere ΓE in Z, so ist Z das Zentrum des Kreises $AB\Gamma$.

Z sei es nicht, sondern, wenn möglich, soll es H sein, und es mögen HA, $H\Delta$, HB gezogen werden; dann wäre $A\Delta H \cong B\Delta H$ (I, 8), also $\sphericalangle A\Delta H = H\Delta B$, also $\sphericalangle Z\Delta B = H\Delta B$, der gröfsere dem kleineren gleich, was unmöglich.

Zusatz.

Hieraus ist ersichtlich, daſs, wenn im Kreise eine Gerade eine Sehne in der Mitte und senkrecht schneidet, auf der Schneidenden das Zentrum des Kreises liegt.

Der Satz 1 wird von Proclus p. 302 als Beispiel eines „Porisma“ im weiteren Sinne angeführt; der Beweis ist, wie vielfach im 3. Buch, indirekt, weil der zu beweisende Satz eigentlich lautet: das Zentrum kann nicht auſserhalb der Mittelsenkrechten der Sehne liegen.

2.

Werden auf der Peripherie des Kreises zwei beliebige Punkte herausgegriffen, so wird die Gerade, welche die Punkte verbindet, innerhalb des Kreises fallen.

Fig. 2.

(Fig. 2.) Beweis indirekt, der Satz ist, wie schon Pfleiderer bemerkt, identisch mit dem Satz: Jede Gerade von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Grundlinie ist kleiner als der Schenkel (I, 16 und I, 19).



3.

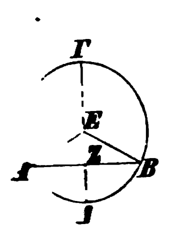


Fig. 3.

Wenn im Kreise eine Gerade durch das Zentrum eine Sehne, die nicht durchs Zentrum geht, in der Mitte schneidet, so schneidet sie die Sehne auch rechtwinklig, und wenn sie die Sehne rechtwinklig schneidet, so schneidet sie sie auch in der Mitte.

(Fig. 3.) Auch Satz 3 ist identisch mit Sätzen über das gleichschenklige Dreieck.

4.

Wenn zwei Sehnen[1]), welche nicht durch das Zentrum gehen, einander schneiden, so halbieren sie sich nicht gegenseitig.

(Fig. 4.) Beweis indirekt, ZEA und ZEB müſsten als rechte Winkel einander gleich sein.

1) „Sehne“ wiedergegeben durch „Gerade im Kreise“.

5.

Falls sich zwei Kreise schneiden sollten, wird ihnen das Zentrum nicht gemeinsam sein.

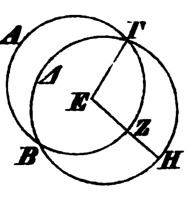


Fig. 5.

(Fig. 5.) „Denn wenn [das Gegenteil] möglich, sei es E, und es werde E mit Γ verbunden und EZH beliebig gezogen", dann müfsten EZ und EH, weil beide gleich $E\Gamma$, gleich sein, was unmöglich.

Zu bemerken ist hier wieder der Anteil der Anschauung am Beweise wie am Satze.

6.

Wenn sich zwei Kreise berühren, haben sie das Zentrum nicht gemeinsam.

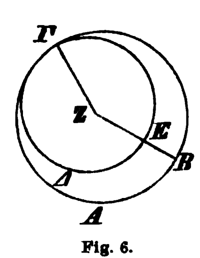


Fig. 6.

(Fig. 6.) Beweis indirekt wie in 5; Euclid behandelt nur die innere Berührung, da der andere Fall keines Beweises bedarf.

7.

Nimmt man auf einem* Durchmesser des* Kreises einen Punkt, der nicht das Zentrum ist, und zieht von diesem Punkt aus bis an den Kreis hin irgend welche Geraden [Strecken], so ist die gröfste, auf der das Zentrum, die kleinste aber der Rest; von den anderen ist immer die [der durch das Centrum] der Gröfsten nähere gröfser als die fernere; und es gehen nur [je] zwei gleiche vom Punkt zum Kreis, auf jeder von beiden Seiten der kleinsten.

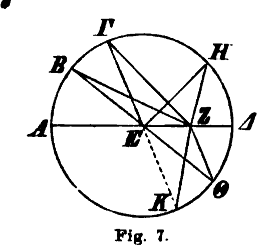


Fig. 7.

(Fig. 7). $A\Delta$ der Durchmesser, Z der Punkt, ZA, ZB, $Z\Gamma$, ZH die Strahlen, man zieht die Radien EB, $E\Gamma$, EH, und wendet I, 20 an, so folgt $ZA > ZB$; dafs $ZB > Z\Gamma$, folgt uns I, 24 (sind in 2 Dreiecken zwei Seiten gleich etc.). Ferner da $ZH + EZ > EH$, also auch $> E\Delta$, so folgt durch Wegnahme von EZ, dafs $ZH > Z\Delta$. Schliefslich folgt aus dem 1. Kongruenzsatz, dafs zwei symmetrisch zu $Z\Delta$ liegende Strecken ZH und $Z\Theta$ gleich sind, und aus Anwendung des zweiten Teils des Satzes 7, dafs nur $Z\Theta$ gleich ZH ist.

Griechisch der bestimmte Artikel vor Durchmesser und kein Artikel vor Kreis, d. h. also der Artikel ist demonstrativ und der Kreis wird als der ganz bestimmte einzige, von dem stets die Rede ist, betrachtet.

8.

Wenn aufserhalb [des] Kreises irgend ein Punkt genommen wird, und von diesem (hier) an den Kreis [da] irgend welche Geraden gezogen werden, eine durch das Zentrum, die andere, wie es trifft —, so ist von den bis an die Konkavität des Umfangs gehenden Geraden die durch das Zentrum die gröfste, von den anderen immer die ihr nähere gröfser als die ihr fernere; von den bis an die Konvexität gehenden ist die kleinste die zwischen dem Punkt und dem Durchmesser, von den anderen aber ist immer die ihr nähere kleiner als die ihr fernere.

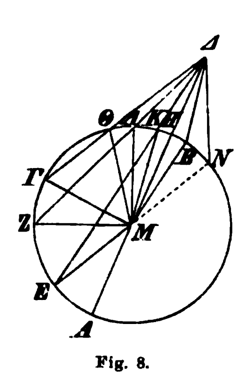


Fig. 8.

(Fig. 8.) Beweis wie in 7. Getadelt ist oft das Fehlen der Definition von Konkavität und Konvexität; sie findet sich in der Definition Herons Nr. 34. „Jede Kreislinie heifst, wenn man sie von innen anschaut, 'hohl' (konkav), wenn von aufsen, 'erhaben' (konvex).“

9.

Wenn innerhalb des Kreises ein Punkt herausgegriffen wird und von diesem Punkt aus bis an den Kreis mehr als zwei gleiche Geraden gehen, so ist der herausgegriffene Punkt [das] Zentrum des Kreises.

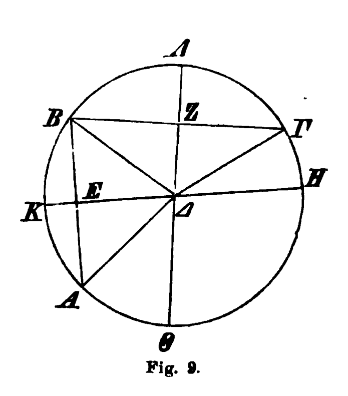


Fig. 9.

(Fig. 9.) Direkter Beweis. Wenn E und Z die Mitten von AB und $B\Gamma$ sind, so sind, falls $\Delta A = \Delta B = \Delta\Gamma$ ist, die Dreiecke $AE\Delta$ und $BE\Delta$ kongruent und ebenso $B\Delta Z \simeq \Gamma\Delta Z$, somit, nach Satz 1, Zusatz, sind die KH und $\Lambda\Theta$ Durchmesser und ihr Schnitt Δ das Centrum.

Hätte Euclid einen indirekten Beweis geben wollen, so konnte er den Satz unmittelbar aus Satz 7 folgern.

10.

Kreis schneidet Kreis in nicht mehr als zwei Punkten.

(Fig. 10.) Beweis indirekt. Hätten die Kreise auch nur die 3 Punkte Θ, B, H, gemeinsam, so müſste Θ durch Satz 1, Zusatz, das Zentrum beider Kreise sein, und dies verstöſst gegen Satz 5.

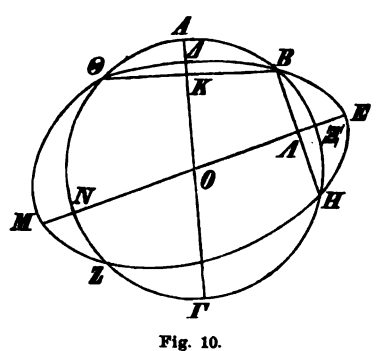


Fig. 10.

11.

Wenn sich zwei Kreise von innen berühren, und ihre Zentren genommen [konstruiert Satz 1] werden, so trifft die Verbindungsgerade der Zentren, in der Verlängerung einen* Treffpunkt.

(Fig. 11.) Beweis indirekt, Z Zentrum von $AB\Gamma$, H von $A\Delta E$, ZH fiele wie $ZH\Theta$ und man ziehe AZ, AH. Da $AH + HZ > ZA$, also auch $> Z\Theta$, so wäre $AH > H\Theta$, also $H\Delta > H\Theta$, was unmöglich.

Im Griechischen steht der bestimmte Artikel, aus Satz 13 folgt, daſs er deutsch durch den unbestimmten Artikel wiedergegeben werden muſs; auch bei diesem Satz und Beweis fällt der Hauptteil auf die Anschauung.

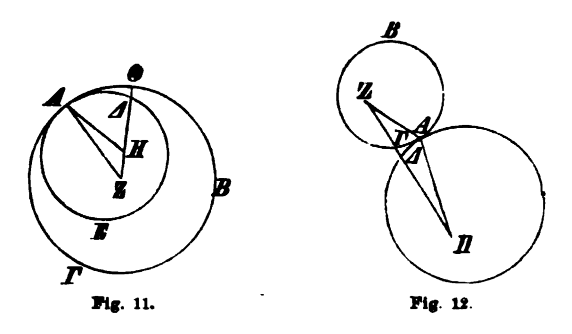


Fig. 11. Fig. 12.

12.

Falls sich zwei Kreise von auſsen berühren sollten, wird die ihre Zentren verbindende [Gerade] durch eine Berührungsstelle gehen.

(Fig. 12.) Beweis indirekt. Widerspruch gegen I, 20.

13.

Kreis berührt Kreis in nicht mehr als einem Punkte, er möge von innen oder von aufsen berühren.

Beweis indirekt (Fig. 13). Fall 1) B und Δ seien die Berührungsstellen, H und Θ die Zentren, dann geht nach Satz 11 $H\Theta$ durch B und Δ, es wäre also $BH = H\Delta$ und $BH + H\Theta = H\Delta - H\Theta$, was absurd. — Fall 2) $A\Gamma$ müfste im Innern beider Kreise liegen, nach Satz 2, die Kreise also sich schneiden. (Anschauung!)

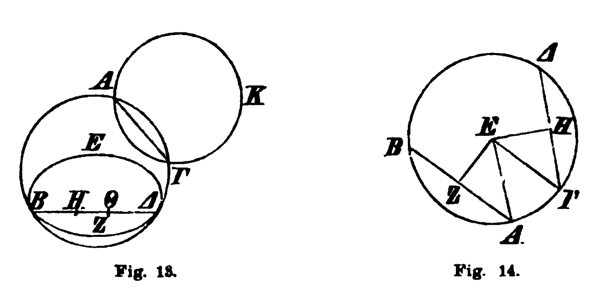


Fig. 13. Fig. 14.

14.

Gleiche Sehnen haben vom Zentrum gleichen Abstand, und Sehnen, welche gleichen Abstand vom Zentrum haben, sind gleich.

(Fig. 14.) Beweis durch den Pythagoras.

Der heute übliche Beweis benutzt den sogen. 4. Kongruenzsatz, der bei Euclid fehlt; es ist aber hervorzuheben, dafs der Satz ohne 4. Kongruenz und ohne Pythagoras bewiesen werden kann; wie z. B. bei Campanus (arab. Euclid).

15.

Die gröfste [Sehne] im Kreis ist der Durchmesser, von den andern ist immer die dem Zentrum nähere gröfser als die fernere.

(Fig. 15.) Wenn ZH die fernere, $B\Gamma$ die nähere ist, so ist nach Satz 14 $MN = B\Gamma$ und die Dreiecke MEN und ZEH stimmen in 2 Seiten überein, während $\sphericalangle\, MEN > ZEH$ ist, also nach I, 24 MN oder $B\Gamma > ZH$.

Dieser vom Parallelenaxiom unabhängige Beweis ziemlich durch den, der den Pythagoras und damit das

Parallelenaxiom benutzt, verdrängt; selbst in dem angeblich so euclid England (vgl. A Text-Book of E. Elem. Hall and Stevens 1899), Grund vermutlich, weil dieser Beweis die Anschauung benutzt, und die Leute euclidischer sein wollen als Euclid.

16.

Die Gerade, welche zu einem Durchmesser eines Kreises im Endpunkt senkrecht gezogen wird, wird aufserhalb des Kreises fallen und in den Zwischenraum zwischen der Geraden und der Peripherie wird keine andere Gerade hineinfallen, und der Winkel des Halbkreises ist gröfser als jeder spitze geradlinige Winkel, der Rest aber kleiner.

(Fig. 16.) a) Die Annahme, dafs das Lot schneide, etwa in Γ, verstöfst mittelst I, 5 gegen I, 17. b) Liefse sich zwischen Kreis und Lot etwa AZ ziehen und wäre ΔH senkrecht zu AZ, so müfste (I, 19) $A\Delta > H\Delta$, also auch $\Delta\Theta > H\Delta$ sein, was gegen die Anschauung verstöfst. c) Wörtlich.

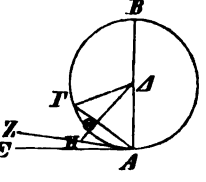


Fig. 16.

Ich behaupte, dafs auch der Winkel des Halbkreises, der von der Geraden BA und der Peripherie $\Gamma\Theta A$ begrenzte, gröfser ist als jeder spitze geradlinige Winkel, der Rest aber, der von der Peripherie $\Gamma\Theta A$ und der Geraden AE begrenzte, kleiner als jeder spitze geradlinige Winkel.

Denn wenn ein geradliniger Winkel existierte, gröfser als der von der Geraden BA und dem Bogen $\Gamma\Theta A$ begrenzte, oder einer der kleiner als der zwischen den Bogen $\Gamma\Theta A$ und der Geraden AE, dann wird in den Zwischenraum zwischen der Peripherie und der Geraden AE eine Gerade hineinfallen, welche den Winkel machen wird, der gröfser ist als der zwischen der Geraden BA und der Peripherie $\Gamma\Theta A$ und den, der kleiner ist als der zwischen der Peripherie $\Gamma\Theta A$, und der Geraden AE. Aber sie fällt nicht hinein [wie sub b) bewiesen].

Zusatz.

Hieraus ist zu ersehen, dafs die Senkrechte im Endpunkte eines Durchmessers eines Kreises den Kreis berührt.

In dem dritten Teil des Satzes 16 liegt der Ursprung des bekannten Streits über den sogen. Kontingenzwinkel, d. i. den Winkel zwischen der Kurve und ihrer Tangente. Zunächst erscheint der ganze

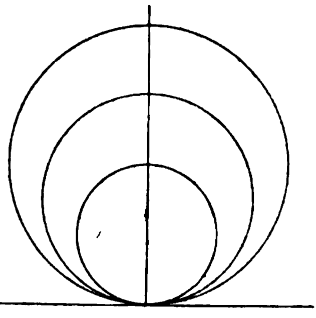
dritte Teil samt seinem Beweis, wie Vieta, Viviani und Rob. Simson bemerken, verdächtig, da er nichts weiter beweist, als was schon im zweiten Teil bewiesen, nämlich, dafs zwischen der Kurve und der berührenden Linie erster Ordnung sich keine andere Linie erster Ordnung ziehen lasse. Aber jedenfalls ist er schon sehr früh in die Elemente aufgenommen, da er sich in allen Codices findet. Er ist eine Folge der schon in Definition 8, Buch I hervortretenden Unklarheit über den Begriff des Winkels; es gehen die beiden Motive: „Richtungsunterschied" scilicet „Mafs desselben" und „Flächengröfse", welche von den den Winkel begrenzenden Linien umfangen wird, stark durcheinander. Beim krumm- (κερατοειδής, hornförmig) oder gemischt-linigen kommt nur das erste Motiv in Frage, beim geradlinigen mehr und mehr das zweite. Dafs der Teil 3 des Satzes schon früh Anstofs erregte, geht aus Proclus hervor, und ebenso aus Campanus p. 67. Bei der Bedeutung, welche die Diskussion über den „Kontingenzwinkel" für die Klärung der wichtigsten geom. Begriffe gehabt, ist darauf näher einzugehen.

Der Name „Angulus contingentiae" rührt von Jordanus her, dem grofsen Ordensgeneral der Dominikaner 1220, wo er sich in dem von Max. Curtze herausgegebenen Werke „de triangulis" findet, auch Clavius beruft sich auf Jordanus als Gewährsmann. Campanus weist l. c. (mit den Worten des Proclus) nach, dafs der 3. Teil des S. 16 gegen das Prinzip (des Bryson) verstöfst, wonach eine stetige Gröfse von einem Wert zum andern durch alle Zwischenwerte hindurchgeht, und er bemerkt auch, dafs der Kontingenzwinkel zweier sich berührender Kreise sich teilen lasse. Von einem Verstofs gegen X, 1, den berühmten ersten Konvergenzsatz: „Nimmt man von einer Gröfse mehr als die Hälfte weg, vom Rest desgleichen und so fort, so kommt man schliefslich zu einem Rest, der kleiner ist als jede noch so klein vorgegebene Gröfse", ist bei Campanus l. c. nicht die Rede, und die Angabe Cantors B. 2, S. 104 beruht wohl auf einer Verwechselung mit Pelletier.

Der Jesuit Peletarius gab 1557 die Elemente heraus und vielleicht veranlafst durch Cardanus de subtilitate 1550 setzt er zu III, 16 hinzu: 1) Die Annahme einer kleinsten, bezw. einer gröfsten kontinuierlichen Gröfse ist ein falscher Grenzbegriff (extra intelligentiam est). 2) Teil 3 des Satzes 16 verstöfst gegen X, 1, insofern man nach X, 1 durch fortgesetztes Halbieren eines beliebigen spitzen Winkels zu einem spitzen Winkel gelangen mufs, der kleiner als der Konvergenzwinkel. 3) Der Konvergenzwinkel hat die Gröfse Null, denn die Tangente verschmilzt (immergit, versenkt sich) mit dem Kreis. 4) Der Winkel, den zwei sich von aufsen oder von innen berührende Kreise

bilden, hat die Gröfse Null. Dagegen wendet sich zuerst Candalla Flussatus (Euclid von 1566), der wieder Cardanus anregt, sich in dem opus novum de proport. 1570 mit den Beziehungen zwischen geradlinigen und gemischtlinigen Winkeln zu befassen. Cardanus bemerkt schon das Auftreten der Krümmung, wenn auch der Begriff hier noch völlig unklar ist.

Ganz besonders energisch aber nimmt Clavius in seiner ersten grofsen Euclid-Ausgabe von 1574 Stellung gegen Peletarius, und als dieser 1577 mit einer „Apologia" erwidert, entgegnet Clavius in der folgenden Röm. Ausgabe noch nachdrücklicher (1607 S. 241—66 sehr eng gedruckt). Er hebt hervor: 1) Euclid selbst sei unmöglich der Ansicht des Proclus gewesen, dafs der Konvergenzwinkel Null sei, „weil er sonst nicht so über dem Beweis geschwitzt hätte". 2) Dafs von einer Verletzung des Prinzips X, 1 nicht die Rede sein könne, da es sich nur auf Gröfsen beziehe, die ein Verhältnis nach Def. V, 4 haben; der gemischtlinige Winkel, insbesondere aber der Konvergenzwinkel, bezw. der des Halbkreises mit seinem Diameter sei der ganzen Art nach vom geradlinigen verschieden (wie schon Candalla) und mit dem ganz ähnlichen Bild des Candalla: Die gröfste Ameise sei immer noch unvergleichlich kleiner als der Mensch. 4) Zeigt er, dafs der Konvergenzwinkel zwar nicht durch Gerade, wohl aber durch Kreisbogen, s. Fig. 16a, beliebig vermindert oder vermehrt werden könne.


Fig. 16a.

Die letzte Betrachtung ist ganz besonders wichtig, sie ist fast wie der Streit G. Cantor's und Paul Dubois Raymond's über das Actual-Unendlichkleine. Wir haben hier eine der Quellen der Differentialrechnung vor uns. Diese (unendlich kleinen) Winkel sind unter sich vergleichbar und jedes Verhältnisses fähig; nur nicht mit den (endlichen) geradlinigen Winkelgröfsen.

An dem Streit beteiligten sich die gröfsten Namen der folgenden Zeit; ich nenne nur Vieta, Galilei, Wallis, Barrow, und den, der eigentlich die Lösung gab, „summum" Newton. Vieta im XIII. Kap. seiner Varior. de reb. math. responsorum 1593 sprach zum ersten Male klar und scharf es aus, dafs Kurven, welche sich berühren, an der Berührungsstelle ein Linienelement gemeinsam haben, und daher nach Def. 8, I als „in eandem lineam rectam coincidentes" keinen Winkel bilden; zugleich wird klar, dafs von einem Winkel, insofern er Mafs für Richtungs-

[illegible] zwischen Geraden die Rede sein kann. Ähnlich [illegible] ausführlich Wallis 1656 im Buch de angulo con[illegible] die Kurve in jedem Punkt die Richtung ihrer [illegible] Leotaud in der Cyclomathia seinen Bundes[illegible] nahm, sah sich dieser 1685 zu einer [illegible] sich Andeutungen über den heute [illegible] Winkel zwischen zwei benachbarten Tan[illegible] den Kern in des Clavius Gedanken, er [illegible] das Variable an der Berührungsstelle die [illegible] Mafs er umgekehrt proportional dem Radius [illegible] der Kurve an der betreffenden Stelle [illegible] und er sah, dafs von der Krümmung [illegible] Schnelligkeit des Auseinandergehens von [illegible] Gröfse des Clavius'schen Kontingenz[illegible] des Streits, der erst gegen Ende des [illegible] Klärung des Begriffs Kontakt (Oscu[illegible] se lambere", sie lecken sich, Berüh[illegible] die Kurve in jedem einfachen Punkt die [illegible] 3) Dafs ein krummliniger Winkel durch [illegible] zu ersetzen sei. 4) Kontingenzwinkel [illegible] in jedem Punkt. 5) Die Einfüh[illegible]: wodurch dieser früher vage Begriff [illegible] wurde.

[illegible] von der Gesellschaft Jesu) aus[illegible] und Clavius alle beide recht (und unrecht) [illegible] sich vollständig bei Pfleiderer, Scholien, [illegible] Camerer (E. Elem. libri sex T. I 1824 [illegible] Lexicon, Art. Berührungswinkel und [illegible]

17.

[illegible] gegebenen Punkt aus an einen [illegible] Kreis eine Tangente zu ziehen.

[illegible] der gegebene Punkt, $B\Gamma\Delta$ der ge[illegible] Man nehme das Zentrum E (Satz 1) [illegible] beschreibe um E mit dem Abstand EA [illegible] und von Δ aus werde ΔZ senkrecht [illegible] und AB, so behaupte ich, dafs vom [illegible] AB gezogen ist.

Beweis 1, 4. Die zweite Tangente wird nicht erwähnt, ebensowenig der Spezialfall, in dem A auf dem Kreis liegt. Die Konstruktion des Euclid ist unmittelbar einleuchtend, sie bleibt auch für den Grenzkreis der Nicht-Euclidischen Geometrie bestehen. Sie kostete aber, bis der Peripheriewinkel im Halbkreis verwertet wurde zur Konstruktion eines Lotes mit einem Kreise, 4 Kreise. Daher galt die Konstruktion des Clavius (Scholium zu S. 31), welche direkt den Peripheriewinkel im Halbkreis benutzt, und nur 3 Kreise, ja unter Umständen nur 2 Kreise, kostet, für einen Fortschritt, er hat die des Euclid völlig, bis zur gänzlichen Vergessenheit (im deutschen mathematischen Unterricht) verdrängt.

Die einfachste Konstruktion, welche den Gegenpunkt zum Zentrum in Bezug auf die Tangente konstruiert und nur 2 Kreise kostet, gab Verfasser vor einigen Jahren (Crelle).

Die Aufgabe, eine Tangente von gegebener Richtung zu ziehen, findet sich im Euclid des Peletarius, und die so wichtige Aufgabe, an zwei Kreise die gemeinsame Tangente zu ziehen, ist vollständig von Cardanus gelöst.

18.

Wenn eine Gerade den Kreis berührt und vom Zentrum bis an den Berührungspunkt eine Verbindungsgerade gezogen wird, so steht diese Verbindunglinie auf der berührenden senkrecht.

(Fig. 18.) Beweis indirekt.

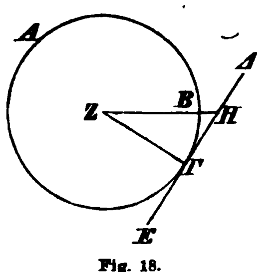


Fig. 18.

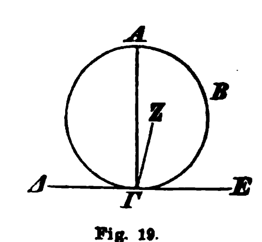


Fig. 19.

19.

Wenn eine Gerade den Kreis berührt und von dem Berührungspunkt zur Berührenden die Senkrechte gezogen wird, so wird auf ihr das Zentrum des Kreises liegen.

(Fig. 19.) Beweis indirekt.

Von diesem Satz aus ist der term. techn. „Tangente“ als Übersetzung von ἡ ἐφαπτομένη ausgegangen, er findet sich bei Zamberti, aber nicht bei Campanus.

20.

Im Kreis ist der Winkel am Zentrum das Doppelte des Winkels an der Peripherie, wenn die Winkel denselben Bogen* zur Basis haben.

(Fig. 20.) **Beweis durch I, 5 und I, 32, es werden die beiden Fälle unterschieden, in denen das Zentrum innerhalb oder aufserhalb des Peripheriewinkels liegt, der dritte als selbstverständlich übergangen.**

Für „Bogen“ steht natürlich im Text „περιφέρεια“.

21.

Im Kreis sind die Winkel im selben Segment einander gleich.

(Fig. 21.) **Satz 21 ist unmittelbare Folge (Porisma) von 20.**

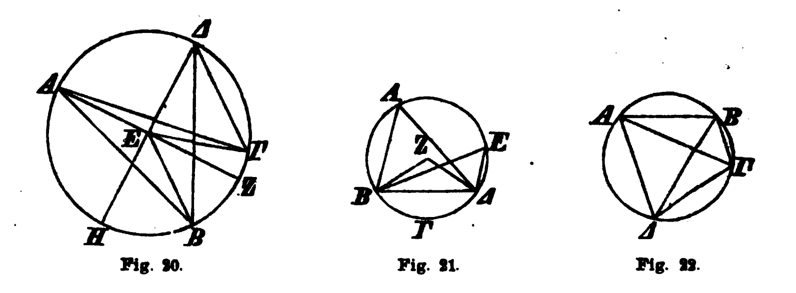


Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22.

22.

Die gegenüberliegenden Winkel der Vierecke im Kreis sind [zusammen] zwei Rechten gleich.

(Fig. 22.) Die drei Winkel des Dreiecks $AB\Gamma$ sind zusammen gleich 2 Rechten und $BA\Gamma$ gleich $B\Delta\Gamma$ nach 21 und desgleichen $B\Gamma A = B\Delta A$. Es wird damit der allgemeinere Satz bewiesen, dafs $\beta + \delta = \alpha + \gamma$ ist.

23.

Auf derselben Strecke können nicht zwei ähnliche (und ungleiche) Segmente an derselben Seite konstruiert werden.

Fig. 23.

(Fig. 23.) Beweis indirekt. Nach Definition 11 müfste $A\Gamma B$ gleich $A\Delta B$ sein, den es als Aufsenwinkel übertrifft. (Die geklammerten Worte würden besser weggelassen worden sein.)

24.

Ähnliche Segmente auf gleichen Strecken sind einander gleich.

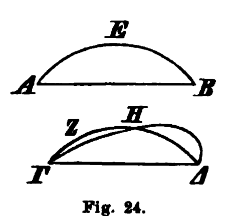


Fig. 24.

(Fig. 24.) Legt man AEB auf $\Gamma Z\Delta$, so bleibt nach 23, aufser der Kongruenz, nur die Lage, welche die Figur darstellt, und diese ist ausgeschlossen durch Satz 10. Es wird beim Beweis dieses Satzes wie bei dem der Kongruenzsätze I, 4 und I, 8 nicht sowohl die Bewegung benutzt als das Axiom von der Gleichförmigkeit des Raumes.

25.

Wenn ein Segment gegeben ist, den Kreis daran zu beschreiben, von dem es ein Segment ist.

(Fig. 25a.) $AB\Gamma$ das Segment, $A\Gamma$ halbiert in Δ, und in Δ das Lot auf $A\Gamma$ errichtet, welches den Kreis in B schneidet, B mit A verbunden, so ist ΔBA entweder größer, oder gleich oder kleiner als $BA\Delta$.

Fall 1). Man lege in A an BA den Winkel $BAE = AB\Delta$ und verlängere $B\Delta$ bis E und ziehe $E\Gamma$, so ist der um E mit EA

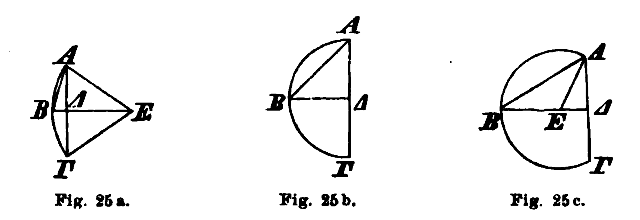


Fig. 25a. Fig. 25b. Fig. 25c.

bezw. EB bezw. $E\Gamma$ beschriebene Kreis (Forderung 3) der verlangte; zugleich erhellt, dafs $AB\Gamma$ kleiner als ein Halbkreis, weil das Zentrum E aufserhalb desselben.

Fall 2). $A\Delta = \Delta B = \Delta\Gamma$, also Δ das Zentrum, das Segment „offenbar" ein Halbkreis. (Fig. 25b.)

Fall 3). (Fig. 25c.) Dieselbe Konstruktion, das Zentrum E fällt auf $B\Delta$ innerhalb des Segments $AB\Gamma$ und dies ist also offenbar größer als ein Halbkreis.

Die drei gesperrten Worte zeigen wieder den Anteil der Anschauung an diesen Beweisen.

26.

In gleichen Kreisen stehen gleiche Winkel auf gleichen Bogen, sei es, dafs sie am Zentrum, sei es, dafs sie an der Peripherie liegen.

(Fig. 26.) Satz 24.

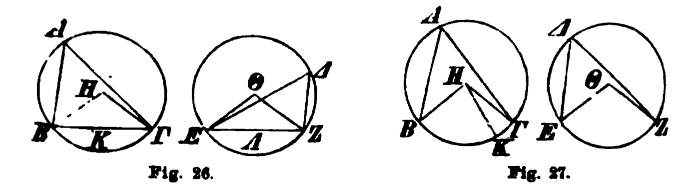


Fig. 26. Fig. 27.

27.

In gleichen Kreisen sind Winkel, welche auf gleichen Bogen stehen, ob am Zentrum oder an der Peripherie, gleich.

(Fig. 27.) Beweis indirekt durch Satz 26.

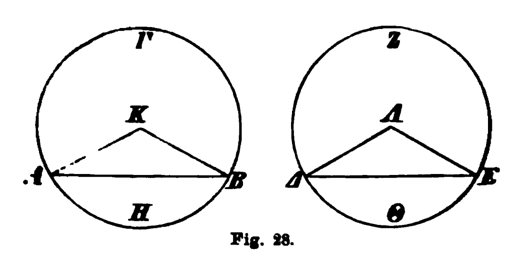


Fig. 28.

28.

In gleichen Kreisen schneiden gleiche Sehnen [illegible] Bogen ab, [so dafs] der gröfsere dem gröfseren, [illegible] dem kleineren [gleicher ist].

(Fig. 28.) I, 8.

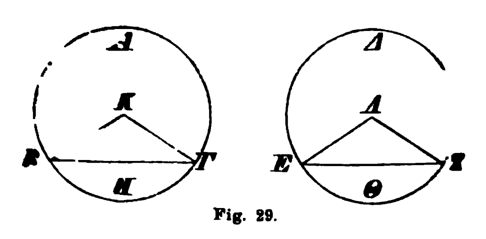


Fig. 29.

29.

In gleichen Kreisen unterspannen gleiche [illegible] Bogen.

(Fig. 29.) I, 4

30.

Einen gegebenen Bogen zu halbieren.

(Fig. 30.) $A\Delta = \Delta B$ nach I, 4 und die Bogen $A\Delta$ und ΔB kleiner als der Halbkreis, weil nach Satz 1, Zusatz, das Zentrum auf $\Delta\Gamma$, somit aufserhalb der Segmente liegt.

Fig. 30.

31.

Im Kreise ist der Winkel im Halbkreis ein Rechter, der im gröfseren Abschnitt kleiner als der rechte, der im kleineren Abschnitt gröfser als der rechte. Und dazu ist der Winkel des gröfseren Abschnitts gröfser als der rechte, der Winkel des kleineren Abschnitts kleiner als der rechte.

(Fig. 31.) $AB\Gamma\Delta$ der Kreis, $BA\Gamma = ZA\Gamma$, weil beide gleich $A\Gamma B + AB\Gamma$; also $BA\Gamma$ ein Rechter und $A\Gamma B <$ als der Rechte, und nach Satz 22 $A\Delta\Gamma >$ als ein Rechter.

Der Winkel zwischen $A\Gamma$ und dem Bogen $AB\Gamma >$ als der Rechte $BA\Gamma$ und der zwischen $A\Gamma$ und dem Bogen $A\Delta\Gamma$ kleiner als der Rechte $ZA\Gamma$.

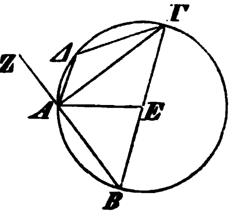


Fig. 31.

Über den letzten Teil des Satzes vgl. die Note zu Satz 16. Bei Clavius findet sich die Anwendung nicht nur zur Konstruktion der Tangente, sondern auch als Zusatz zu I, 11 die bekannte Aufgabe: im Endpunkt einer Strecke, welche nicht über ihn hinaus verlängert werden darf, mit Einem Kreise das Lot zu errichten.

32.

Wenn eine Gerade den Kreis berührt, und von der Berührungsstelle in den Kreis hinein irgend eine den Kreis schneidende Gerade gezogen wird, so werden die Winkel, welche diese mit der Tangente bildet, den Winkeln in den entgegengesetzten Kreisabschnitten gleich sein.

Fig. 32.

(Fig. 32.) $BA\Delta = \Delta BZ$, weil beide $AB\Delta$ zu einem Rechten ergänzen, $\Delta\Gamma B = EB\Delta$ (Satz 22).

33.

Auf einer gegebenen Geraden einen Kreisabschnitt zu zeichnen, der einen Winkel faſst, welcher einem gegebenen (geradlinigen) Winkel gleich ist.

(Fig. 33a.) Der gegebene ∢ *Γ* sei spitz, *BA* die Gerade, *ΔAB* wird gleich *Γ* gemacht (I, 23), *AE* senkrecht zu *AΔ* und zu *AB* die

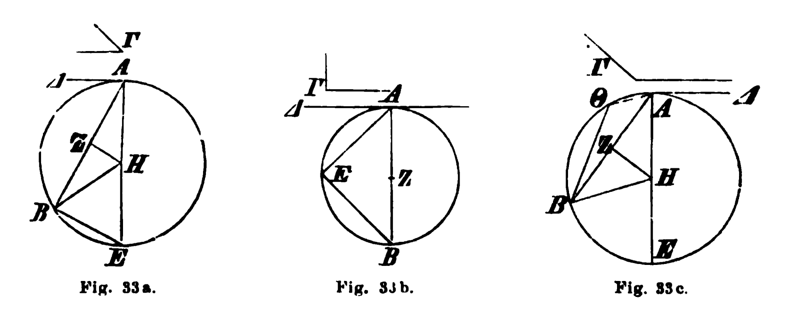


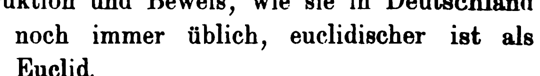
Fig. 33a. Fig. 33b. Fig. 33c.

Mittelsenkrechte *ZH* gezogen und *HB*; der Kreis um *H* mit *HA* geschlagen, so ist *AEB* das gesuchte Segment.

(Fig. 33b.) *Γ* ein Rechter, der Halbkreis über *AB*.

(Fig. 33c.) *Γ* stumpf; die Konstruktion bleibt wie im Fall a, *BΘA* ist das gesuchte Segment.

Die Aufgabe bildet ein klassisches Beispiel, daſs die pedantische Scheidung zwischen Konstruktion und Beweis, wie sie in Deutschland



noch immer üblich, euclidischer ist als Euclid.

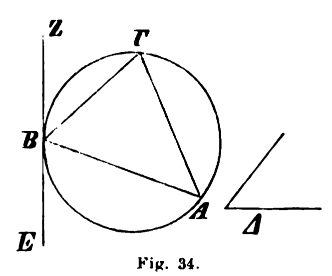


Fig. 34.

34.

Von einem gegebenen Kreis ein Segment wegzunehmen, das einen gegebenen Winkel faſst.

(Fig. 34.) ∢ *Δ* gegeben, gleich *ZBΓ* gemacht, so ist *BAΓ* das wegzunehmende Segment.

Die Konstruktion der Tangente ist überflüssig.

35.

Wenn sich zwei Geraden innerhalb des Kreises schneiden, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen gleich dem Rechteck aus den Abschnitten der andern.

Wenn (Fig. 35a) beide Geraden sich im Zentrum schneiden, ist der Satz selbstverständlich, wenn (Fig. 35b) $A\Gamma$ und $B\Delta$ nicht durch das Zentrum Z gehen und ZH, $Z\Theta$ die Senkrechten auf $A\Gamma$ und $B\Delta$

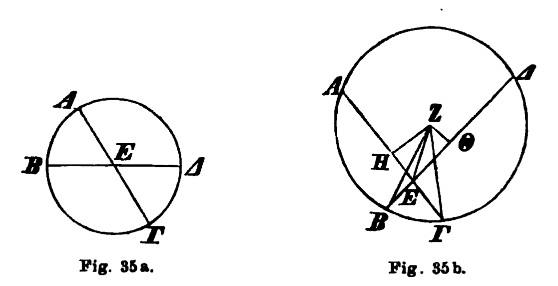


Fig. 35a. Fig. 35b.

sind, und EZ und BZ und ΓZ gezogen werden, so ist, da $A\Gamma$ in H halbiert wird (Satz 3), nach II, 5

$$AE \cdot E\Gamma + HE^2 = H\Gamma^2,$$

also wenn auf beiden Seiten HZ^2 addiert wird

$$AE \cdot E\Gamma + HE^2 + HZ^2 = H\Gamma^2 + HZ^2,$$

also nach I, 47

$$AE \cdot E\Gamma + ZE^2 = Z\Gamma^2,$$

ebenso

$$\Delta E \cdot EB + ZE^2 = ZB^2$$

somit

$$AE \cdot E\Gamma = \Delta E \cdot EB.$$

36.

Wird aufserhalb des Kreises ein Punkt genommen und gehen von ihm an den Kreis zwei Gerade, deren eine den Kreis schneidet, während die andere berührt, so wird das Rechteck aus der ganzen schneidenden und ihrem äufseren Abschnitt dem Quadrate der berührenden* gleich sein.

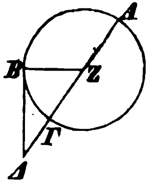


Fig. 36a.

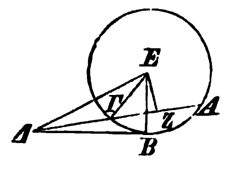


Fig. 36b.

(Fig. 36a.) Die Sekante geht durch das Zentrum, da $A\Gamma$ in Z halbiert ist und $\Gamma\Delta$ hinzugefügt ist, so ist nach II, 6

$$A\Delta \cdot \Delta\Gamma + Z\Gamma^2 = Z\Delta^2; \quad Z\Gamma = ZB; \quad Z\Delta^2 = ZB^2 + B\Delta^2,$$

also $A\Delta \cdot \Delta\Gamma + ZB^2 = ZB^2 + B\Delta^2$, also $A\Delta \cdot \Delta\Gamma = \Delta B^2$.

NB. Hier findet sich nicht bei Campanus, sondern bei Zamberti wieder der Ausdruck tangens.

Die beiden Sätze 35 und 36 sind Spezialfälle des grofsen Hauptsatzes der Kreislehre, den wir heute nach Steiner den Potenzsatz nennen. Dafs die Umkehr fehlt, darf nicht befremden, ebensowenig wie, dafs die Erweiterung von 35 auf den Fall, wo sich die Sehnen aufserhalb schneiden, fehlt, sie werden eben dem jetzt schon geübteren Schüler überlassen.

37.

Gehen von einem Punkt aufserhalb des Kreises an den Kreis zwei Geraden, deren eine ihn schneidet, während die andere [nur] herangeht, und das [Rechteck] aus der ganzen schneidenden und ihrem äufseren Abschnitt ist gleich dem [Quadrat] der herangehenden, so wird diese den Kreis berühren.

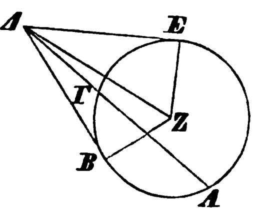


Fig. 37.

(Fig. 37.) $\Delta\Gamma A$ die schneidende, ΔB die herangehende, ΔE Tangente nach Konstruktion, $\Delta BZ \cong \Delta EZ$ durch 1, 8.

Der ausdrückliche Beweis der Umkehr von 36 ist mit Rücksicht auf die Wichtigkeit für die Konstrukrion des regulären Fünf- bezw. Zehnecks gegeben. Wie denn das ganze folgende Buch dem Problem der Kreisteilung gewidmet ist.

IV. [Buch.]

Definitionen.

1) Eine geradlinige Figur heifst in eine geradlinige Figur eingeschrieben, wenn die einzelnen[1]) Ecken der eingeschriebenen Figur auf den einzelnen Seiten der in die sie eingeschrieben ist, liegen.[2])

2) Gleicherweise heifst eine Figur um eine Figur geschrieben, wenn die einzelnen Seiten der, umgeschriebenen durch die einzelnen Ecken der, um welche sie geschrieben ist, gehen.[3])

3) Eine geradlinige Figur ist in den Kreis geschrieben, wenn die einzelnen Ecken der eingeschriebenen in die Peripherie des Kreises fallen.[4])

4) Eine geradlinige Figur ist um den Kreis geschrieben, wenn die einzelnen Seiten der umgeschriebenen die Peripherie des Kreises berühren.[5])

5) Gleicherweise aber sagt man, der Kreis sei in eine Figur eingeschrieben, wenn die Peripherie der Kreise jede der Seiten der [Figur], in der er eingeschrieben ist, berührt.

6) Der Kreis heifst aber um eine Figur geschrieben, wenn die Peripherie des Kreises jede Ecke der [Figur], um die er geschrieben ist, fafst.

7) Eine Strecke[6]) heifst in den Kreis eingetragen[7]), wenn die Endpunkte der Strecke in die Peripherie des Kreises fallen.

Anmerkungen.

1) griech. ἑκάστη „eine Jede". 2) ἅπτηται „fafst". 3) wie 2). 4) wie 2). 5) ausdrücklich griech. ἐφάπτηται. 6) griech. nur εὐθεῖα. 7) ἐναρμόζεσθαι „eingefügt werden".

1. [Aufgabe.]

In einen *gegebenen Kreis eine *Strecke einzutragen, [illegible] gleich einer nicht gröſser als der Durchmesser des [illegible] gegebenen Strecke ist.

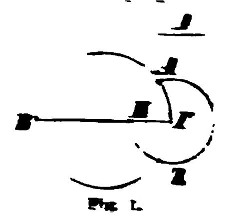


Fig. 1.

(Fig. 1.) Sei $AB\Gamma$ der gegebene Kreis, Δ die Strecke. Man ziehe den Durchmesser $B\Gamma$, wenn $B\Gamma = \Delta$, ist die Aufgabe gelöst; wenn $B\Gamma > \Delta$, mache man $\Gamma E = \Delta$ und beschreibe um Γ als Zentrum mit ΓE als Radius den Kreis $E A Z$ und ziehe ΓA, so ist $\Gamma A = \Delta$.



2.

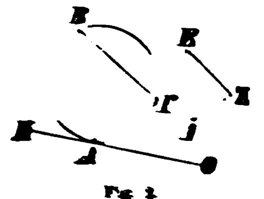


Fig. 2.

In einem* gegebenen Kreis das einem* gegebenen Dreieck gleichwinklige Dreieck einzuschreiben.

(Fig. 2.) $AB\Gamma$ der Kreis, ΔEZ das Dreieck. Man ziehe irgend eine Tangente $HA\Theta$ und lege in A an $A\Theta$ einen dem Winkel ΔEZ gleichen, $\Theta A\Gamma$, und in A an AH einen dem Winkel ΔZE gleichen: HAB, und ziehe $B\Gamma$, so ist $AB\Gamma$ das verlangte Dreieck (III, 32).

3.

Um einen* gegebenen Kreis das* einem* gegebenen Dreieck gleichwinklige Dreieck zu beschreiben.

(Fig. 3.) Die Konstruktion ist aus der Figur ersichtlich, KB ist beliebig. ∢ $BK\Gamma = \Delta Z\Theta$; $BKA = \Delta EH$.

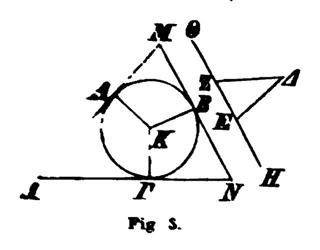


Fig. 3.

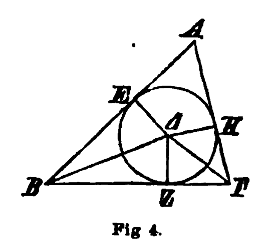


Fig. 4.

4.

In ein* gegebenes Dreieck den *Kreis einzuschreiben.

(Fig. 4.) Man halbiert ∢ β und ∢ γ (I, 9), die Halbierungslinien

* Die Sterne beim Artikel machen auf den oft hervorgehobenen Unterschied aufmerksam, wo wir den unbestimmten Artikel brauchen, setzt Euclid den bestimmten (demonstrativ) und wo wir den bestimmten, fehlt bei Euclid meist der Artikel.

schneiden sich (I, 5. Forderung) in Δ, und fällt von Δ auf die Seiten die Lote ΔE, ΔZ, ΔH, so sind diese gleich (I, 26) und der Kreis EZH ist der verlangte, da nach III, 16 die Seiten ihn berühren.

Aus der Konstruktion folgt, dafs Euclid als bekannt voraussetzt: 1) dafs sich von jedem Punkt aufserhalb zwei Tangenten an den Kreis ziehen lassen; 2) dafs diese gleich lang sind und 3), dafs sie symmetrisch zur Verbindung zwischen Punkt und Zentrum liegen; anders ausgedrückt, er setzt den Satz voraus: Die Halbierungslinie ist der Ort der Punkte, die von den Schenkeln gleichen Abstand haben. Er weifs auch, dafs die drei Winkelhalbierenden sich in einem Punkt schneiden (das Fehlen des Artikels).

5.

Um ein *gegebenes Dreieck den *Kreis zu beschreiben.

(Fig. 5, a, b, c.) Und es erhellt, dafs, wenn das Zentrum des Kreises innerhalb des Dreiecks fällt, der Winkel $B A \Gamma$, als in ein

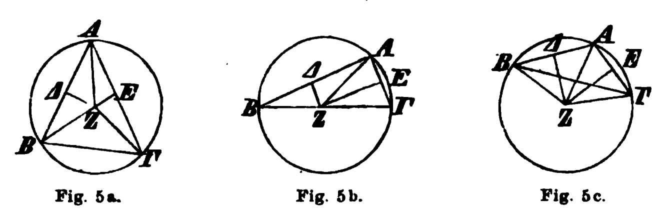


Fig. 5a. Fig. 5b. Fig. 5c.

Segment gröfser als der Halbkreis fallend, kleiner als ein rechter ist, wenn auf $B\Gamma$, gleich einem Rechten, wenn aufserhalb des Dreiecks, gröfser als ein Rechter (III, 31).

Aus dem Fehlen des Artikels vor *κύκλον* geht hervor, dafs Euclid weifs, dafs die drei Mittelsenkrechten sich in einem Punkt treffen. Die Umkehr des Zusatzes von „und es erhellt“ hat Heiberg mit Recht fortgelassen, ganz abgesehen von philologischen Gründen ist es eine konstante Gewohnheit bei Euclid, Umkehrungen, die nur die Anwendung des Drobisch-Möbius'schen Prinzips erfordern, zu übergehen.

6.

In einen gegebenen Kreis das *Quadrat einzuschreiben.

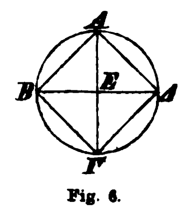


Fig. 6.

(Fig. 6.) Seiten gleich nach I, 4; die Winkel rechte nach III, 31. *Das Fehlen des Artikels vor *τετράγωνον* vertritt den Satz: Die Quadrate in denselben Kreis sind kongruent, also Eindeutigkeit wie 4 und 5, 7, 8, 9.

7.

Um einen gegebenen Kreis das *Quadrat zu beschreiben.

(Fig. 7.) Durch die Enden der beiden aufeinander senkrechten Durchmesser werden die Tangenten gezogen.

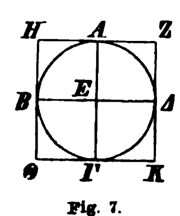


Fig. 7.

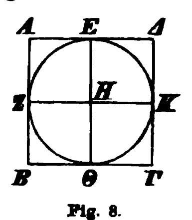


Fig. 8.

8.

In ein gegebenes Quadrat den *Kreis zu beschreiben.

(Fig. 8.) Durch die Mitten E und Z von $A\Delta$ und AB werden die Parallelen zu AB ($\Delta\Gamma$) und $A\Delta$ ($B\Gamma$) gezogen; I, 34, III, 16.

9.

Um ein gegebenes Quadrat den *Kreis zu beschreiben (Fig. 9).

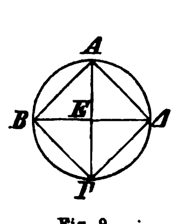


Fig. 9.

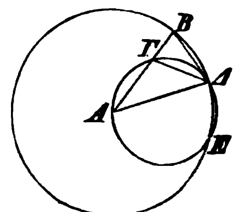


Fig. 10.

10.

Ein gleichschenkliges Dreieck zu konstruieren, in welchem jeder Basiswinkel doppelt so grofs als der übrige ist.

(Fig. 10.) Es liege irgend eine Strecke AB vor und sie werde in Γ so zerschnitten, dafs das Rechteck aus AB und $B\Gamma$ gleich ist dem Quadrat von $A\Gamma$ (II, 11, goldene Schnitt) und um A als Zentrum und AB Radius werde der Kreis $B\Delta E$ beschrieben und in den Kreis $B\Delta E$ werde die Strecke $B\Delta$ eingetragen, die gleich $A\Gamma$, welche nicht gröfser ist als der Durchmesser des Kreises (Satz 1) und $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ gezogen, und um Dreieck $A\Gamma\Delta$ der Kreis $A\Gamma\Delta$ beschrieben (Satz 9).

Weil nun $AB \cdot B\Gamma = A\Gamma^2$ und $A\Gamma = B\Delta$, ist $AB \cdot B\Gamma = B\Delta^2$. Da nun ein Punkt aufserhalb des Kreises $A\Gamma\Delta$ genommen ist, nämlich B und von ihm an den Kreis zwei Geraden BA, $B\Delta$ gezogen

sind und die eine ihn schneidet und die andere an ihn herangeht und $AB \cdot B\Gamma = B\Delta^2$, so berührt $B\Delta$ den Kreis $A\Gamma\Delta$ (III, 37). Weil nun $B\Delta$ berührt und vom Berührungspunkt*) Δ gezogen ist $\Delta\Gamma$, ist $\sphericalangle B\Delta\Gamma = \Delta A\Gamma$ im entgegengesetzten Kreisabschnitt (III, 32). Da nun $B\Delta\Gamma = \Delta A\Gamma$, füge man zu beiden $\sphericalangle \Gamma\Delta A$ hinzu; wohlan, so ist der ganze Winkel $B\Delta A = \Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma$. Aber $\Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma$ ist gleich dem Aufsenwinkel $B\Gamma\Delta$, also auch

$$B\Delta A = B\Gamma\Delta;$$

aber $B\Delta A = \Gamma B\Delta$, weil $A\Delta = AB$, also auch $\sphericalangle \Delta BA = B\Gamma\Delta$. Folglich sind die drei Winkel, $B\Delta A$, ΔBA, $B\Gamma\Delta$ unter sich gleich.

Weil $\sphericalangle \Delta B\Gamma$ gleich $B\Gamma\Delta$, ist Seite $B\Delta = \Delta\Gamma$; aber $B\Delta$ ist ΓA gleich gemacht worden, also auch $\Gamma A = \Gamma\Delta$; folglich auch Winkel $\Gamma\Delta A = \sphericalangle \Delta A\Gamma$; also

$$\Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma = 2\, \Delta A\Gamma.$$

Aber $B\Gamma\Delta$ (war) gleich $\Gamma\Delta A + \Delta A\Gamma$, somit

$$B\Gamma\Delta = 2\, \Delta A\Gamma.$$

Aber $B\Gamma\Delta = B\Delta A = \Delta BA$; also jeder der Winkel $B\Delta A$, ΔBA doppelt so grofs als der Winkel ΔAB.

Also ist das gleichschenklige Dreieck $AB\Delta$ konstruiert, in dem jeder Winkel an der Basis $B\Delta$ doppelt so grofs als der übrige; .... was gethan werden sollte.

11.

In einem gegebenen Kreis das sowohl gleichseitige als gleichwinklige Fünfeck einzuschreiben.

(Fig. 11.) Der Kreis sei $AB\Gamma\Delta E$. Man konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck $ZH\Theta$ wie in 10; so dafs jeder der Winkel bei H und Θ doppelt so grofs als der bei Z ist, und schreibe in dem Kreis das $ZH\Theta$ gleichwinklige Dreieck $\Gamma A\Delta$ ein (Satz 2), so dafs $\sphericalangle \Gamma A\Delta$ gleich dem Winkel bei Z ist; halbiere $A\Delta\Gamma$ durch $B\Delta$ und $A\Gamma\Delta$ durch ΓE, so ist $AB\Gamma\Delta E$ das verlangte Fünfeck.

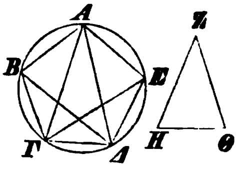


Fig. 11.

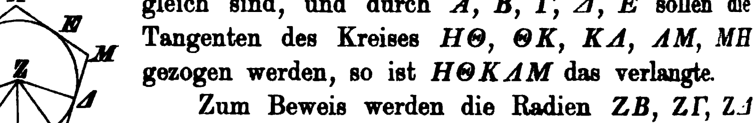
Denn zunächst ist es gleichseitig, da die fünf Winkel über den Sehnen nach Konstr. gleich sind, und damit auch die Bogen und die Sehnen, und gleichwinklig, weil die Winkel BAE, $AE\Delta$ etc. auf gleichen Bogen stehen.

*) Eigentlich „Berührung bei Δ“.

12.

Um einen gegebenen Kreis das gleichseitig gleichwinklige Fünfeck umzuschreiben.

(Fig. 12.) Denken wir A, B, Γ, Δ, E seien die Ecken des eingeschriebenen Fünfecks, so dafs die Bogen AE, $E\Delta$ etc. gleich sind, und durch A, B, Γ, Δ, E sollen die Tangenten des Kreises $H\Theta$, ΘK, $K\Lambda$, ΛM, MH gezogen werden, so ist $H\Theta K\Lambda M$ das verlangte.



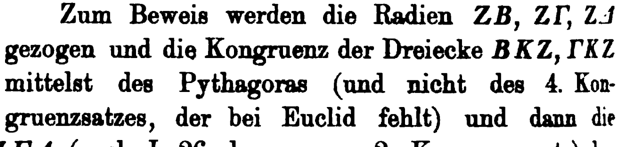


Fig. 12.

Zum Beweis werden die Radien ZB, $Z\Gamma$, $Z\Delta$ gezogen und die Kongruenz der Dreiecke BKZ, ΓKZ mittelst des Pythagoras (und nicht des 4. Kongruenzsatzes, der bei Euclid fehlt) und dann die von $Z\Gamma K$ und $Z\Gamma\Lambda$ (nach I, 26 dem sogen. 2. Kongruenzsatz) bewiesen.

13.

In ein gegebenes Fünfeck, das sowohl gleichseitig als gleichwinklig ist, den Kreis einzuschreiben.

(Fig. 13.) Man halbiert $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$, welche sich in Z schneiden, der Kreis um Z mit ZK ist der verlangte. Beweis: I, 4 giebt $BZ = Z\Delta$, und $\sphericalangle\, \Gamma BZ = Z\Delta\Gamma$, also BZ Halbierungslinie von ΓBA [und $ZB = Z\Gamma = Z\Delta = ZE = ZA$], ebenso wird gezeigt, dafs AZ, EZ die Winkel des Fünfecks bei A und E halbieren; dann folgt nach I, 26 die Gleichheit der Lote ZK, $Z\Lambda$ etc. Da die Seitenzahl beim Beweis nicht benutzt wird, so ist somit die Aufgabe, wie das Porisma zu 15 betont, allgemein gelöst für jedes reguläre n-eck.

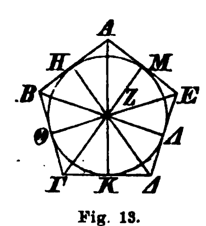


Fig. 13.

14.

Um ein gegebenes Fünfeck, das sowohl gleichseitig als gleichwinklig ist, den Kreis zu beschreiben.

(Fig. 14.) Man halbiere $B\Gamma\Delta$, $\Gamma\Delta E$ durch $Z\Gamma$ und $Z\Delta$ und ziehe ZB, ZA, ZE, so sind, wie in 13 bewiesen, diese 5 Strecken gleich, und der Kreis um Z mit diesem Radius der verlangte.

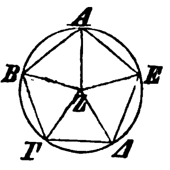


Fig. 14.

Satz 13 und 14 sind hübsche Beispiele, wie wenig euclidisch die moderne pedantische Scheidung zwischen Konstruktion und Beweis ist.

15.

In einen gegebenen Kreis das gleichseitig gleichwinklige Sechseck einzuschreiben.

(Fig. 15.) $AB\Gamma\Delta EZ$ sei der Kreis: „Ziehe seinen Durchmesser $A\Delta$; nimm das Zentrum H und beschreibe um das Zentrum Δ mit dem Radius ΔH den Kreis $EH\Gamma\Theta$, und führe die Verbindungslinien EH, ΓH durch bis zu den Punkten B, Z, verbinde A [mit] B, B [mit] Γ, Γ [mit] Δ, Δ [mit] E, EZ, ZA, so ist $AB\Gamma\Delta EZ$ das gleichseitig gleichwinklige Sechseck."

Fig. 15.

Zusatz.

Hieraus erhellt, dafs die Seite des Sechsecks gleich ist dem Radius* des Kreises.

Ebenso wie beim Fünfeck wird das gleichseitig gleichwinklige Sechseck um den Kreis beschrieben, wenn wir durch die Teilpunkte im Kreise die Tangenten des Kreises ziehen gemäfs dem beim Fünfeck gesagten. Und aufserdem wird durch dem beim Fünfeck gesagten Analogem in ein gegebenes Sechseck der Kreis einbeschrieben und umgeschrieben. Was gethan werden sollte.

16.

In einen gegebenen Kreis ein gleichseitig gleichwinkliges Fünfzehneck einzuschreiben.

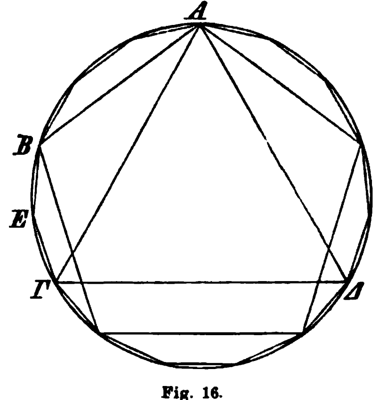


Fig. 16.

(Fig. 16.) Der gegebene Kreis sei $AB\Gamma\Delta$, es werde in den Kreis einbeschrieben die Seite $A\Gamma$ eines eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks und AB die Seite des regelmäfsigen Fünfecks. Daher, wenn $AB\Gamma\Delta$ in 15 gleiche Teile geteilt ist, so enthält Bogen $AB\Gamma$ als dritter Teil des Kreises 5 solcher Teile, daher ist der Rest $B\Gamma$ gleich zweien. $B\Gamma$ werde in E halbiert, so ist jeder von beiden Bogen BE, $E\Gamma$ der 15. Teil des Kreises. Wenn wir also fort-

gesetzt den Sehnen *BE*, *EΓ* gleiche Sehnen in den Kreis eintragen, wird in ihm das regelmäfsige Fünfzehneck eingeschrieben.

Ebenso wie beim Fünfeck wird das regelmäfsige Fünfzehneck um den Kreis beschrieben, wenn wir durch die Teilpunkte des Kreises die Tangenten an den Kreis ziehen. Und durch den beim Fünfeck gleichartige Darlegungen wird einem gegebenen Fünfzehneck der Kreis ein- und umgeschrieben. Was gemacht werden sollte.

Hier ist sogar die „Analyse" in die Konstruktion verwebt!

Eine Fortsetzung der Sätze des IV. Buches findet sich im Anfange des XII. Buches:

S. 1. Ähnliche in Kreisen beschriebene Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser.

S. 2. Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser. — S. 16 Aufg.: Wenn zwei konzentrische Kreise gegeben sind, in den gröfseren ein gleichseitiges Vieleck von gerader Seitenzahl so einzuschreiben, dafs es den kleineren Kreis nicht trifft.

S. 2 ist alles, was über „die Quadratur des Zirkels" bei Euclid vorkommt.

V. [Buch].

Erklärungen.

1) Eine kleinere Gröfse ist Teil[1]) einer gröfseren, falls sie die gröfsere abmifst.

2) Die gröfsere aber ein Vielfaches der kleineren, falls sie von der kleineren abgemessen wird.

3) Verhältnis zweier gleichartiger[2]) Gröfsen ist die Art und Weise, wie sie sich auf die Frage wie grofs verhalten.[3])

4) Man sagt, dafs Gröfsen zu einander ein bestimmtes Verhältnis haben, wenn bei der Vervielfältigung die eine die andere übertrifft.[4])

5) Man sagt: Gröfsen sind zu einander in gleichem Verhältnis, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn gleiche Vielfache der ersten und dritten gleiche Vielfache der zweiten und vierten — beiderseits in Bezug auf jedes beliebige Vielfache — entweder zugleich übertreffen, oder [zugleich ihnen] gleich sind, oder [jene zugleich] kleiner sind [als diese], [die Gröfsen] entsprechend genommen.[5])

6)[6]) Gröfsen, welche dasselbe Verhältnis haben, sollen „in Proportion“ genannt werden.

7) Wenn von den gleichen Vielfachen [sub 5] das Vielfache des ersten das des zweiten übertrifft, dagegen das des dritten das Vielfache des vierten nicht übertrifft, dann sagt man: die erste hat zur zweiten ein gröfseres Verhältnis als die dritte zur vierten.[8])

8) Die Proportion in drei Gliedern ist die [an Gliederzahl] kleinste.[9])

9) Wenn drei Gröfsen eine Proportion bilden, so sagt man, die erste hat zur dritten das quadratische Verhältnis wie zur zweiten.[10])

10) Wenn aber vier Gröfsen in Proportion sind, so hat die erste

zur vierten das kubische Verhältnis wie zur zweiten, und so immer entsprechend weiter, wie gerade die Proportion vorliegt.[11])

11) Entsprechende[12]) Gröfsen, sagt man, sind die vorangehenden [Gröfsen] für die vorangehenden, und die folgenden für die folgenden.

12) Wechsel-Verhältnis ist die Setzung[13]): Vordere zur vorderen, wie folgende zur folgenden.

13) Umgekehrt wird das Verhältnis, wenn die vordere [Gröfse] zur folgenden und die folgende zur vorderen gemacht wird.

14) Verbindung des Verhältnisses ist das Verhältnis der Summe der vorderen und der folgenden Gröfse zur folgenden allein.[14])

15) Trennung[15]) des Verhältnisses ist das Verhältnis des Unterschieds zwischen der vorderen und der folgenden zur folgenden allein.

16) Wendung des Verhältnisses ist das Verhältnis des vorderen zum Unterschied zwischen der vorderen und der folgenden Gröfse.

17) Ist eine erste Gröfsenreihe gegeben und eine zweite von gleicher Giiederzahl, so dafs je zwei herausgegriffen in gleichem Verhältnis stehen, so giebt es ein Verhältnis infolge Gleichheit, wenn das erste Glied der ersten Reihe zum letzten, wie das erste Glied der zweiten Reihe zum letzten [sich verhält], oder anders: [es ist dies] die Bindung[16]) der extremen [Glieder] [zu einer Proportion] mit Auslassung der mittleren [Glieder].[17])

18) Eine Proportion heifst verworren, wenn, falls drei Gröfsen gegeben sind und eine zweite Reihe von drei Gröfsen, es eintreten konnte, dafs in der ersten Reihe ein führendes zum folgenden sich verhält, wie in der zweiten Reihe ein führendes zum folgenden, und zugleich in der ersten Reihe ein folgendes zu irgend einem anderen, wie in der zweiten Reihe irgend ein anderes zum führenden.[18])

Anmerkungen.

Das fünfte Buch enthält die Lehre vom Verhältnis und der Gleichung der Verhältnisse (Proportionen) gleichartiger Gröfsen in vollster Allgemeinheit. Es ist mit gröfster Wahrscheinlichkeit ein Werk des Eudoxos (vgl. Einleitung) und scheint nur wenig von Euclid überarbeitet (da wo statt „λεγεται“ steht „καλεισθω“). Auf sein höheres Alter deutet auch das Ringen mit dem Ausdruck, die oft schwer verständliche Fassung der Sätze hin. Es fehlt die Definition des Begriffs „kontinuierliche Gröfse“, sie war aber durch Aristoteles (vgl. Simon Zur

Geschichte und Philos. d. Differ.) gegeben; vermutlich auch von Eudoxos; jedenfalls konnte sie Eudoxos voraussetzen. Der bedeutendste Interpretator des Euclid in Europa, Clavius, hebt wie Campanus S. 3 hervor, dafs dem fünften Buch ein Axiom zugrunde liegt, welches Clavius (Ausgabe von 1607 S. 436) formuliert: Quam proportionem habet magnitudo aliqua ad aliam, eandem habebit quaevis magnitudo proposita ad aliquam aliam, et eandem habebit quaepiam alia magnitudo ad quamvis magnitudinem propositam. Es ist das Axiom im Grunde nichts anderes als die Umkehrung des Weierstrafs'schen Axioms: Zu jedem Punkt in der Zahlenreihe giebt es eine Zahl. Es wird zwar immer behauptet, die Hellenen hätten in der Irrationalzahl keine Zahl gesehen, aber aus dem fünften Buche geht meines Erachtens unwiderleglich hervor, dafs sie den Zahlbegriff in voller, fast wirklich mit der Weierstrafs'schen Auffassung sich deckender Schärfe besafsen, und dafs Euclid wie Eudoxos im Verhältnis zweier gleichender Gröfsen nichts anderes sehen als eine Zahl. Und das erhellt schon aus dem Kunstausdruck „λόγος“ für „Verhältnis“, denn Logik ist die Rechnung, Logistik die Rechenkunst, und Logos heifst im Grunde nichts anderes als Mafszahl einer Gröfse in Bezug auf eine andere.

1) Teil hat zwei Bedeutungen, es bedeutet „genauer“ Teil (aliquoter) und auch Teil schlechtweg (aliquanter), eine Gröfse, die aus einer anderen herausgenommen werden kann. Euclid definiert nur den aliquoten Teil einer Gröfse A als Einheit, deren Vielheit A ist. Aus Definition 2) geht hervor, dafs es sich dabei um die wirkliche Anzahl handelt. Clavius verweist auf das siebente (arithmetische) Buch, wo Euclid den aliquanten Teil z. B. 4 von 7 nicht pars, sondern „partes“ nennt, weil 4 von den Siebenteln der 7 mehrere, nämlich 4 enthält.

3) Das Wort homogen, von gleicher Abstammung, ist völlig rezipiert. — Griech. „κατὰ πηλικότητα“ wörtlich „in Bezug auf die Wiegrofsigkeit“. Das Subst. ist abgeleitet vom Fragwort „πηλικός“, wie grofs, wie oft scil. ist die Einheit in dem betreffenden Objekt enthalten; vgl. für diese Auffassung Ptolemaios *Μεγάλη σύνταξις* B. I Kap. 9.

Man sieht, diese Erklärung weist deutlich auf die ursprüngliche Auffassung des Verhältnisses als Gleichheit in Bezug auf aliquote Teile hin, also auf die Kommensurabilität; sie konnte aber, nachdem an $\sqrt{2}$ bezw. an dem Verhältnis der Diagonale und Seite des Quadrats die Inkom. gefunden war, nicht mehr für die Beweise benutzt werden und

daher wird in der Definition 4) der Erweiterung des Begriffs Rechnung getragen.

4) Aus 4) geht hervor, daſs die Gröſsen, um die es sich handelt, der Gröſse nach in eine Reihe geordnet zu denken sind, so daſs von je zweien das gröſser, kleiner, gleich erkannt werden kann, d. h. aber nichts anderes, wie neuerdings sehr oft gesagt ist, daſs mit ihnen gerechnet werden könne, und dies ist das Postulat, das in 4) implicite enthalten ist.

5) Schon Zeuthen hat bemerkt, daſs diese Definition gleicher Verhältnisse wörtlich mit Weierstraſs' Definition gleicher Zahlen übereinstimme. Der Ausdruck des Satzes ist kürzer und klarer: $a:b = c:d$ wenn, falls $pa >=< qb$ ist, zugleich $pc >=< qd$ ist, wo p und q jeden beliebigen (Anzahl-) Wert haben. Heiberg hat in seiner lateinischen Übersetzung dies, was Euclid durch „καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλ." ausdrückt, übersehen, es dürfte dies wohl so ziemlich das einzige nennenswerte Versehen bilden.

Hervorgehoben muſs werden, daſs zwar a und b unter sich homogen, und c und d desgleichen unter sich sein müssen, aber a und c bezw. b und d heterogen sein können.

6) Aus dem Singular folgt schon hier, noch deutlicher aus dem sechsten Buch z. B. S. 5, daſs Euclid analogon als Adverb gebraucht, wie Lucian. Die Übersetzung „proportional" giebt hier und oft gar keinen Sinn. Man fragt vergebens: Wer ist wem proportional? Wir sagen z. B. das Gewicht ist dem Preis proportional, weil dem doppelten dreifachen etc. Preis das doppelte, dreifache etc. Gewicht entspricht. Es muſs heiſsen „in einer Verhältnisgleichung (Proportion) stehend", oder „zu einer Verhältnisgleichung gehörig", was allerdings im Lateinischen das Wort proportionalis auch ausdrücken kann. Die beste Übersetzung ist „dem Verhältnis nach gleich".

7) Es wäre logischer, daſs 6) und 7) ihre Stellen tauschten, denn 7) greift auf 5) zurück, es sind dieselben Vielfachen, die da auftreten: Ist $pa > qb$, aber pc nicht $> qd$, so ist $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; hier genügt ein Wertsystem des p und q und daher fehlt „καθ' etc." Es ist dieselbe Definition ungleicher Zahlen, wie bei Weierstraſs. Die Übereinstimmung ist nicht so wunderbar, Weierstraſs knüpft an Bolzano an, und dieser gehört der Epoche genauester Kenntnis des Euclid an, übrigens hatte auch Weierstraſs seinen Euclid inne.

8) 9) Gemeint ist hier

$$a:b = b:c,$$

es könnte auch dem Wortlaut nach $a : b = c : a$ gemeint sein, doch das würde auf dasselbe hinauskommen.

9) Wenn $a : b = b : c$, so ist $\frac{a}{c} = \frac{b^2}{c^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ und nicht, wie wunderlicher Weise Lorenz-Mollweide schreibt $\frac{a}{c} = 2\left(\frac{a}{b}\right)$; man sieht deutlich, wie hier einfach mit den Strecken- bezw. Gröfsenbrüchen gerechnet wird.

10) Es hätte gesagt werden müssen, dafs es sich um eine sogenannte kontinuierliche (κατὰ τὸ συνεχές) Proportion handelt

$$a : b = b : c = c : d,$$

wo dann

$$a^2c^2 = b^4;\ a^2bd = c^4;\ a : d = a^3 : b^3.$$

Beispiel einer kontinuierlichen Proportion von fünf Gröfsen 81, 54, 36, 24, 16 und $81 : 16 = (81 : 54)^4$ (Clavius) und allgemein a^4, a^3b, a^2b^2, ab^3, ab^4 etc. . . .

11) „Homolog", der term. techn., ist nicht das Adjektiv „ὁμόλογος" von Ὁμοῦ zugleich und λέγω sagen und bedeutet daher auch nicht übereinstimmend, entsprechend, sondern es kommt vom homerischen ὁμός ähnlich, gleich und „λόγος Verhältnis" und bedeutet also „ähnlich in Bezug auf das Verhältnis, wie analog" „dem Verhältnis gemäfs". In der Proportion $a : b = c : d$ sind a und c homolog wie b und d. Euclid unterscheidet nicht „innere" und „äufsere" wie wir, sondern „führende" und „folgende".

12) Griech. λῆψις von λαμβάνω; in der Proportion $a : b = c : d$ sind a und c Vorderglieder und b und d folgende, es ist die Vertauschung der „inneren" Glieder gemeint, also $a : c = b : d$ statt $a : b = c : d$. Bemerkenswert ist, dafs hier die ganze Proportion (Analogie) mit „Logos" bezeichnet ist.

14) Aus $a : b$ geht man über zu $a + b : b$.

15) Der Übersetzung „Subtractio" von Διαίρεσις durch H. kann ich mich nicht anschliefsen; Clavius sagt „divisio".

16) Übergang von $a : b$ auf $a : | a - b |$

17) Es handelt sich um zwei nach heutigem Sprachgebrauch proportionale Gröfsenreihen a_x und b_x, so dafs $a_x : b_x$ konstant.

Sind a_1 und b_1 die Anfangsglieder, u_1 und u_2 die Endglieder, so ist $a_1 : b_1 = u_1 : u_2$ die Proportion infolge Gleichheit; dieselbe setzt eine Ordnung der Reihen voraus (daher „τεταγμένη" geordnete).

18) Wenn a, b, c die Glieder der ersten, α, β, γ die der zweiten, so zeigt S. 23 dafs gemeint ist: $a : b = \beta : \gamma$ und $b : c = \alpha : \beta$.

Beispiel von Clavius 12, 8, 4; 12, 6, 4; allgemeiner: $a, b, c; z\frac{a}{c}; z\frac{a}{b}; z$. Ohne Proposition 23 wäre die Erklärung unverständlich.

[Satz] 1.

Ist eine [an Anzahl endliche] Gröfsenreihe a_x gegeben und eine zweite e_x und ist $a_x = ne_x$, wo n eine konstante Anzahl, so ist $\Sigma a_x = n\Sigma e_x$.

Fig. 1.

(Fig. 1.) AB sei a_1, $\Gamma\Delta = a_2$, $E = e_1$, $Z = e_2$, $n = 2$, $AH + \Gamma\Theta = E + Z$; $HB + \Theta\Delta = E + Z$, also $AB + \Gamma\Delta = n(E + Z)$.

Der Satz ist der heute so viel gebrauchte: Sind mehrere [Strecken-, Flächen-, etc.] Brüche einander gleich, so ist die Summe der Zähler dividiert durch die Summe der Nenner gleich jedem der Brüche. Der Beweis selbst beruht ganz und gar auf Anschauung, bezw. auf der Voraussetzung, dafs das kommutative und assoziative Gesetz für die betreffende Gröfsenreihe erwiesen ist. Für Strecken liegt das kommutative Gesetz in der Vertauschbarkeit von rechts und links. Für Flächen vgl. Simon, die Elemente der Geometrie etc. — Satz 1 findet seine Verallgemeinerung in Satz 12.

2.

Ist eine Gröfse α dasselbe Vielfache einer zweiten β, wie eine dritte γ von einer vierten δ, und ist eine fünfte ε wieder das nämliche Vielfache von β wie eine sechste ζ von δ, so ist die Summe der ersten und fünften dasselbe Vielfache der zweiten wie die Summe der dritten und sechsten von der vierten.

Fig. 2.

$\alpha = n\beta$, $\gamma = n\delta$, $\varepsilon = p\beta$, $\zeta = p\delta$, $\alpha + \varepsilon = (n + p)\beta$, $\gamma + \zeta = (n + p)\delta$.

(Fig. 2.) $AB = \alpha$, $\beta = \Gamma$, $\Delta E = \gamma$, $Z = \delta$, $BH = E$, $E\Theta = \zeta$ und $n = 3$, $p = 2$.

Beweis folgt für Strecken aus der Anschauung bezw. aus der Giltigkeit des kommutativen und assoziativen Gesetzes unmittelbar. Der Satz findet seine Verallgemeinerung in 24.

3.

Ist $A = nB$ und $\Gamma = n\Delta$ und $E = qA$ und $Z = q\Gamma$, wo sowohl n als q Anzahlen, so ist E dasselbe $[nq]$ Vielfache von B wie Z von Δ.

(Fig. 3.) $EZ = E$, $H\Theta = Z$, $n = 3$, $q = 2$.

Bemerkung wie zu 1 und 2. Vgl. Satz 22.

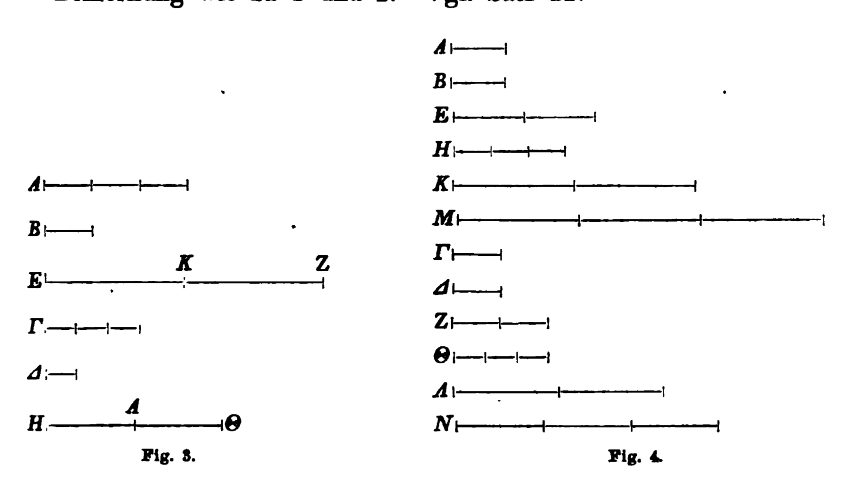


Fig. 3. Fig. 4.

4.

Wenn $A : B = \Gamma : \Delta$, so ist $nA : qB = n\Gamma : q\Delta$, wo n und q beliebige Anzahlen sind.

Es seien E und Z die nämlichen Vielfachen von A und Γ und H und Θ irgend welche Gleichvielfache von B und Δ, so wird behauptet $E : H = Z : \Theta$ (Fig. 4).

Man nehme Gleichvielfache von E und Z, sie seien K und Λ und ebenfalls von H und Θ werden beliebige Gleichvielfache M und N, dann ist nach S. 3 K dasselbe Vielfache von A wie Λ von Γ, und aus gleichem Grunde M dasselbe Vielfache von B wie N von Δ. Da nun nach Voraussetzung $A : B = \Gamma : \Delta$, so folgt aus Definition 5: Wenn $K >=< M$, so ist $\Lambda >=< N$; aber K und Λ sind gleiche Vielfache von E und Z und M wie N sind gleiche Vielfache von H, Θ also $E : H = Z : \Theta$ nach Definition 5. q. e. d.

5.

Wenn $\alpha = n\beta$ und $\gamma = n\delta$, so ist $\alpha - \gamma = n(\beta - \delta)$, wo n eine absolute Zahl.

(Fig. 5.) AB dasselbe Vielfache (3) von $\Gamma\Delta$, wie AE von ΓZ. „Man teile EB in so viel Teile, wie AE durch ΓZ geteilt wird, und dieser Teil sei $H\Gamma$“, dann ist nach S. 1 AB dasselbe Vielfache von ΓZ wie AB von HZ. Daher AB dasselbe Vielfache von HZ wie von $\Gamma\Delta$, folglich $HZ = \Gamma\Delta$, also $H\Gamma = Z\Delta$; also $(\alpha - \gamma) = n(\beta - \delta)$.

Fig. 5.

Der Beweis dieses Satzes, die Umkehrung von S. 1, giebt zu zwei Bedenken Veranlassung: 1) setzt er in der Stelle zwischen „ “ die Lösung der Teilungs-Aufgabe voraus, welche erst VI, 9 gegeben wird, 2) der Schlufs: wenn $n\alpha = n\beta$, so ist $\alpha = \beta$, ist nur gestattet, wenn für die Gröfsenart, zu der α und β gehören, das kommutative und distributive Gesetz bewiesen, so ist, vgl. Simon l. c., wenn angenommen wird, dafs die Ebene bei fortgesetzter Drehung des Strahls sich in sich selbst dreht $6 \cdot 72^0 = 6 \cdot 12^0$, aber keineswegs ∢ von 72^0 = ∢ von 12^0.

Robert Simson hat, wegen des ersten Bedenkens, vgl. auch Pfleiderer, den Beweis geändert; vgl. das Postulat von Clavius (Definitionen). Ein anderer Beweis, der einwandsfrei ist, findet sich bei Clavius S. 493. Der Grundgedanke besteht darin, AB über A hinaus um $nZ\Delta$ zu verlängern, etwa bis O und dann zu zeigen (durch S. 1), dafs OA und EB gleich sind.

6.

Ist $\alpha = n\gamma$ und $\beta = n\delta$ und ist α' ein Stück von α und β' ein Stück von β und $\alpha = p\gamma$ und $\beta' = p\delta$, so ist $\alpha - \alpha' = (n - p)\gamma$ und $(\beta - \beta') = (n - p)\delta$, wo n und p Anzahlen und $n - p \geq 1$.

S. 6 ist Umkehr von S. 2 und wird durch S. 2 bewiesen (Fig. 6).

Fig. 6.

Simson (und Pfleiderer) haben die Reihenfolge der Sätze bemängelt, S. 4 gehört jedenfalls hinter 6.

7.

Gleiches hat zum Selben dasselbe Verhältnis und dasselbe hat zu Gleichem dasselbe Verhältnis.

Wenn $A = B$, so ist 1) $A : \Gamma = B : \Gamma$ und 2) $\Gamma : A = \Gamma : B$ (Fig. 7). Beweis folgt unmittelbar aus der Definition 5.

Fig. 7.

Zusatz.

Hieraus erhellt: dafs, wenn gewisse Gröfsen in Proportion sind, sie auch invers in Proportion sind.

Dieser Zusatz, obwohl er im Vaticanus hinter S. 7 steht, ist von Peyrard, da er in allen übrigen Codices hinter S. 4 steht, auch hinter S. 4 gesetzt worden, trotzdem diese Stellung von Rob. Simson mit Recht bemängelt worden. Der Zusatz ist auch in S. 7 eigentlich nur für den speziellen Fall dieses Satzes bewiesen. Er folgt aber direkt aus der Definition 5, denn wenn $pa >=< qb$ und ebenso $pc >=< qd$, für beliebige Anzahlwerte von p und q, so ist $qb <=> pa$ und ebenso $qd <=> pc$ und wegen der Variabilität von p und q heifst dies nach Definition 5 $b:a = d:c$.

8.

Von ungleichen Gröfsen hat die gröfsere zu ein und derselben Gröfse ein gröfseres Verhältnis, wie die kleinere, und dieselbe Gröfse hat zur kleineren ein gröfseres Verhältnis wie zur gröfseren.

(Fig. 8.) $AB > \Gamma$ und Δ eine beliebige dritte Gröfse. Man mache $EB = \Gamma$ und es sei zuerst $AE < EB$. Man multipliziert AE so lange, bis sein Vielfaches ZH gröfser als Δ ist (Definition 4), und $H\Theta$ sei dasselbe Vielfache von EB und K von Γ, wie ZH von AE (hier das zweifache). Nun nehme man $2\Delta = \Lambda$, $3\Delta = M$ und so fort, bis man zum ersten Vielfachen von Δ gelangt, das gröfser ist als K, es sei $N = 4\Delta$.

Da nun K zuerst kleiner als N, so ist K nicht kleiner als M. Nach S. 1 ist $Z\Theta$ dasselbe Vielfache von AB, wie ZH von AE und $H\Theta$ von EB, wie K von Γ und $H\Theta$ ist $= K$; also ist auch $H\Theta$ nicht kleiner als M. Aber $ZH > \Delta$, also $Z\Theta > \Delta + M$, aber $\Delta + M = N$, da $M = 3\Delta$ und $M + \Delta = 4\Delta$ und N auch $= 4\Delta$ ist; also $Z\Theta > N$. Aber K übertrifft N nicht. Und $Z\Theta$ und K sind gleiche Vielfache von AB und Γ, aber N ist ein bestimmtes Vielfaches von Δ; folglich nach Definition 7: $AB : \Delta > \Gamma : \Delta$.

Fig. 8.

Ich behaupte ferner, dafs $\Delta : \Gamma > \Delta : AB$. Denn durch dieselbe Konstruktion können wir auf ähnliche Art zeigen, dafs $N > K$ sei, aber nicht gröfser als $Z\Theta$, und N ist ein Vielfaches von Δ, und K

und $Z\Theta$ sind bestimmte Gleichvielfache von AB und Γ, also $\varDelta : \Gamma > \varDelta : AB$.

Zweiter Fall (Fig. 8a). $AE > EB$. Nun wird das vervielfältigte EB irgendwann größer als $\varDelta$ werden, $H\Theta$ sei das Vielfache $[n = 2]$ und ZH das nämliche Vielfache von AE und K von Γ. Wie vorher sind $Z\Theta$ und K Gleichvielfache von AB und Γ, und wie vorher sei N das erste Vielfache von $\varDelta$, das größer ist als ZH. Daher ist wieder ZH nicht kleiner, als M; aber $H\Theta > \varDelta$. Also ist das ganze $Z\Theta > \varDelta + M$, d. h. $Z\Theta > N$, aber K nicht größer als N, da ZH, das größer ist als $H\Theta = K$, nicht größer ist als N. Also wie im ersten Fall $AB : \varDelta > \Gamma : \varDelta$ und $\varDelta : \Gamma > \varDelta : AB$.

Fig. 8a.

9.

Größen, welche zur selben Größe gleiches Verhältnis haben, sind gleich, und Größen, zu denen die Größe das gleiche Verhältnis hat, sind gleich.

(Fig. 9.) $A : \Gamma = B : \Gamma$; also $A = B$, denn wenn nicht, so wäre nach S. 8 nicht $A : \Gamma = B : \Gamma$.

Ferner: Es sei $\Gamma : A = \Gamma : B$, so ist $A = B$. denn, wenn nicht, könnte (nach S. 8) nicht $\Gamma : A = \Gamma : B$ sein.

Fig. 9.

S. 9 ist Umkehr von S. 7.

10.

Ist $A : \Gamma > B : \Gamma$, so ist $A > B$; ist $\Gamma : A > \Gamma : B$, so ist $A < B$.

(Fig. 10.) Beweis indirekt, die Gleichheit verstößt gegen Satz 7, das Kleinersein gegen Satz 8.

Fig. 10.

11.

Sind zwei Verhältnisse einem dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.

(Fig. 11.) Es sei $A : B = \Gamma : \varDelta$ und $\Gamma : \varDelta = E : Z$, so ist $A : B = E : Z$. (Def. 5) $pA >=< qB$, $p\Gamma >=< q\varDelta$, $pE >=< qZ$

Fig. 11.

12.

Wenn beliebig viele Gröfsen in Proportion sind, so wird die Summe* aller führenden zur Summe aller folgenden sich verhalten wie ein führendes zu seinem* folgenden.

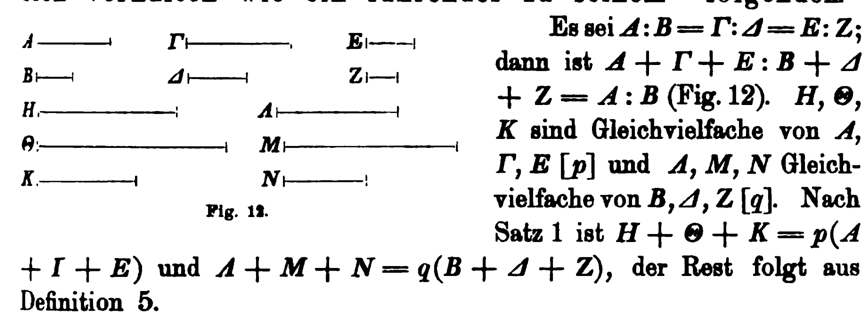


Fig. 12.

Es sei $A:B=\Gamma:\Delta=E:Z$; dann ist $A+\Gamma+E:B+\Delta+Z=A:B$ (Fig. 12). H, Θ, K sind Gleichvielfache von A, Γ, E $[p]$ und Λ, M, N Gleichvielfache von B, Δ, Z $[q]$. Nach Satz 1 ist $H+\Theta+K=p(A+\Gamma+E)$ und $\Lambda+M+N=q(B+\Delta+Z)$, der Rest folgt aus Definition 5.

Summen durch ἅπαντα = omnia (von Euclid ist diese Bezeichnung nachweisbar bis Cavalieri und von da zu Leibniz (Integralzeichen)); statt „seinem" steht bei Euclid einem.

13.

Wenn $A:B=\Gamma:\Delta$ und $\Gamma:\Delta>E:Z$, so wird auch $A:B>E:Z$ sein.

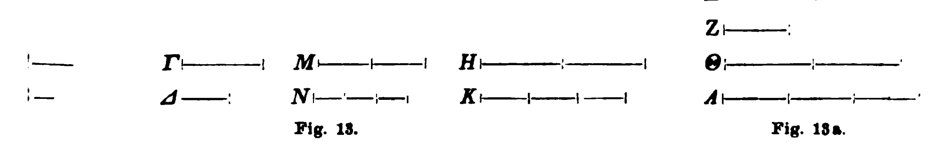


Fig. 13. Fig. 13a.

(Fig. 13.) Beweis unmittelbar aus der Definition 7 $p\Gamma>q\Delta$, pE nicht $>qZ$, Definition 5 $pA>qB$, also, Definition 7 $A:B>E:Z$. In der Figur $p=2$, $q=3$.

14.

Wenn $A:B=\Gamma:\Delta$ und $A \gtreqless \Gamma$, so ist $B \gtreqless \Delta$.

(Fig. 14.) $A:B>\Gamma:B$ nach S. 8, also nach 13 : $\Gamma:\Delta>\Gamma:B$, also nach 10: $B>\Delta$ etc.

Fig. 14.

15.

Teile sind mit ihren Gleichvielfachen in gleichem Verhältnis.

Formel $a:b=na:nb$.

Fig. 15.

(Fig. 15.) Sei $AB = n \cdot \Gamma$ und $\Delta E = n \cdot Z$, so soll $AB : \Delta E = \Gamma : Z$.

Unmittelbare Folge von Satz 12.

16.

Wenn vier Gröfsen in Proportion sind, so werden sie auch nach Vertauschung in Proportion sein.

(Fig. 16). Wenn $A : B = \Gamma : \Delta$, so soll $A : \Gamma = B : \Delta$ sein. Es ist der Satz: In einer Proportion lassen sich die inneren Glieder vertauschen. Man nehme gleiche Vielfache E und Z von A und B (hier dreifache) und von Γ und Δ die beliebigen gleichen Vielfachen H und Θ (zweifache), dann ist nach 15 $A : B = E : Z = \Gamma : \Delta = H : \Theta$.

Fig. 16.

Aus 14 folgt: Ist $E \gtreqless H$, so ist $Z \gtreqless \Theta$. Es sind aber E und Z gleiche Vielfache von A und B und H und Θ gleiche Vielfache von Γ und Δ, also wenn $pA \gtreqless q\Gamma$, so ist $pB \gtreqless q\Delta$, also $A : \Gamma = B : \Delta$.

Clavius hebt hervor, dafs dieser Beweis nur gilt, wenn die vier Grössen unter sich gleichartig, Clavius hat in den Scholien zu den früheren Sätzen wiederholt bereits bemerkt, dafs viele der Sätze auch gelten, wenn A und B homogen unter sich und C und D desgleichen, aber A und C heterogen; hier bei Clavius findet sich schon der Beginn unserer modernen Auffassung, welche das Verhältnis $a : b$ mit dem Bruch a/b identifiziert.

17.

Wenn die verbundenen Gröfsen in Proportion sind, so sind es auch die getrennten.

Hier fehlt bei Heiberg die Figur, wohl aus Versehen, da sie sich bei Peyrard, Campanus, Zamberti, Clavius, Lorenz etc. findet, sie sei aus Peyrard ergänzt. Der Satz wird durch Definition 14 verständlich, wenn

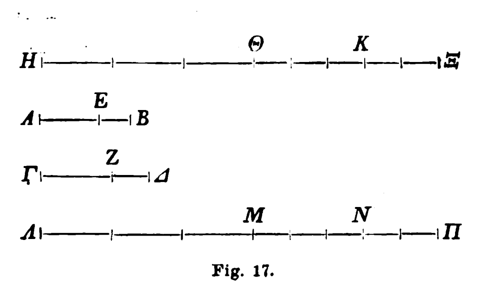


Fig. 17.

$$(a + b) : b = (c + d) : d,$$

so ist $a : b = c : d$ (Fig. 17). Wenn $AB : BE = \Gamma\Delta : \Delta Z$, so $AE : BE = \Gamma Z : \Delta Z$. $H\Theta$, ΘK, ΛM, MN Gleich- (drei)

Vielfache von $AE, EB, \Gamma Z, \Delta Z$; — $K\Xi$, $N\Pi$ beliebige Gleichvielfache von BE und ΔZ (zweifache), nach Satz 1 ist $HK = 3AB$ und $\Lambda N = 3\Gamma\Delta$, $Z\Theta\Xi = 5EB$, $M\Pi = 5Z\Delta$ (S. 2). Weil $AB : BE = \Gamma\Delta : \Delta Z$, so ist, falls, wie hier, $HK > \Theta\Xi$, auch $\Lambda N > M\Pi$; nimmt man die gemeinsamen Stücke ΘK bezw. MN weg, so ist $H\Theta > K\Xi$ und $\Lambda M > N\Pi$. Also wenn $H\Theta > K\Xi$, so ist $\Lambda M > N\Pi$. Ebenso wird gezeigt, wenn $H\Theta = < K\Xi$, so ist $\Lambda M < = N\Pi$, also (Definition 5): $AE : BE = \Gamma Z : \Delta Z$.

$a + b : b = c + d : d$ d. h. nach Definition 5: wenn $p(a + b)$ d. i. $pa + pb > = < (p + q)b$ d. i. $pb + qb$, so ist $pc + pd > = < pd + qd$ oder wenn $pa > = < qb$, so ist $pc > = < qd$, d. h. aber nach Definition 5 $a : b = c : d$.

18.

Wenn die getrennten Gröfsen in Proportion sind, so sind es auch die zusammengesetzten.

(Fig. 18.) $AE:EB = \Gamma Z : Z\Delta$. Behauptung $AB:BE = \Gamma\Delta : Z\Delta$. Wenn die Behauptung nicht richtig, so sei $AB : BE = \Gamma\Delta : \Delta H$, wo $\Delta H < Z\Delta$ oder $>$. Es sei zuerst kleiner. Nach 17 ist die $AE : EB = \Gamma H : H\Delta$. Aber nach Voraussetzung $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$. Aber $\Gamma H > \Gamma Z$, also $H\Delta > Z\Delta$ (S. 14), was unmöglich. Ebensowenig kann $\Delta H > Z\Delta$ sein.

Fig. 18.

Formel. Wenn $a : b = c : d$, so ist $a + b : b = c + d : d$, also Umkehrung von 17. Der Beweis ist von Saccheri als einer der „Flecken" des Euclid bezeichnet und von ihm geändert, Simson hat sich dem Urteil Saccheri's angeschlossen, aber dessen Beweis verworfen. Der Beweis setzt nämlich das schon von Clavius hervorgehobene Axiom voraus. „Es giebt stets zu drei Strecken eine vierte Proportionale", deren Konstruktion aber erst im sechsten Buche gelehrt wird, siehe Anm. zu S. 5. Übrigens findet sich bei Campanus (Baseler Ausgabe Hervagius) ein von „Flecken" freier Beweis.

19.

Wenn das Ganze zum Ganzen sich verhält, wie das Weggenommene zum Weggenommenen, so hat der Rest zum Rest das gleiche Verhältnis.

(Fig. 19.) $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$. Behauptung $EB : Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$. Vertausche die inneren Glieder $AB : AE = \Gamma\Delta : \Gamma Z$, und nach S. 17 $EB : AE = \Delta Z : \Gamma Z$ und mit nochmaliger Vertauschung $BE : \Delta Z = AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta$.

Fig. 19.

Zusatz.

Hieraus erhellt, wenn Gröfsen in der Verbindung in Proportion sind, so sind sie es auch in Umwendung (Definition 16).

Formel: Aus $a : b = a - x : b - y$ folgt $a : b = x : y$
heute:

$$\frac{a}{c} = \frac{a - x}{b - y} = \frac{\text{Differenz der Zähler}}{\text{Differenz der Nenner}} = \frac{x}{y}.$$

20.

Wenn drei Gröfsen $[A, B, \Gamma]$ gegeben sind und ebenso drei andere $[\Delta, E, Z]$, zu je zwei genommen, im selben Verhältnis, $[A : B = \Delta : E,\ B : \Gamma = E : Z]$ und es ist $A >=< \Gamma$, so ist $\Delta >=< Z$.

(Fig. 20.) Es ist nach S. 8 $A : B > \Gamma : B$, also $\Delta : E > \Gamma : B$, also (Zusatz zu S. 7) $\Delta : E > Z : E$, also nach S. 10 $\Delta > Z$ etc.

Fig. 20.

21.

Wenn drei Gröfsen $[A, B, \Gamma]$ gegeben sind, und drei andere Δ, E, Z, zu zwei genommen, im selben Verhältnis, aber in gestörter Proportion $[A : B = E : Z.\ B : \Gamma = \Delta : E]$, und $A >=< \Gamma$ ist, so ist $\Delta >=< Z$.

(Fig. 21.) $A > \Gamma$; $A : \Delta > \Gamma : B$ (S. 8), und durch Inversion (Satz 7, Zusatz) $\Gamma : B = E : \Delta$, also $E : Z > E : \Delta$, also $\Delta > Z$ (S. 10) etc.

Fig. 21.

22.

Wenn beliebig viele Gröfsen $A, B, \Gamma \ldots$ gegeben sind, und eine andere Reihe von ebenso viel Gröfsen $\Delta, E, Z \ldots$ und sie zu je zweien [der Reihe nach] im gleichen Verhältnis, dann sind sie der Gleichheit wegen (Defin. 17) im selben Verhältnis $[A : \Gamma = \Delta : Z]$.

(Fig. 22.) Denn seien H und Θ Gleichvielfache von A und Δ und K und Λ beliebige Gleichvielfache von B und E, sodann M und N wieder beliebige Gleichvielfache von Γ und Z, so ist nach S. 4 $H:K=\Theta:\Lambda$ und $K:M=\Lambda:N$. Da nun H, K, M drei Gröfsen sind, Θ, Λ, N drei andere zu je zweien proportionale, so ist nach Satz 20, wenn $H >=< M$ ist, auch $\Theta >=< N$, also nach Definition 5 $A:\Gamma=\Delta:Z$.

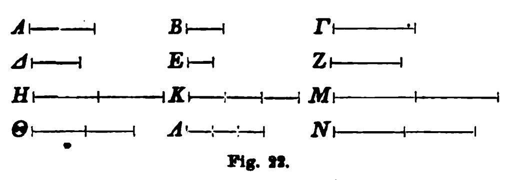


Fig. 22.

S. 20 und 21 sind nur Hilfssätze für 22 und 23, das „δι' ἴσου“ in 20 und 21 hat mit dem Δι' ἴσου in Definition 17 nichts zu thun, es kann in der Übersetzung weggelassen werden, bezw. ist ἐὰν dahinter zu ergänzen: „in gleichmäfsiger Weise ist, wenn $A > \Gamma$ das $\Delta > Z$, wenn $A = \Gamma$ etc. ...“ In S. 22 aber ist δι' ἴσου der term. techn. der Definition 17.

23.

Wenn drei Gröfsen A, B, Γ gegeben sind, und drei andere Δ, E, Z mit ihnen in gestörter Proportion, so sind sie auch in Proportion zufolge Gleichheit.

(Fig. 23.) Es ist $A:B=E:Z$ und $B:\Gamma=\Delta:E$, Behauptung $A:\Gamma=\Delta:Z$. Beweis H, Θ, K Gleichvielfache von A, B, Δ, und unter sich Gleichvielfache Λ, M, N von Γ, E, Z, dann ist nach S. 15 $H:\Theta=A:B$ und $E:Z=M:N$; folglich

$$H:\Theta=M:N.$$

Fig. 23.

Da $B:\Gamma=\Delta:E$, so ist durch Vertauschung der inneren Glieder $B:\Delta=\Gamma:E$, also $\Theta:K=\Lambda:M$, also $\Theta:\Lambda=K:M$. Also fallen H, Θ, Λ und K, M, N unter S. 21, d. h. wenn $H ><= \Lambda$, so ist $K ><= N$, d. h. aber (nach Definition 5) $A:\Gamma=\Delta:Z$.

24.

Ist $A:B=\Gamma:\Delta$ und $E:B=Z:\Delta$, so ist $A+E:B=\Gamma+Z:\Delta$.

(Fig. 24.) Es ist $A:B:E=\Gamma:\Delta:Z$, also nach S. 22 $A:E=\Gamma:Z$, also nach S. 18 $A+E:E=\Gamma+Z:Z$. Und da $E:B$

$= Z : \Delta$, so ist infolge Gleichheit (S. 22) mit Benutzung der Inversion $A + E : \Gamma + Z = E : Z = B : \Delta$, $A + E : \Gamma + Z = B : \Delta$, also

$$A + E : B = \Gamma + Z : \Delta.$$

Fig. 24.

S. 24 zeigt mit gröfster Schärfe, dafs hier im fünften Buch Eudoxus die gewöhnlichen Regeln der Rechnung mit Brüchen auf Streckenbrüche erweitert, id est dafs es sich im fünften Buch um nichts anderes handelt, als um die strenge Begründung der Rechnungsregeln für Irrationalzahlen, und dafs der Gang des Eudoxus von dem unseres Weierstrafs nur unwesentlich abweicht.

25.

Sind vier Gröfsen in Proportion, so sind die gröfste und kleinste zusammen gröfser als die übrigen zu zweien.

(Fig. 25.) Es sei $AB : \Gamma\Delta = E : Z$ und AB die gröfste, Z die kleinste von ihnen, so soll $AB + Z > \Gamma\Delta + E$ sein.

Sei $AH = E$ und $\Gamma\Theta = Z$, so ist $AB : \Gamma\Delta = AH : \Gamma\Theta$.

Folglich nach S. 19 $HB : \Theta\Delta = AB : \Gamma\Delta$.

Aber $AB > \Gamma\Delta$, folglich $HB > \Theta\Delta$.

Fig. 25.

Da $AH = E$ und $\Gamma\Theta = Z$, so ist $AH + Z = \Gamma\Theta + E$, und wenn man den ungleichen Gröfsen HB und $\Theta\Delta$ diese gleiche Gröfsen hinzufügt, so ist $AB + Z > \Gamma\Delta + E$. q. e. d.

„Zusammen" gleich „καί". Die Übersetzung „als die zwei übrigen" entspricht weder dem Sinn noch dem Wortlaut.

VI. [Buch].

Erklärungen.

1) Grundlinige Figuren sind ähnlich, wenn sie der Reihe[1]) nach gleiche Winkel haben und die Seiten, welche gleichen Winkel einschliefsen, proportional sind.

2) Man sagt: Eine Strecke[2]) werde ausgezeichnet[3]) und nach mittlerem Verhältnis geteilt, wenn die ganze zum gröfseren Abschnitt [sich verhält], wie der gröfsere Abschnitt zum kleineren.

3) Höhe einer jeglichen Figur ist das von der Spitze auf die Grundlinie gefällte Lot.

Anmerkungen.

1) *κατα μίαν* „einzeln". 2) *εὐθεῖα* ohne Artikel und ohne Zusatz. 3) *ἀκρόν*; die Übersetzung „äufserst" (franz. extrême) giebt keinen Sinn, noch weniger „äufsern".

1.

Dreiecke und Parallelogramme von gemeinsamer [gleicher] Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

(Fig. 1.) Es seien $AB\Gamma$ und $A\Gamma\Delta$ die Dreiecke, $E\Gamma$ und ΓZ die Parallelogramme von derselben Höhe $A\Gamma$. Man verlängere $B\Delta$ nach beiden Seiten, mache $\Gamma B = BH = H\Theta$ etc. und $\Gamma\Delta = \Delta K = K\Lambda$ und ziehe AH, $A\Theta$ etc. und AK, $A\Lambda$ etc. Dann sind (nach I, 38) die Dreiecke $AB\Gamma$, ABH, $AH\Theta$ gleich und ebenso die Dreiecke $A\Gamma\Delta$, $A\Delta K$, $AK\Lambda$ etc. Also ist $\Theta\Gamma$ dasselbe Vielfache von $B\Gamma$ wie $AB\Theta$ von $AB\Gamma$ und $\Gamma\Lambda$ dasselbe Vielfache von $\Gamma\Delta$ wie $A\Gamma\Lambda$ von $A\Gamma\Delta$.

E A Z
Θ H B Γ Δ K Λ
Fig. 1.

Und wenn $\Theta\Gamma = \Gamma A$, so ist Dreieck $A\Theta\Gamma =$ Dreieck $A\Gamma A$ und wenn gröfser gröfser, wenn kleiner kleiner. Es sind aber $\Gamma\Theta$ und $A\Gamma\Theta$ Gleichvielfache von $B\Gamma$ und $AB\Gamma$ und ΓA und $A\Gamma A$ beliebig* gleiche Vielfache von $\Gamma\Delta$ und $A\Gamma\Delta$, also (Definition 5)

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = \text{Dreieck } AB\Gamma : A\Gamma\Delta$$

und da die gleichvielten Teile dasselbe Verhältnis haben, wie ihre Ganzen (V, 15), mit Benutzung von V, 11

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = E\Gamma : \Gamma Z.$$

Der Beweis setzt als selbstverständlichen Folgesatz von I, 38 den Satz voraus: Von zwei Dreiecken mit gleicher Höhe und ungleicher Grundlinie ist das mit der gröfseren Grundlinie das gröfsere. Der Satz ist unmittelbar auf Dreiecke und Parallelogramme mit gleicher Höhe auszudehnen und wird auch von Euclid so ausgedehnt angewendet. Eine Ungeschicklichkeit ist es, dafs $\Gamma\Theta$ das gleiche Vielfache von $B\Gamma$ ist, wie ΓA von $\Gamma\Delta$.

2.

Wenn parallel einer der Seiten des Dreiecks eine Gerade gezogen wird, so wird sie die Seiten des Dreiecks proportional schneiden. Und wenn die Seiten eines Dreiecks proportional geschnitten werden, so wird die Verbindungslinie der Schnittpunkte der übrig bleibenden Seite des Dreiecks parallel sein.

(Fig. 2.) ΔE sei $\parallel B\Gamma$. Man ziehe BE und $\Gamma\Delta$, dann ist Dreieck $B\Delta E = \Gamma\Delta E$ (I, 38). Also:

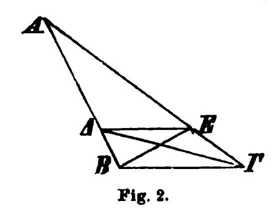


Fig. 2.

$$\frac{B\Delta E}{A\Delta E} = \frac{\Gamma\Delta E}{A\Delta E}; \text{ aber } \frac{B\Delta E}{A\Delta E} = \frac{\Delta B}{\Delta A} \text{ (S. 1)}.$$

Aus gleichem Grunde $\Gamma\Delta E : A\Delta E = E\Gamma : AE$, also $B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA$. q. e. d.

Umgekehrt. Die Seiten von $AB\Gamma$ seien in Δ und E so geschnitten, dafs $B\Delta : \Delta A = \Gamma E : EA$ und es werde ΔE gezogen, so ist $\Delta E \parallel B\Gamma$. Durch dieselbe Konstruktion ergiebt sich jetzt $B\Delta E = \Gamma\Delta E$, da diese Dreiecke dieselbe Grundlinie ΔE haben und die gleiche Fläche, so sind sie [nach I, 39] in denselben Parallelen, also ist $\Delta E \parallel B\Gamma$.

3.

Wenn ein* Winkel des* Dreiecks halbiert wird, und die Halbierende auch die Basis schneidet, so verhalten sich

die Abschnitte der Basis wie die anderen* Seiten des Dreiecks und umgekehrt.

(Fig. 3.) Das Dreieck sei $AB\Gamma$, die Halbierungslinie $A\Delta$, und ΓE parallel $A\Delta$ gezogen, dann ist wegen der Gleichheit der Basiswinkel (I, 29) $A\Gamma = AE$, also nach Satz 2

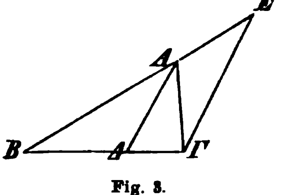


Fig. 3.

$$B\Delta : \Delta\Gamma = BA : A\Gamma.$$

Umgekehrt, wenn diese Gleichung erfüllt ist, so sind $A\Gamma$ und AE gleich, also die Basiswinkel, und damit nach I, 29 auch $\sphericalangle BA\Delta = \sphericalangle \Delta A\Gamma$.

„ein" griech. ἡ; „das" griech. ohne Artikel; die unbestimmte Fassung des Satzes wird durch den Beweis korrigiert, es müfste heifsen: „wie die anliegenden". Es fehlt der zweite Teil, die Halbierungslinie des Aufsenwinkels. Der vollständige Satz, auf dem der sogenannte Kreis des Apollonius (De det. sect.) beruht, und die Lehre von der harmonischen Teilung ihren historischen Ausgang genommen hat, ist hier nur mit seinem ersten Teil vertreten. Da aber Pappus den anderen Teil ebenfalls als einen Satz der Elemente erwähnt, so glaubt Simson, er sei durch einen unwissenden Editor weggelassen.

4.

In gleichwinkligen Dreiecken sind die Seiten, welche ein Paar gleicher Winkel einschliefsen, dem Verhältnis nach gleich* und es sind [dann] die Seiten homolog, welche gleichen Winkeln gegenüberliegen.

(Fig. 4.) Es seien $AB\Gamma$ und $\Delta\Gamma E$ die Dreiecke, so dafs $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta\Gamma E$, $BA\Gamma = \Gamma\Delta E$, dazu noch $A\Gamma B = \Delta E\Gamma$. $B\Gamma$ und ΓE mögen in einer Geraden liegen und BA und $E\Delta$ schneiden sich (5. Postulat) in Z. Dann ist $BZ \parallel \Gamma\Delta$ (I, 28) und $A\Gamma \parallel EZ$, also $ZA\Gamma\Delta$ ein Parallelogramm und $ZA = \Delta\Gamma$, $A\Gamma = Z\Delta$, also (nach S. 2) $BA : \Gamma\Delta = B\Gamma : \Gamma E$ und durch Inversion $BA : B\Gamma = \Gamma\Delta : \Gamma E$. Ebenso folgt, weil $A\Gamma \parallel EZ$ ist: $BA : A\Gamma = \Gamma\Delta : \Delta E$.

Fig. 4.

Satz 4 ist der bekannte Hauptsatz der Ähnlichkeitslehre, der in unseren Lehrbüchern gewöhnlich durch Analogie des zweiten Kongruenzsatzes der zweite

Ähnlichkeitssatz heifst. Euclid aber stellt ihn an die Spitze, wohin er gehört und beweist ihn mittelst des Streifensatzes 2.

5.

Wenn zwei Dreiecke dem Verhältnis nach gleiche Seiten haben, so werden die Dreiecke gleichwinklig sein und die Winkel, welche homologen Seiten gegenüberliegen, gleich haben.

(Fig. 5.) $AB\Gamma$ und ΔEZ seien die Dreiecke, so dafs $AB:B\Gamma = \Delta E:EZ$ und $B\Gamma:\Gamma A = EZ:Z\Delta$, $BA:A\Gamma = E\Delta:\Delta Z$. Behauptung $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$ etc. Man konstruiere EZH, so dafs $\sphericalangle ZEH = AB\Gamma$ und $EZH = A\Gamma B$ (I, 23), daher ist $\sphericalangle$ bei A gleich $\sphericalangle$ bei H (I, 32). Daher sind $AB\Gamma$ und EHZ winkelgleich und nun folgt aus S. 4, dafs $EH = E\Delta$ und $ZH = Z\Delta$, also EZH Dreieck ΔEZ nach I, 8 kongruent.

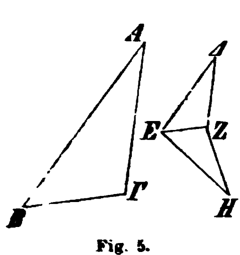


Fig. 5.

Dritter Ähnlichkeitssatz, „dem Verhältnis nach gleich", griech. „ἀνάλογον".

6.

Wenn zwei Dreiecke in einem Winkel übereinstimmen und die Seiten, welche die gleichen Winkel einschliefsen, in gleichem Verhältnis stehen, so sind die Dreiecke winkelgleich, und es sind die Winkel gleich, welche den homologen Seiten gegenüberliegen.

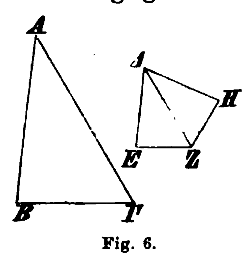


Fig. 6.

(Fig. 6.) $AB\Gamma$ und ΔEZ die Dreiecke, $\sphericalangle BA\Gamma = E\Delta Z$ und $BA:A\Gamma = \Delta E:\Delta Z$. Behauptung $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$, $\sphericalangle A\Gamma B = \Delta ZE$. Man konstruiere an ΔZ das Dreieck ΔHZ, so dafs $\sphericalangle Z\Delta H = E\Delta Z = BA\Gamma$ und $\sphericalangle \Delta ZH = A\Gamma B$, dann ist $\sphericalangle$ bei H gleich $\sphericalangle$ bei B: also sind $BA\Gamma$ und $Z\Delta H$ winkelgleich, also $BA:A\Gamma = H\Delta:\Delta Z = \Delta E:\Delta Z$, also $H\Delta = \Delta E$, also ΔEZ kongruent $Z\Delta H$ nach I, 4 etc.

Der sogenannte 1. Ähnlichkeitssatz ist also bei Euclid der 3., völlig entsprechend der Bedeutung der Sätze für die Anwendungen.

7.

Wenn zwei Dreiecke einen Winkel gemeinsam haben und die Seiten, welche einen anderen* Winkel einschliefsen, in gleichem Verhältnis stehen, und von dem dritten Winkelpaar jeder zugleich kleiner oder nicht kleiner* als ein Rechter, so sind die Dreiecke gleichwinklig, und haben die Winkel gleich, deren einschliefsende Seiten in gleichem Verhältnis stehen.*

(Fig. 7.) Es seien $AB\Gamma$ und ΔEZ die Dreiecke, $\sphericalangle BA\Gamma = E\Delta Z$ und $AB : B\Gamma = \Delta E : EZ$ und die Winkel bei Γ und Z beide im ersten Falle kleiner als ein Rechter. Behauptung $\sphericalangle AB\Gamma = \Delta EZ$. Beweis indirekt: Es sei $\sphericalangle AB\Gamma > \Delta EZ$ und $\sphericalangle ABH = \Delta EZ$, daher sind ABH und ΔZE gleichwinklig und $AB : BH = \Delta E : EZ$, also $BH = B\Gamma$, dann müfste $BH\Gamma$ einerseits als Nebenwinkel eines spitzen Winkels gröfser als ein Rechter, andererseits als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck kleiner als ein Rechter sein, also kann $AB\Gamma$ nicht von ΔEZ verschieden sein. Ebenso geht der Beweis, wenn die Winkel bei Γ und Z stumpf vorausgesetzt werden.

Fig. 7.

Der Plural ἄλλας bezieht sich auf einen Winkel in jedem der Dreiecke. Der Fall, dafs beide Rechte sind, ist als durch S. 4 erledigt nicht behandelt. Rob. Simson hat hinzugefügt „oder einer ein Rechter". Zu bemerken ist, dafs mit Satz 7 erst der vierte Kongruenzsatz, der im Buch I fehlt, bewiesen ist.

8.

Wird im rechtwinkligen Dreieck vom rechten Winkel aus bis zur Basis hin das Lot gezogen, so sind die Dreiecke an dem Lote sowohl dem ganzen als untereinander ähnlich.

(Fig. 8.) Übereinstimmung in den Winkeln und S. 4.

Zusatz.

Hieraus erhellt, dafs, wenn im rechtwinkligen Dreieck vom rechten Winkel aus bis zur Basis hin das Lot gezogen wird, das Lot die mittlere Proportionale der Abschnitte ist (und zwischen der Basis und einem der Abschnitte ist die dem Abschnitt anliegende Seite mittlere Proportionale).

Fig. 8.

Heiberg hat den rund geklammerten Schlufs des Zusatzes als unzweifelhaft gefälscht weggelassen, es folgt das auch aus sachlichen Gründen, denn während der erste Teil wiederholt als Stütze von Beweisen im Euclid gebraucht wird (VI, 13, X, 34, XIII, 13), kommt der zweite bei Euclid nicht vor.

Robert Simson hat, vermutlich mit Recht, auch den Beweis für überarbeitet erklärt, der bei Campanus (Bas. Ausg. von 1546 p. 145 ob.) stark abgekürzt ist. Auffallend ist scheinbar, dafs während bei den eigentlichen Ähnlichkeitssätzen 4, 5, 6, 7 das Wort ähnlich vermieden ist, es von 8 ab auftritt; doch ist erst durch diesen Satz die Existenz ähnlicher Figuren im Sinne der Definition festgestellt.

9.

Von einer gegebenen Strecke einen vorgeschriebenen Bruchteil abzuschneiden.

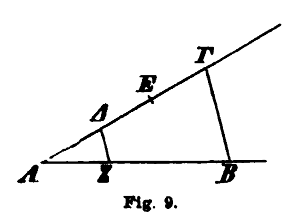


Fig. 9.

(Fig. 9.) Die gegebene Strecke sei AB, der vorgeschriebene Teil sei der dritte. Man ziehe von A einen beliebigen Strahl $A\Gamma$, nehme auf ihm einen beliebigen Punkt Δ, und mache $A\Delta = \Delta E = E\Gamma$, ziehe $B\Gamma$ und durch Δ dazu die Parallele ΔZ.

Nach 2 ist $\Gamma\Delta : \Delta A = BZ : ZA$, aber $\Gamma\Delta = 2\Delta A$, also auch $BZ = 2ZA$, folglich $BA = 3AZ$.

Der Beweis ist von R. Simson (1756) und Pfleiderer bemängelt worden, da im fünften Buch ein Satz fehle: Wenn $a : b = c : d$ und $a = nb$, so ist $c = nd$ (wo n eine Anzahl); aber dieser Satz selbst ist unmittelbar in der Definition 5 des fünften Buches mitgegeben.

10.

Eine gegebene ungeschnittene Strecke auf dieselbe Art zu zerschneiden, wie eine gegebene zerschnittene Strecke.

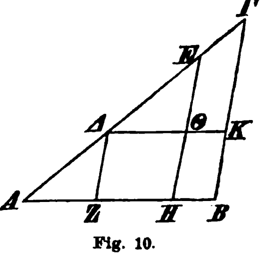


Fig. 10.

(Fig. 10.) Die unzerschnittene sei AB, die zerschnittene $A\Gamma$, die Schnittpunkte Δ, E, und sie möge so liegen, dafs sie mit AB einen beliebigen Winkel einschliefse. Man ziehe $B\Gamma$ und durch Δ, E die Parallelen ΔZ, EH.

Durch $\varDelta$ werde die Parallele $\varDelta\Theta K$ zu AB gezogen, so sind $Z\Theta$, ΘB Parallelogramme und deshalb $\varDelta\Theta = ZH$ und $\Theta K = HB$ und (nach 2) $\Gamma E : E\varDelta = K\Theta : \Theta\varDelta = BH : HZ$ etc.

S. 10 enthält die Lösung der Teilungs-Aufgabe, der wichtigsten der Geometrie des Maſses, sie geht ursprünglich vom Streifen aus, die vereinfachende Variante, welche Fig. 10a zeigt, findet sich bei Clavius p. 555, nach Pfleiderer auch bei Maurolycos 1575. Die elegante und bekannte Lösung Fig. 10b ist gleichzeitig von Simon Stevin (Hypomnem. math. Leyden 1605) und Clavius p. 555 gegeben, der sie schon I, 10 verspricht.

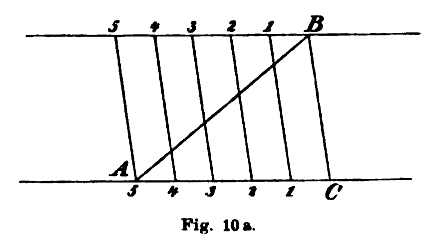


Fig. 10a.

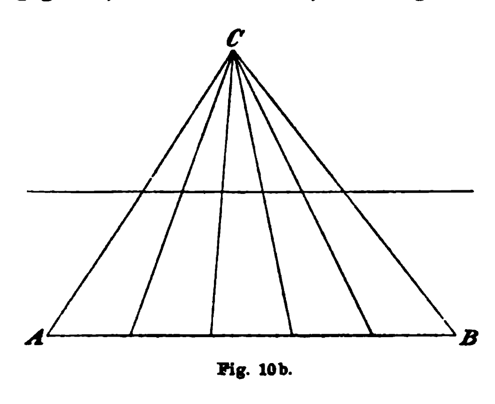


Fig. 10b.

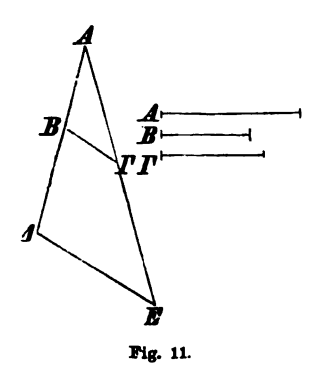


Fig. 11.

11.

Zu zwei gegebenen Strecken die dritte Proportionale zu finden.

(Fig. 11.) Die gegebenen Strecken seien AB, $A\Gamma$; man mache $B\varDelta = A\Gamma$, und ziehe durch $\varDelta$ zu $B\Gamma$ die Parallele $\varDelta E$, so ist ΓE die verlangte (S. 2).

Die bekannte Konstruktion einer unbegrenzten kontinuierlichen Proportionalen $A : B = B : C = C : D$ etc. findet sich bei Clavius S. 561 (Ausg. von 1607), wo S. 562 die für die Würfelverdoppelung nötige Einschaltung zweier Proportionalen besprochen wird.

12.

Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu finden.

(Fig. 12.) A, B, Γ die Strecken; $\varDelta H = A$, $HE = B$; $\varDelta \Theta = \Gamma$, so ist nach S. 2 ΘZ die gesuchte Strecke.

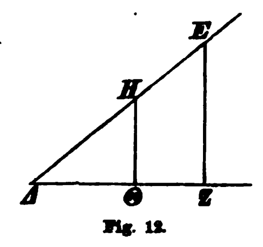


Fig. 12.

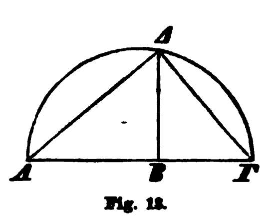


Fig. 13.

13.

Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu finden.

(Fig. 13.) AB, $B\Gamma$ die gegebenen Strecken, $B\varDelta$ die verlangte (S. 8, Zusatz). — Die Variante, welche die gröfsere Strecke zur Hypotenuse macht, bei Pappos III, 6; sie fehlt bei Euclid mit Absicht, da sie eine nicht in der Aufgabe gegebene Unterscheidung zwischen den Strecken nötig macht.

14.

In gleichen und gleichwinkligen Parallelogrammen stehen die Seiten, welche gleiche Winkel einschliefsen, in umgekehrtem Verhältnis, und wenn in Parallelogrammen, welche ein Winkelpaar gleich haben, die einschliefsenden Seiten in umgekehrtem Verhältnis stehen, so sind sie gleich.

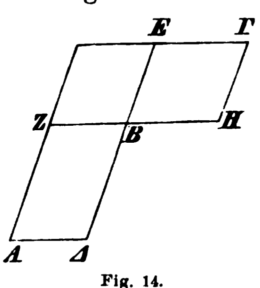


Fig. 14.

(Fig. 14.) AB und $B\Gamma$ die Parallelogramme, man lege sie wie in der Figur, und ergänze das Parallelogramm ZE, so ist nach S. 1 $AB : ZE = \varDelta B : BE$ und $B\Gamma : ZE = BH : ZB$ und da $AB = B\Gamma$, so folgt $\varDelta B : BE = BH : ZB$.

q. e. d. etc.

Der Satz ist der Satz von dem Ergänzungsparallelogramm I, 43 und aus der Rechnung mit den Streckenbrüchen, bezw. aus dem Satz: „Das Verhältnis zweier gleichartiger Gröfsen ist gleich dem ihrer Mafszahlen" hervorgegangen und

gestattet den Übergang vom Streckenprodukt zum Streckenbruch u. v. v., — „im umgekehrten Verhältnis stehen“ „ἀντιπέπονθα“ von αντιπασχω „das entgegengesetzte (id est die Umkehrung des Verhältnisses) erleiden“. Beim Beweis ist die Umkehrung des Satzes über die Scheitelwinkel stillschweigend benutzt (Proclus zu I, 13).

15.

Haben flächengleiche Dreiecke je einen Winkel gleich, so stehen die Seiten, welche diese gleichen Winkel einschliefsen, in umgekehrtem Verhältnis; haben die Dreiecke je einen Winkel gleich und stehen die einschliefsenden Seiten in umgekehrtem Verhältnis, so sind die Dreiecke flächengleich.

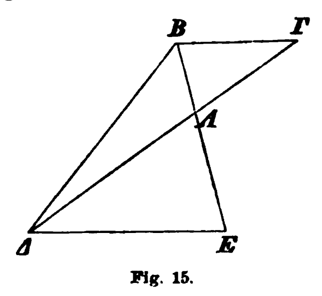


Fig. 15.

Es seien (Fig. 15) $AB\Gamma$ und $A\Delta E$ die flächengleichen Dreiecke und die Winkel bei A gleich. Man lege sie wie in der Figur und ziehe $B\Delta$. Dann ist nach Satz 1: $\Gamma AB : BA\Delta = A\Gamma : A\Delta$ und $EA\Delta : BA\Delta = EA : AB$, also $A\Gamma : A\Delta = AE : AB$ etc.

16.

Wenn vier Strecken eine Proportion bilden, so ist das Rechteck aus den äufseren Gliedern dem Rechteck aus den inneren Gliedern gleich; und wenn das Rechteck aus den äufseren Gliedern dem Rechteck aus den inneren Gliedern gleich ist, so sind die vier Strecken in Proportion.

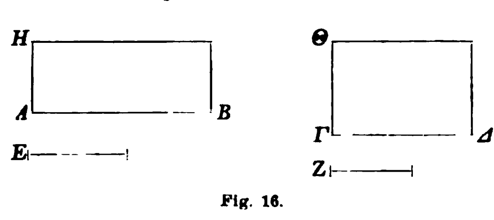


Fig. 16.

(Fig. 16.) Die vier Strecken seien AB, $\Gamma\Delta$, E, Z, so dafs $AB : \Gamma\Delta = E : Z$, ich behaupte, dafs $AB \cdot Z = \Gamma\Delta \cdot E$ sei (man macht $AH = Z$ und $\Gamma\Theta = E$ und wendet S. 14 an).

17.

Wenn eine Proportion von drei Strecken besteht, so ist das Rechteck aus den äufseren Gliedern dem Quadrat des mittleren gleich, und wenn das Rechteck aus dem äufseren

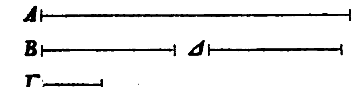


Fig. 17.

dem Quadrat des mittleren gleich, so besteht die Proportion von drei Gliedern.

(Fig. 17.) A, B, Γ, so dafs $A:B = B:\Gamma$; die Hilfsstrecke $\Delta = B$; ihre Einführung erscheint uns ganz überflüssig, doch hat Euclid in S. 16, von dem 17 eigentlich ein Spezialfall ist, von vier Strecken gesprochen.

18.

Von einer gegebenen Strecke aus eine geradlinige Figur zu entwerfen, welche einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich und ähnlich liegend ist.

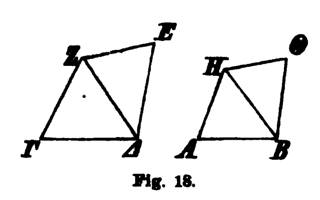


Fig. 18.

(Fig. 18.) Die gegebene Strecke sei AB und die gegebene Figur ΓE. Man ziehe ΔZ und trage in A und B an AB die Winkel $HAB = \Gamma$ und $HBA = Z\Delta\Gamma$ an (I, 23), dann lege man in B und H an BH die Winkel $HB\Theta = Z\Delta E$ und $\Theta HB = EZ\Delta$ an (S. 4).

Was unter „ähnlich liegen“ verstanden wird, ist nicht gesagt, aus der Konstruktion folgt, dafs gemeint ist, dafs durch Zuordnung von AB zu einer bestimmten Seite $\Gamma\Delta$ das Verhältnis der Mafsstäbe vorgeschrieben ist und zugleich die entsprechende Reihenfolge der analogen Stücke. Das Prinzip wird in S. 20 aufgedeckt, es besteht darin, die Figur in Dreiecke zu zerschneiden; daher ist die Ordnung der Sätze bei Campanus bezw. im Arabischen Euclid, wo die Aufgabe nach S. 20 kommt, natürlicher; auch dafs Campanus ein Fünfeck als Beispiel wählt, ist vorzuziehen, da die in der gegebenen Figur zerschnittenen Winkel in gleicher Reihenfolge zusammengesetzt werden müssen.

19.

Ähnliche Dreiecke stehen zu einander im quadratischen Verhältnis ihrer Seiten.

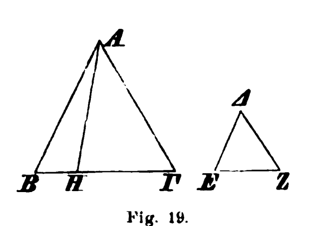


Fig. 19.

(Fig. 19.) $AB\Gamma \sim \Delta EZ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$ und $B\Gamma$ und EZ seien homolog. Man konstruiert BH so, dafs $B\Gamma : EZ = EZ : BH$ (S. 11) und zieht AH. Da $AB : B\Gamma = \Delta E : EZ$ (nach Voraussetzung), ist auch $AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$ (V, 16), also auch gleich $EZ : BH$, also auch (S. 15) Dreieck ABH flächengleich

$\varDelta EZ$; aber ABH und $AB\Gamma$ nach S. 1 $= BH : B\Gamma$, somit

$$AB\Gamma : \varDelta EZ = B\Gamma : BH$$

und da $B\Gamma : EZ = EZ : B\Gamma$, so ist (V, Def. 9)

$$AB\Gamma : \varDelta EZ^{*}) = [\Gamma B : EZ]^2.$$

Zusatz.

Hieraus erhellt, wenn drei Strecken proportional sind, so verhält sich die erste zur dritten, wie die Figur über der ersten entworfen zu der ähnlich und ähnlich liegenden, die über der zweiten (mittleren) entworfen ist.

Der Zusatz gehört eigentlich zu S. 20; man darf auch nicht schreiben, wie Heiberg, $\Gamma B^2 : EZ^2$, bis S. 20 bewiesen ist.

20.

Ähnliche Polygone werden in gleichviel ähnliche und den ganzen (Polygonen) entsprechende Dreiecke geteilt und ein Polygon hat zum anderen das quadratische Verhältnis, welches eine homologe Seite zur anderen hat.

(Fig. 20.) Es wird mittelst des Ähnlichkeitssatzes 6 die Ähnlichkeit der Dreiecke dargethan, ihre Gleichzahl wird dem Augenschein entnommen, dann folgt der Beweis, daſs die Diagonalen sich proportional schneiden

— $AM : M\Gamma = ZN : N\Theta$; $AM : M\Gamma$ (nach S. 1) $= BAM : BM\Gamma$

und gleich $EAM : EM\Gamma = ABE : BE\Gamma$ (V, 12)

und ebenso

$$ZN : N\Theta = ZHA : HA\Theta.$$

Fig. 20.

Und ebenso wird gezeigt, daſs $BE\Gamma : \Gamma E\varDelta = HA\Theta : \Theta AK$ und damit nach V, 12 $ABE : HZ\Theta = AB\Gamma\varDelta E : ZH\Theta K\Lambda$ und gleich $(AB : ZH)^2$.

Zusatz.

Ebenso wird auch bei Vierecken gezeigt, daſs sie im quadratischen Verhältnis der Seiten stehen, und dasselbe ist bei Dreiecken bewiesen worden, so daſs allgemein ähnliche geradlinige Figuren im quadratischen Verhältnis homologer Seiten stehen.

21.

Geradlinige Figuren, welche derselben Figur ähnlich sind, sind untereinander ähnlich (Fig. 21).

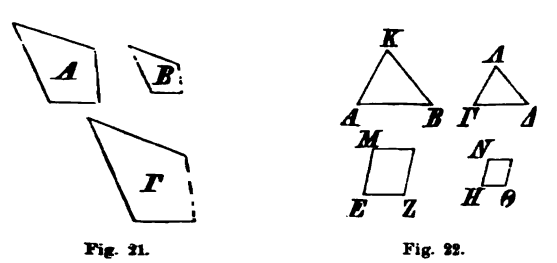


Fig. 21. Fig. 22.

22.

Wenn vier Strecken eine Proportion bilden, so bilden auch die auf ihnen ähnlich und ähnlich liegend entworfenen geradlinigen Figuren eine Proportion und umgekehrt.

(Fig. 22.) $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$ die vier Strecken, so dafs $AB:\Gamma\Delta = EZ:H\Theta$ und auf AB und $\Gamma\Delta$ seien die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren KAB und $\Lambda\Gamma\Delta$ entworfen und auf EZ und $H\Theta$ die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren MZ und $N\Theta$.

Ξ sei die dritte Proportionale zu AB, $\Gamma\Delta$ und O zu EZ und $H\Theta$ (S. 11), alsdann ist (V, 22) $AB:\Xi = EZ:O$, und nach dem Zusatz zu 14 ist $AB:\Xi = KAB:\Lambda\Gamma\Delta$ und $EZ:O = MZ:N\Theta$ also

$$KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:N\Theta.$$

Umgekehrt, wenn $KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:NO$, ist

$$AB:\Gamma\Delta = EZ:H\Theta,$$

denn, wenn nicht, so sei $AB:\Gamma\Delta = EZ:\Pi P$. Über ΠP sei ähnlich und ähnlich liegend mit MZ entworfen ΣP, dann ist nach dem erwiesenen ersten Teil $KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:\Sigma P$, aber nach Voraussetzung $KAB:\Lambda\Gamma\Delta = MZ:N\Theta$, also $N\Theta = \Sigma P$ und da $N\Theta:\Sigma P = (H\Theta:\Pi P)^2$ (nach 20 und nach Zusatz zu 20) $= H\Theta^2:\Pi P^2$, so ist $H\Theta^2 = \Pi P^2$ und $H\Theta = \Pi P$.

– – –

Aus dem Beweise geht hervor, dafs der Wortlaut des Satzes zu eng ist, es ist unnötig, dafs die Figuren über AB und $\Gamma\Delta$ einerseits und über EZ und $H\Theta$, bezw. über AB und EZ, wie über $\Gamma\Delta$ und $H\Theta$ einander ähnlich und das Verhältnis der Mafsstäbe das gleiche.

Den Lehrsatz zu 22, der ganz überflüssig ist, da er aus 20 und dem Zusatz zu 20 und dem evidenten Satze, dafs, wenn zwei Quadrate gleich sind, ihre Seiten gleich sind, gefolgert wird, hat Rob. Simson aus sachlichen Gründen und Heiberg aus philol. (weil gegen den Gebrauch bei Euclid) verworfen.

23.

Gleichwinklige Parallelogramme haben zu einander ein Verhältnis, das aus dem der Seiten zusammengesetzt ist.

(Fig. 23.) Man ergänzt das Parallelogramm $\varDelta H$ und nimmt [willkürlich] eine Strecke K an und bestimmt die Strecke $\varLambda$ und M, so dafs

$B\varGamma : \varGamma H = K : \varLambda$ und $\varDelta\varGamma : \varGamma E = \varLambda : M$.

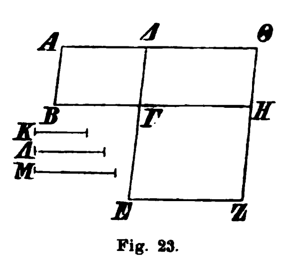


Fig. 23.

$K : M$ heifst aus $K : \varLambda$ und $\varLambda : M$ zusammengesetzt, $K : \varLambda = B\varGamma : \varGamma H$ ist aber (S. 1) $= A\varGamma : \varGamma\varTheta$ und $\varLambda : M = \varDelta\varGamma : \varGamma E$ $= \varGamma\varTheta : \varGamma Z$ also (δι' ἴσου (V, 22)) $K : M = A\varGamma : \varGamma Z$ w. z. b. w.

Der Satz ist keineswegs identisch mit unserem Satze: Das Verhältnis ... ist gleich dem der Produkte der die gleichen Winkel einschliefsenden Seiten. Wohl kommt die Zusammensetzung des Verhältnisses oder der Verhältnisse auf die Multiplikation der betreffenden Brüche hinaus, aber ehe nicht die Rechnung mit irrationalen Zahlen bezw. mit incommensurablen Gröfsen völlig begründet, darf von einer Multiplikation keine Rede sein. Die Definition 5 des sechsten Buches von Simson verworfen, von Heiberg desgleichen, ist schon rein sachlich für unecht zu erachten und die Erklärung, welche Lorenz und Mollweide nach dem Vorgang von Campanus, Galilei, Barrow und anderen giebt, fast sicher die Euclidische gewesen (so wie sie im Text in der gesperrten Stelle gegeben ist). Die Übersetzung von Heiberg $K : M = K : \varLambda$. $\varLambda : M$ ist daher hier entschieden zu tadeln, ebenso wie die betreffende Übersetzung in VIII, 5, mit VI, 23 die einzigen, wo in den Elementen von einem zusamengesetzten Verhältnisse die Rede ist; vgl. auch Pfleiderers Scholien § 195 u. ff.

24.

In jedem Parallelogramm sind die Parallelogramme um die Diagonale* (die Ergänzungsparallelogramme) herum sowohl dem ganzen als einander ähnlich.

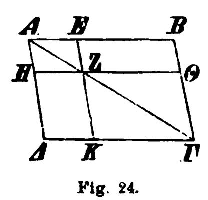


Fig. 24.

(Fig. 24.) $AB\Gamma\Delta$ das Parallelogramm, seine Diagonale $A\Gamma$, und die Parallelogramme um sie herum EH, ΘK. Nach S. 2 und V, 18 ist $BA : A\Delta = EA : AH$ und $A\Delta : \Delta\Gamma = AH : HZ$, $\Delta\Gamma : \Gamma B = HZ : ZE$, $\Gamma B : BA = ZE : EA$.

Der Ausdruck Diagonale bei Geminos-Heron Definition, bei Euclid heifst er „Diameter". περι mit Acc. „rings herum".

25.

Eine Figur zu konstruieren, welche zugleich einer gegebenen geradlinigen Figur ähnlich und einer anderen gegebenen [geradlinigen Figurenfläche] gleich ist.

(Fig. 25.) Es sei die erste Figur $AB\Gamma$, die flächengleiche Δ. An $AB\Gamma$ lege man das $AB\Gamma$ flächengleiche Parallelogramm BE und an ΓE in dem Winkel $Z\Gamma E$ das Δ gleiche Parallelogramm ΓM [I, 45], und es werde die mittlere Proportionale zu $B\Gamma$ und ΓZ konstruiert, $H\Theta$ und über $H\Theta$ das dem Dreieck $AB\Gamma$ ähnliche und ähnlich liegende $HK\Theta$ konstruiert (S. 18). [Beweis.] $B\Gamma : H\Theta = H\Theta : \Gamma Z$, also nach S. 19 Zus. $B\Gamma : \Gamma Z = AB\Gamma : KH\Theta$, aber $B\Gamma : \Gamma Z = BE : \Gamma M$ also $AB\Gamma : KH\Theta = BE : \Gamma M$; und da $AB\Gamma = BE$, so ist auch $KH\Theta = EZ = \Delta$.

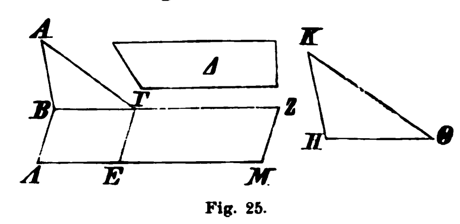


Fig. 25.

26.

Wenn von einem Parallelogramm ein Parallelogramm weggenommen wird, das dem ganzen ähnlich ist und ähnlich liegt und mit ihm einen gemeinsamen Winkel hat, so liegt es mit dem ganzen um dieselbe Diagonale herum.

(Fig. 26.) Beweis indirekt. $AB\Gamma\Delta$ das ganze, ΔHZE das weggenommene; wenn Z nicht auf $\Delta\Gamma$, so schneide HZ die Diagonale in Θ, so ist KH nach 24 ähnlich $A\Gamma$ und $\Delta A : AB = HA : AK$, also $AE = AK$.

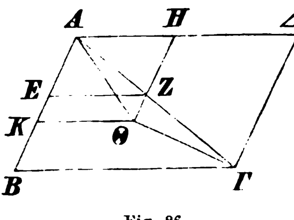


Fig. 26.

27.

Unter allen längs* einer gegebenen Strecke entworfenen Parallelogrammen, deren Ergänzungen einem Parallelogramme auf der halben Strecke ähnlich sind, ist das seiner Ergänzung* ähnliche Parallelogramm auf der halben Strecke das gröfste.

(Fig. 27.) $A B$ die Strecke, die Mitte Γ, $A\Delta$ das Parallelogramm auf $A\Gamma$, das seiner Ergänzung*) ΓE ähnlich ist. AZ sei ein beliebiges Parallelogramm, so dafs die Ergänzung ZB der Figur ΔB ähnlich und ähnlich liegend. Behauptung: $A\Delta > AZ$.

Fig. 27.

Da $\Delta B \sim ZB$, so geht ΔB durch Z und man bringe ZK zum Schnitt mit ΔE und HZ zum Schnitt mit BE. Da $\Gamma Z = ZE$ als Ergänzungsparallelogramm (I, 43), so ist $\Gamma\Theta = KE$; aber $\Gamma\Theta = \Gamma H$, also $\Gamma H = KE$ und nach Addition von ΓZ ist $AZ =$ Gnomon*) ΔMN, d. h. gleich $\Gamma E - \Delta M$, also $AZ < \Delta B$, also $A\Delta > AZ$.

Satz 27 ist dadurch interessant, dafs er „die erste Maximums-Aufgabe enthält, welche in der Geschichte der Mathematik nachgewiesen ist“ (Cantor); die Fassung des Satzes ist sehr dunkel, aber der Beweis hellt sie auf; das Wort Gnomon fehlt in der Heibergschen Übersetzung mit Unrecht. Die Übersetzung von παρὰ mit dem Acc. mit „längs“ ist nötig, die Anlegung an AB selbst wird mit „ἀπὸ“ gegeben, doch steht auch gelegentlich statt dessen παρὰ c. Acc. „Ergänzung“ = ἐλλείπων Part. Präs. von ἐλλείπω ermangeln.

28.

Längs einer gegebenen Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur Γ gleiches Parallelogramm zu konstruieren, dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramm Δ ähnlich ist. Es darf aber die Figur Γ nicht gröfser sein, als das Parallelogramm auf der halben Strecke, dessen Ergänzung ähnlich Δ ist.

(Fig. 28.) AB die Strecke, die Mitte sei E, und von EB aus werde das Δ ähnliche und ähnlich liegende Viereck EZ (S. 18) konstruiert, und das Parallelogramm AH ergänzt. Ist $AH = \Gamma$, so ist das Geforderte bewirkt. Wenn nicht, so ist [Voraussetzung] $AH > \Gamma$. Aber $AH = BH$, also auch $BH > \Gamma$. Es werde ein Parallelogramm

$K\Lambda MN$ konstruiert, dessen Fläche gleich $BH - \Gamma$ und das Δ ähnlich und ähnlich liegend ist (S. 25); dann ist KM auch $\sim HB$, und da $HB > KM$ auch $HE > K\Lambda$ und $HZ > \Lambda M$. Macht man $H\Xi = \Lambda K$ und $HO = \Lambda M$ und vervollständigt die Figur, so ist $HO\Pi\Xi \simeq K\Lambda MN$ und HB geht durch Π und der Gnomon $\Upsilon X\Phi$ gleich Γ und wie im vorigen Beweis gleich $T\Sigma$ und dessen Ergänzung ΣP ist ähnlich (S. 24) Δ, also $T\Sigma$ das verlangte.

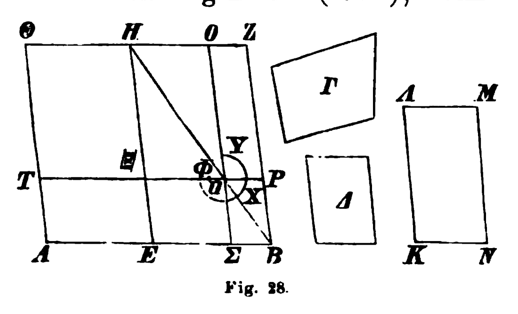


Fig. 28.

29.

Längs einer gegebenen Strecke ein Parallelogramm anzulegen, das einer gegebenen geradlinigen Figur Γ gleich ist und dessen Überschufs* einem gegebenen Parallelogramm Δ ähnlich ist.

(Fig. 29.) AB die gegebene Strecke, E die Mitte von AB, $EZ\Lambda B \sim \Delta$, und $H\Theta \sim \Delta$ und $= BZ + \Gamma$ (S. 25), so dafs $K\Theta$ entsprechend zu $Z\Lambda$ und KH zu ZE, dann, wie in Satz 28, KH auf ZE bis N und $K\Theta$ auf $Z\Lambda$ bis M abgetragen, und die Figur vervollständigt, so geht $Z\Xi$ durch B (26) und der Gnomon $\Psi X\Phi$ ist $= \Gamma$ und gleich dem Parallelogramm $A\Xi$, dessen Überschufs $\Pi O \sim \Delta$ ist.

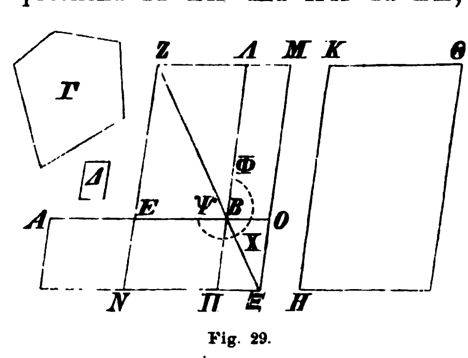


Fig. 29.

„Überschufs" ὑπερβάλλον. In welchem engen Zusammenhange diese Sätze 27, 28, 29, (30) mit den drei Kegelschnitten und ihren Gleichungen stehen und dafs die Namen Parabel, Ellipse, Hyperbel, die Apollonius ihnen gab, aus diesen Sätzen herrühren, lese man bei Cantor, Bd. I, 1880, S. 248—252.

30.

Eine gegebene Strecke* nach stetigem Verhältnis* zu teilen.*

(Fig. 30.) AB die Strecke. Man beschreibe über AB das Quadrat $A\Gamma\Theta B$ und schreibe längs AB das Parallelogramm $\Gamma\Delta$, welches $B\Gamma$ flächengleich und dessen Überschufs $A\Delta$ dem Quadrat $B\Gamma$ ähnlich, d. h. ein Quadrat (S. 29); dann ist AB in E stetig geteilt, denn da $A\Delta = ZB$, so ist nach 14 $ZE : E\Delta = AE : EB$ oder $AB : AE = AE : BE$.

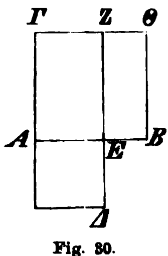


Fig. 30.

„Strecke“ hier mal wieder durch „begrenzte Gerade“ ausdrücklich hervorgehoben; statt „stetige Teilung“ sagt Euclid „im ausgezeichneten und zugleich mittleren Verhältnis“, Campanus sagt in einem Verhältnis, das ein Mittelglied und zwei äufsere (oder End-) Glieder. Clavius sagt, wegen der vielen ausgezeichneten Anwendungen (worüber man die Abhandlung von Böttcher in den Lehrgängen und Lehrproben vergleiche) nennen die meisten Mathematiker diese Teilung die „göttliche“. Dafs die Aufgabe mit der Aufgabe II, 11 identisch, wird nicht besonders ausgesprochen.

31.

Im rechtwinkligen Dreieck ist eine* Figur über der Hypotenuse gleich der Summe der ähnlich und ähnlich liegend über den Katheten* entworfenen.

(Fig. 31.) Man fälle das Lot $A\Delta$, dann sind die Dreiecke $B\Delta A$ und $A\Delta\Gamma$ unter sich und dem ganzen Dreieck $AB\Gamma$ ähnlich und folglich $\Gamma B : BA = AB : B\Delta$, und also nach Zusatz zu 19 die Figur über ΓB zu der über BA wie $\Gamma B : B\Delta$. Ebenso wird die Figur über ΓB zu der über ΓA wie $\Gamma B : \Gamma\Delta$. Folglich auch die Figur über ΓB zu der Summe der Figuren über AB und $A\Gamma$ wie $\Gamma B : B\Delta + \Delta\Gamma$. Und da $B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma$, ist auch der Satz bewiesen.

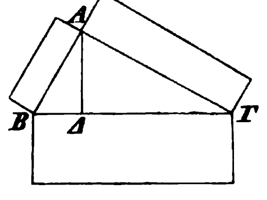


Fig. 31.

Dafs dieser Beweis und diese Verallgemeinerung des Pythagoras Eigentum des Euclid ist, ist von Proclus bezeugt; mit geringer Abänderung findet er sich als einer der modernsten Beweise des Pythagoras im Battaglini. Das Wort „Kathete“ kommt bei Euclid noch nicht im heutigen Sinne vor.

32.

Wenn zwei Dreiecke $AB\Gamma$ und $\Delta\Gamma E$ zwei Seiten $BA, A\Gamma$ den Seiten $\Delta\Gamma, \Delta E$ proportional haben und sie in der Ecke

Γ zusammenstofsen und AB parallel $\Delta\Gamma$ und $A\Gamma$ parallel ΔE ist, so liegen $B\Gamma$ und ΓE in einer Geraden.

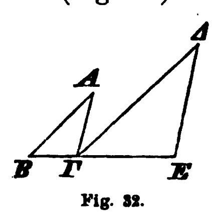


Fig. 32.

(Fig. 32.) Denn nach I, 29 sind die Wechselwinkel $BA\Gamma$ und $A\Gamma\Delta$ gleich und aus gleichem Grunde $\sphericalangle\, \Gamma\Delta E = A\Gamma\Delta$, also $\sphericalangle\, BA\Gamma = \Gamma\Delta E$, also die Dreiecke $AB\Gamma$ und $\Delta\Gamma E$ (S. 6) ähnlich, also $\sphericalangle\, AB\Gamma$ gleich $\Delta\Gamma E$, also $A\Gamma E = AB\Gamma + BA\Gamma$; auf beiden Seiten füge man $A\Gamma B$ hinzu, so ist $A\Gamma B + A\Gamma E = 2$ Rechten, also $B\Gamma$ und ΓE in derselben Geraden (I, 14).

Es ist hierin zugleich bewiesen, dafs Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln gleich sind. Die Reihenfolge der Sätze ist auffallend. S. 31 gehört hinter S. 20 und S. 32 hinter die Ähnlichkeitssätze.

33.

In gleichen Kreisen haben die Peripheriewinkel wie die Zentriwinkel das Verhältnis der Bogen, auf denen sie stehen.

(Fig. 33.) Es seien $AB\Gamma$, ΔEZ die gleichen Kreise, und an den Zentren H und Θ die Winkel $BH\Gamma$ und $E\Theta Z$ und an den Peripherien die Winkel $BA\Gamma$ und $E\Delta Z$, so soll sein

$$\text{arc } B\Gamma : \text{arc } EZ = \sphericalangle\, BH\Gamma : E\Theta Z = BA\Gamma : E\Delta Z.$$

Es werden der Reihe nach die Lagen ΓK, $K\Lambda$ etc. dem Bogen $B\Gamma$ und die Bogen ZM, MN etc. dem Bogen EZ gleich gemacht und die Radien gezogen.

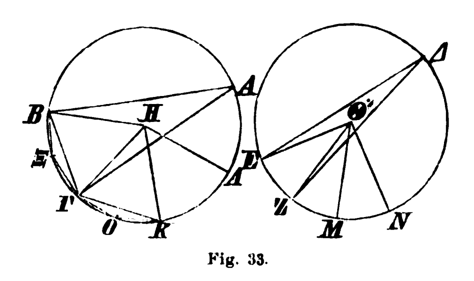


Fig. 33.

Nach III, 27 gehören zu gleichen Bogen gleiche Zentriwinkel. Also, das so Vielfache Bogen $B\Lambda$ von $B\Gamma$ ist, das ist $\sphericalangle\, BH\Lambda$ von $BH\Gamma$, und ebenso ist Bogen EN so vielmal Bogen EZ als Winkel $E\Theta N$ Winkel $E\Theta Z$. Wenn nun $B\Lambda >=< EN$, so ist auch $\sphericalangle\, BH\Lambda >=< \sphericalangle\, E\Theta N$, also nach Definition V, 5 arc $B\Gamma$: arc $EZ = \sphericalangle\, BH\Gamma : E\Theta Z$ und $= BA\Gamma : E\Delta Z$ (V, 15).

Der Beweis des Satzes 33, der den einzigen Versuch darstellt die Lehre von den Proportionen auf den Kreis zu übertragen, ist nicht unbedenklich, denn die Definition V, 5 verlangt die volle Variabilität von p und q mit der alleinigen Einschränkung, dafs es ganze Zahlen

seien, bei S. 1 ist diese Variabilität durch die Unendlichkeit der Geraden bezw. durch das zweite Postulat gesichert, aber die Ausdehnung des Kreises auf beliebig viele Windungen, bezw. die Erweiterung des Winkels über vier Rechte, ja sogar über zwei Rechte, fehlt.

Der Zusatz: „Die Sektoren verhalten sich wie ihre Bogen" gehört dem Theon an.

Mit dem sechsten Buche schliefsen die eigentlichen planimetrischen Bücher, wohl kommen noch einzelne planimetrische Sätze in den stereometrischen Büchern vor, wie z. B. die auf die stetige Teilung bezüglichen Sätze XIII, 1—12 und besonders die Sätze XII, 1 u. 2: Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, die an und für sich hier ihre Stelle haben könnten, aber sie werden doch nur zum Zweck ihrer Verwendung für stereometrische Konstruktionen und Sätze gegeben.

Tafel I.

A S_2 D B_1 B

S_1

$S_2B = b =$ *Bildweite*

A A_2 B_2 b_2 B_0 b_0

$S_1S_2 = d =$ *Dicke.*

Fig. 5.

E H_2 d B_2 b_2

